Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat19pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

19e Année. — N° 1. Octobre 1908.

PREMIÈRE PARTIE

SUR UNE CLASSE DE QUARTIQUES GAUCHES UNICURSALES

par M. **Ch. Michel**, professeur au lycée Saint-Louis.

1. Dans une communication faite à l'Académie des Sciences (décembre 1876), M. Appell a le premier mis en évidence l'existence des quartiques gauches unicursales dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire et il a démontré à leur sujet le théorème général suivant :

Pour que les tangentes à une quartique gauche unicursale fassent partie d'un complexe linéaire, il faut et il suffit qu'il soit possible de trouver une représentation paramétrique propre de la courbe telle que les termes du second degré disparaissent simultanément dans les polynomes du quatrième degré, par rapport au paramètre, qui expriment les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la courbe.

Je veux montrer comment il est possible d'établir d'une manière très simple que les conditions sont nécessaires.

Si les tangentes à la quartique unicursale (C) font partie d'un complexe linéaire, le plan osculateur au point M de la courbe n'est autre, comme l'a montré M. Appell lui-même, que le plan polaire du point M par rapport à ce complexe. Or, ce plan, qui rencontre la courbe (C) en trois points confondus en M, rencontre à nouveau la courbe (C) en un point M′ et, d'après une propriété connue des complexes linéaires, le plan polaire de M′ par rapport au complexe linéaire considéré, c'est-à-dire le plan osculateur en M′ à la courbe, passe par M. A un point M quelconque de la courbe il correspond un second point M′ de la courbe qui est le point d'intersection, autre que M, de cette courbe et du plan qui lui est osculateur en M. Inversement, au point M′ il correspond un point M et un seul, lequel, d'après la remarque qui précède, est le point d'intersection, autre que M′, de la courbe et du plan qui lui est osculateur en M′. Il y a entre M et M′ une correspondance homographique, laquelle est d'ailleurs réciproque ; autrement dit, les points M et M′ se correspondent dans une involution. Cette involution admet deux points doubles A et B qui sont caractérisés par cette propriété que le plan osculateur en chacun d'eux rencontre la courbe en quatre points confondus. Les deux points variables M et M′ sont, sur la courbe (C), conjugués harmoniques par rapport aux points A et B. Nous dirons, avec M. Appell, qu'ils sont *conjugués* l'un de l'autre sur la courbe.

Cela posé, comme il existe une infinité de représentations paramétriques propres d'une courbe unicursale, qui se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par une transformation homographique quelconque du paramètre, laquelle dépend de trois constantes arbitraires, il est possible de disposer de deux de ces constantes de façon que les deux points A et B aient pour paramètres l'un 0 et l'autre ∞. La représentation paramétrique étant ainsi choisie, les paramètres de deux points conjugués M et M′ sont égaux et de signes contraires.

Soient dès lors les expressions des coordonnées tétraédriques d'un point quelconque de la courbe par des polynomes du quatrième degré par rapport à la variable λ :

$$x = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4,$$
$$y = b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4,$$
$$z = c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4,$$
$$t = d_0\lambda^4 + d_1\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_3\lambda + d_4.$$

Pour que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ soient les paramètres de quatre points de la courbe situés dans un même plan, il faut et il suffit qu'ils soient liés par une relation, laquelle est entière, symétrique et du premier ordre. Si $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ désignent les fonctions symétriques élémentaires des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, cette relation est de la forme

$$A\sigma_4 + B\sigma_3 + C\sigma_2 + D\sigma_1 + E = 0.$$

Écrivons qu'elle est vérifiée par les paramètres des points d'intersection de la courbe avec le plan osculateur en l'un quelconque M de ses points. Trois des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont alors égales au paramètre λ du point M, la quatrième, paramètre du conjugué M', est égale à $-\lambda$, et l'on a

$$\sigma_4 = -\lambda^4, \qquad \sigma_3 = -2\lambda^3, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_1 = 2\lambda.$$

Il s'ensuit que, quel que soit λ, on doit avoir la relation

$$-A\lambda^4 - 2B\lambda^3 + 2D\lambda + E = 0.$$

Par suite, $\qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad D = 0. \qquad E = 0.$

La relation qui existe entre les paramètres de quatre points de la courbe situés dans un même plan se réduit donc à $\qquad \sigma_2 = 0.$

Appliquons alors ce résultat aux points d'intersection de la courbe C avec le plan $x = 0$. Leurs paramètres sont racines de l'équation

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Comme σ_2 doit être nul, on a $a_2 = 0$. De même, b_2, c_2 et d_2 sont nuls. Les termes en λ^2 disparaissent simultanément dans les expressions de x, y, z, t.

Rappelons maintenant la méthode connue par laquelle on démontre que les conditions énoncées sont suffisantes. Supposons que les expressions des coordonnées tétraédriques x, y, z, t d'un point d'une courbe unicursale soient, en fonction d'un paramètre λ, de la forme

$$x = a\lambda^4 + a'\lambda^3 + a''\lambda + a''',$$
$$y = b\lambda^4 + b'\lambda^3 + b''\lambda + b''',$$
$$z = c\lambda^4 + c'\lambda^3 + c''\lambda + c''',$$
$$t = d\lambda^4 + d'\lambda^3 + d''\lambda + d'''.$$

Si la courbe est gauche, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{vmatrix}$$

est différent de 0, car, si ce déterminant était nul, il existerait entre les éléments de ses diverses colonnes une même relation linéaire et homogène, laquelle existerait aussi entre les coordonnées x, y, z, t d'un point quelconque de la courbe, qui, par suite, serait plane. Si donc on regarde les égalités précédentes comme des équations linéaires par rapport aux quatre quantités $\lambda^4, \lambda^3, \lambda$ et 1, on pourra en tirer, par les formules de Cramer, des expressions linéaires et homogènes en x, y, z, t pour $\lambda^4, \lambda^3, \lambda$ et 1.

Ainsi, on aura

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3, \qquad Z = \lambda, \qquad T = 1,$$

X, Y, Z, T étant quatre formes linéaires en x, y, z, t qui sont d'ailleurs indépendantes et peuvent

être prises pour de nouvelles coordonnées tétraédriques d'un point variable de la courbe. Il est facile alors de vérifier que les tangentes à la courbe font partie d'un complexe linéaire. Dans le nouveau système de coordonnées tétraédriques, les six coordonnées plückériennes de la tangente au point de paramètre λ sont

$$p = 4\lambda^3, \qquad q = 3\lambda^2, \qquad r = 1, \qquad p' = -2\lambda^3, \qquad q' = 3\lambda^4, \qquad r' = -\lambda^6.$$

Entre ces six coordonnées, il existe la relation linéaire et homogène

$$p + 2p' = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

2. Reprenons les couples de points conjugués M et M'. On a les résultats suivants :

1° *Toute droite* MM' *fait partie du complexe linéaire qui contient les tangentes à la courbe* (C). En effet, la droite MM' passe par M et est dans le plan polaire du point M par rapport au complexe.

2° *Toute droite* MM' *rencontre la droite* AB. Autrement dit, les quatre points M, M', A et B sont dans un même plan. En effet, comme nous l'avons vu, les paramètres de A et B étant supposés égaux à 0 et à ∞, pour que quatre points de (C) soient dans un même plan, il faut et il suffit que leurs paramètres vérifient la condition $\sigma_2 = 0$. Or, on reconnaît immédiatement que cette condition est vérifiée par les paramètres 0, ∞, λ et $-\lambda$ des points A, B, M et M'.

3° *Par tout point de la droite* AB, *il passe deux droites* MM'. En effet, si I est un point de AB, une droite MM' passant par I est nécessairement située dans le plan polaire (P) du point I par rapport au complexe linéaire qui contient les droites MM'. Ce plan rencontre la courbe (C) en quatre points α, β, γ, δ. Or, le plan osculateur à (C) en α passe par le point α', conjugué de α sur la courbe ; ce plan, étant le plan polaire de α par rapport au complexe linéaire considéré, passe par I ; il contient donc les droites αI et $\alpha\alpha'$. Mais, d'après une proposition établie, $\alpha\alpha'$ rencontre AB. Si donc $\alpha\alpha'$ ne coïncidait pas avec αI, le plan osculateur en α à la courbe (C) contiendrait la droite AB, ce qui est évidemment impossible. Donc, les trois points I, α, α' sont en ligne droite ; le point α' est un des trois points β, γ, δ. Par conséquent, les quatre points d'intersection du plan polaire de I par rapport au complexe linéaire considéré avec la courbe C se répartissent suivant deux droites MM' passant par le point I.

4° *Toute droite* MM' *rencontre la droite* Δ *d'intersection des plans osculateurs en* A *et* B *à la courbe* (C). En effet, si I est le point de rencontre de MM' avec AB, comme I, A, B sont trois points en ligne droite, leurs plans polaires par rapport au complexe linéaire sont trois plans passant par une même droite, qui est justement la droite Δ. Le plan polaire de I passant par Δ, la droite MM' qui est située dans ce plan rencontre Δ.

5° *Dans tout plan passant par* AB, *il existe une et une seule droite* MM'. En effet, un tel plan rencontre la courbe (C) en deux points M et M' qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B.

6° *Par tout point de* Δ, *il passe une et une seule droite* MM'. En effet, si J est un point de Δ, une droite MM' passant par J ne peut être située que dans le plan JAB et par suite ne peut être que la droite qui joint les points de rencontre autres que A et B du plan JAB avec la courbe (C). Effectivement, cette droite est une droite MM' et comme telle, elle rencontre Δ justement au point J.

7° *Dans tout plan passant par* Δ, *il existe deux droites* MM'. En effet, les droites MM' situées dans un plan passant par Δ sont les droites qui passent par le point I d'intersection de ce plan avec la droite AB.

8° *Il existe trois droites* MM' *qui rencontrent une droite* L *quelconque de l'espace.* En effet, projetons d'un point O pris sur (C) la courbe (C) suivant une courbe (c) sur un plan Π. La courbe (c) est une cubique unicursale. Les projections m et m' des points M et M' de la courbe (C) se correspondent en involution sur la cubique (c). Par suite, comme je l'ai indiqué dans mon article *Sur les cubiques unicur-*

sales (*Revue*, juin 1906), la droite mm' enveloppe une conique (8). Il en résulte que le plan OMM′ est tangent à un cône du second ordre (Γ). Ce cône est tangent au plan qui passe par O et contient la droite Δ. Il existe en effet dans ce plan, en dehors de la droite qui joint le point O à son conjugué O′, une droite MM′ qui ne passe pas par O. Cela posé, si la droite MM′ rencontre la droite L, elle fait partie d'un système de génératrices rectilignes, sur l'hyperboloïde déterminé par les droites AB, Δ et L. Le plan OMM′ doit être également tangent au cône (Γ_1) de sommet O circonscrit à cet hyperboloïde. Comme Δ est une génératrice de l'hyperboloïde, le plan qui contient O et Δ est tangent au cône (Γ_1) comme au cône (Γ). Les cônes (Γ) et (Γ_1) ont, en dehors de ce plan, trois plans tangents communs. Chacun de ces trois plans rencontre l'hyperboloïde suivant deux droites dont l'une rencontre AB et Δ et est ainsi une droite MM′. Il existe donc bien trois droites MM′ rencontrant la droite L.

9° *La surface* (Σ), *lieu des droites* MM′ *est une surface réglée du troisième ordre qui admet la droite* AB *comme directrice double et la droite* Δ *comme directrice simple*. Cet énoncé ne fait que résumer les résultats précédents.

10° *La courbe* (C) *est une ligne asymptotique de la surface* (Σ). En effet, le plan tangent à la surface en un point quelconque M de la courbe (C) contient la tangente en M à la courbe (C) et la droite qui joint M à son conjugué M′. C'est donc le plan osculateur à la courbe (C), qui est bien par suite une ligne asymptotique de la surface (Σ).

3. On a, relativement à la courbe (C), le théorème suivant :

La projection sur un plan Π *de la courbe* (C), *d'un point* I *de la droite* AB, *est une quartique à trois points doubles d'inflexion*.

En effet, le plan polaire du point I par rapport au complexe linéaire précédemment considéré rencontre (C) en quatre points M, M′, N, N′ conjugués deux à deux et deux à deux en ligne droite avec le point I. Les plans osculateurs à la courbe (C) en ces quatre points passent par le point I. Il s'ensuit que les projections m et n des points M, M′ et N, N′ sont sur la courbe (c), projection conique de la courbe (C), deux points doubles à tangentes d'inflexion. Quant aux points A et B de la courbe (C), en ligne droite avec le point I, ils se projettent en un point double ω de la courbe (c). Il reste à montrer que les tangentes en ce point sont inflexionnelles. Or, tout plan passant par la tangente en A à (C) rencontre (C) en trois points confondus avec le point A. On reconnait en effet immédiatement que la condition $\sigma_2 = 0$ est vérifiée par les quatre nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quand trois d'entre eux sont nuls, le quatrième étant arbitraire. Le plan projetant la tangente en A rencontre donc (C) en trois points confondus avec A. La projection de la tangente en A est par suite une tangente d'inflexion de la courbe (c). Il en est de même de la projection de la tangente en B à la courbe (C). Le théorème est démontré.

Laguerre a démontré (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878) sur les quartiques planes à trois points doubles d'inflexion l'intéressant théorème suivant : *D'un point quelconque de la courbe, on peut mener, en dehors de la tangente en ce point, quatre tangentes à la courbe et les quatre points de contact sont sur une même droite. Quand le point varie sur la courbe, cette droite enveloppe la conique qui est tangente aux six tangentes à la courbe en ses trois points doubles*. On a d'après cela le théorème suivant, relatif à la courbe (C) :

Par une droite passant par un point I *de la droite* AB *et s'appuyant sur la courbe, on peut mener, en dehors du plan tangent au point d'appui sur la courbe, quatre plans tangents à la courbe et les points de contact de ces quatre plans tangents sont dans un même plan qui passe par le point* I. *Quand la droite donnée se déplace sur le cône qui a pour sommet le point* I *et pour base la courbe, ce plan enveloppe un cône du second degré qui est tangent aux deux plans passant par* AB *et respectivement par les tangentes en* A *et* B, *et aux quatre plans osculateurs menés de* I *à la courbe*.

Les résultats précédents admettent des résultats corrélatifs. Une courbe (C) est en même temps du

quatrième degré et de la quatrième classe, car, comme l'on sait, d'un point P quelconque de l'espace on peut mener à la courbe quatre plans osculateurs dont les points de contact sont les points d'intersection de (C) avec le plan polaire de P par rapport au complexe linéaire qui contient les tangentes à (C). Il s'ensuit que l'ensemble des tangentes à une courbe unicursale du quatrième degré dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire se correspond à lui-même par dualité. Des résultats que nous venons d'obtenir, nous déduisons donc par dualité les résultats suivants :

Toute section plane de la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe (C) *est une courbe de la quatrième classe (et du sixième degré) à trois tangentes doubles de rebroussement. Une tangente quelconque* T *à cette développable, qui s'appuie sur* Δ, *rencontre, en dehors de son point de contact, la développable en quatre points, et les plans tangents à la développable en ces quatre points concourent en un même point situé dans le plan qui contient* T *et* Δ. *Quand* T *se déplace dans un plan fixe passant par* Δ, *ce point décrit une conique. Cette conique passe par les quatre points d'intersection du plan avec la courbe* (C) *et par les points de rencontre de* Δ *avec les tangentes en* A *et* B *à la courbe.*

NOUVELLE MÉTHODE DE DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S

par M. **J. Haag**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Voici une méthode de discussion de l'équation en S qui me semble nouvelle et simple. Nous allons tout simplement appliquer le théorème de Rolle. On a

$$\Delta'(S) = -(\alpha + \alpha' + \alpha''),$$

en appelant $\alpha, \alpha', \alpha', \beta, \beta', \beta''$ les mineurs de $\Delta(S)$ relatifs à $A - S$, $A' - S$, $A'' - S$, B, B', B''. L'équation dérivée s'écrit alors

$$(A - S)(A' - S) + (A' - S)(A'' - S) + (A'' - S)(A - S) - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0.$$

Supposons pour fixer les idées $A \geqslant A' \geqslant A''$. En substituant A', on obtient comme résultat de substitution

$$(A'' - A')(A - A') - B^2 - B'^2 - B''^2,$$

qui est négatif et ne peut devenir nul que si $B = B' = B'' = 0$ et $A' = A$ par exemple. Comme la substitution de $\pm\infty$ donne le signe $+$, on en conclut que *l'équation dérivée a ses racines réelles et séparées par le nombre* A'. Elle ne peut par suite avoir une racine double que si A' est cette racine, ce qui exige, comme on vient de le voir :

$$B = B' = B'' = 0 \qquad \text{et} \qquad A' = A.$$

Pour que la deuxième racine soit aussi égale à A, il est facile de voir que l'on doit avoir également $A'' = A'$. Donc :

Théorème. — *L'équation dérivée n'a de racine double que dans le cas de la sphère.*

Revenons maintenant à l'équation en S elle-même. Appelons S_1 et S_2 les deux racines réelles de la dérivée, et supposons, par exemple, $S_1 < S_2$.

On a, pour l'une ou l'autre de ces racines,

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0;$$

d'où, en élevant au carré, $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha') = 0$

ou, en tenant compte des identités bien connues,

$$\alpha'\alpha'' - \beta^2 = (A - S)\Delta(S), \quad \ldots,$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + 2(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) = 2\Delta(S)[3S - (A + A' + A'')] = 2\Delta(S)\left[3S - \frac{3(S_1 + S_2)}{2}\right],$$

d'où $$3\Delta(S_1)(S_1 - S_2) = \alpha_1^2 + \alpha_1'^2 + \alpha_1''^2 + 2(\beta_1^2 + \beta_1'^2 + \beta_1''^2)$$

et $$3\Delta(S_2)(S_2 - S_1) = \alpha_2^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_2''^2 + 2(\beta_2^2 + \beta_2'^2 + \beta_2''^2).$$

D'ailleurs $\Delta(-\infty) > 0$ et $\Delta(+\infty) < 0$.

1er cas. — Les mineurs $\alpha, \alpha', \ldots$, ne sont pas tous nuls, pour aucune des valeurs S_1 et S_2. — On a alors $\Delta(S_1) < 0$, $\Delta(S_2) > 0$; d'où l'on déduit que l'équation en S a *ses trois racines réelles et distinctes.*

2e cas. — Les mineurs sont tous nuls pour $S = S_1$ par exemple, mais pas tous les éléments. — On a $S_1 - S_2 = 0$, car nous avons vu que l'on n'avait $S_1 = S_2$ que pour la sphère auquel cas tous les éléments sont nuls. On a donc $\Delta(S_1) = 0$ et S_1 *est racine double de l'équation* en S. Elle ne peut être racine triple, puisque S_1 n'est pas racine double de $\Delta'(S) = 0$.

3e cas. — Cas où $S_1 = S_2$. — On a alors une sphère ; l'équation en S se réduit à $(A - S)^3 = 0$ *et a une racine triple.* La discussion est ainsi faite d'une façon complète et elle nous donne le théorème classique suivant :

Théorème. — *Pour qu'un nombre S soit racine double, il faut et il suffit que ce nombre annule tous les mineurs.*

On peut également énoncer celui-ci :

Théorème. — *Pour que l'équation en S ait une racine triple, il faut et il suffit que la dérivée ait une racine double.*

Remarque. — Je me suis appuyé dans ce qui précède sur une propriété connue du déterminant adjoint, dont voici une démonstration simple qui me semble également nouvelle pour le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} \quad \text{et son adjoint} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Nous désignons les mineurs de Δ par de grandes lettres affectées d'indices. On sait que $\Delta = D^2 = D.D$, ce qui s'écrit :

$$aA_1 + a'A_1' + a''A_1'' = D(Aa + A'a' + A''a'') \quad \text{ou}$$
$$bA_1 + b'A_1' + b''A_1'' = 0 = D(Ab + A'b' + A''b'') \quad \text{ou}$$
$$cA_1 + c'A_1' + c''A_1'' = 0 = D(Ac + A'c' + A''c'') \quad \text{ou}$$

$$(1) \begin{cases} a(A_1 - AD) + a'(A_1' - A'D) + a''(A_1'' - A''D) = 0. \\ b(A_1 - AD) + b'(A_1' - A'D) + b''(A_1'' - A''D) = 0. \\ c(A_1 - AD) + c'(A_1' - A'D) + c''(A_1'' - A''D) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant des équations (1) linéaires et homogènes en $A_1 - AD$, $A_1' - A'D$, $A_1'' - A''D$ est Δ, que nous supposons différent de 0. Donc le système (1) n'admet que la solution 0, 0, 0, ce qui donne les identités à démontrer.

Cette démonstration s'applique évidemment aux autres lignes et se généralise aisément pour un déterminant quelconque.

ALGÈBRE

1662. — *On considère l'équation du quatrième degré*

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f = 0,$$

dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

1° *Former l'équation qui admet pour racines les valeurs de $y = \dfrac{\alpha\beta + \gamma\delta}{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)}$ et montrer que si on connaît une valeur de y, on peut calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.*

2° *Trouver la condition pour que les quatre racines soient harmoniques. Résoudre l'équation du quatrième degré dans ce cas.*

3° *Voir ce qui arrive quand l'équation donnée a une racine double, une triple ou une quadruple.*

1. Posons $\alpha+\beta=u,\qquad \gamma+\delta=u',\qquad \alpha\beta=v,\qquad \gamma\delta=v'$;
les relations entre les coefficients et les racines deviennent alors

$$(1)\quad u+u'=-\frac{4b}{a},\qquad uu'+v+v'=\frac{6c}{a},\qquad uv'+vu'=-\frac{4d}{a},\qquad vv'=\frac{f}{a}.$$

De la première de ces équations, on tire

$$(2)\qquad u=-\frac{2b}{a}+\lambda,\qquad u'=-\frac{2b}{a}-\lambda,$$

λ étant une inconnue auxiliaire.

On a d'ailleurs $y=\dfrac{v+v'}{uu'}$, d'où $y+1=\dfrac{v+v'+uu'}{uu'}=\dfrac{6c}{auu'}$.

Par suite,

$$(2)'\qquad uu'=\frac{4b^2}{a^2}-\lambda^2=\frac{6c}{a(y+1)}.$$

De la deuxième des relations (1), on tire

$$(3)\qquad v+v'=\frac{6c}{a}-uu'=\frac{6cy}{a(y+1)}.$$

De la troisième, on déduit, en tenant compte de (2),

$$\lambda(v'-v)=-\frac{4d}{a}+\frac{2b}{a}(v+v')=\frac{12bcy}{a^2(y+1)}-\frac{4d}{a}$$

ou

$$(4)\qquad v'-v=\frac{4}{a\lambda}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right].$$

De (3) et (4), on tire

$$(5)\qquad v=\frac{3cy}{a(y+1)}-\frac{2}{a\lambda}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right],\qquad v'=\frac{3cy}{a(y+1)}+\frac{2}{a\lambda}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right].$$

Portant ces valeurs dans la quatrième des relations (1), on a

$$\frac{f}{a}=\frac{9c^2y^2}{a^2(y+1)^2}-\frac{4}{a^2\lambda^2}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right]^2,$$

d'où, en réduisant au même dénominateur, remplaçant λ^2 par sa valeur tirée de (2)' et simplifiant, on a

$$2(ad^2+b^2f)(y+1)^3-12bcdy(y+1)^2-3acf(y+1)^2+27c^3y^2=0,$$

ou, en ordonnant,

$$2y^3(ad^2+b^2f-6bcd)+3y^2(2ad^2+2b^2f-acf+9c^3-8bcd)$$
$$+6y(ad^2+b^2f-acf-2bcd)+2(ad^2+b^2f)-3acf=0.$$

Telle est l'équation cherchée ; elle est du troisième degré ; il fallait s'y attendre puisque y ne peut prendre que trois valeurs, qui sont

$$\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)},\qquad \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)},\qquad \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)}.$$

Connaissant une valeur de y, l'équation (2)' donne pour λ deux valeurs égales et de signes contraires,

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{4b^2}{a^2}-\frac{6c}{a(y+1)}};$$

il suffit de prendre l'une de ces valeurs λ_1, car à chacune d'elles ne correspond qu'un seul système de valeurs pour u et u', donné par les équations (2), $u=\dfrac{-2b}{a}+\lambda_1,\qquad u'=\dfrac{-2b}{a}-\lambda_1$;

les équations (5) donnent aussi

$$v=\frac{3cy}{a(y+1)}-\frac{2}{a\lambda_1}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right],\qquad v'=\frac{3cy}{a(y+1)}+\frac{2}{a\lambda_1}\left[\frac{3bcy}{a(y+1)}-d\right].$$

α, β, γ, δ sont donc racines respectives des deux équations du second degré

$$M^2-Mu+v=0,\qquad N^2-Nu'+v'=0;$$

l'équation du quatrième degré est donc résolue et l'on voit que sa résolution a été ramenée à celle d'une équation du troisième degré, problème dont la solution est connue.

2. La condition pour que les quatre racines soient harmoniques est

$$2(\alpha\beta+\gamma\delta)=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}=\frac{1}{2}.$$

L'équation en y doit donc admettre une racine égale à $\frac{1}{2}$; en l'exprimant on trouve immédiatement la relation

$$ad^2+b^2f-2bcd+c^3-acf=0;$$

c'est la condition cherchée, elle s'écrit encore, comme on le vérifie aisément,

$$J=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & f \end{vmatrix}=0.$$

En remplaçant y par $\frac{1}{2}$ dans les valeurs de λ_1, u, u', v, v' précédemment trouvées, on a

$$\lambda_1=\frac{2}{a}\sqrt{b^2-ac}, \qquad u=-\frac{2}{a}[b-\sqrt{b^2-ac}], \qquad u'=-\frac{2}{a}[b+\sqrt{b^2-ac}],$$

$$v=\frac{c}{a}-\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\times\frac{bc-ad}{a}, \qquad v'=\frac{c}{a}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\times\frac{bc-ad}{a}.$$

α, β; γ, δ sont donc respectivement racines des deux équations du second degré

$$M^2+\frac{2}{a}[b-\sqrt{b^2-ac}]M+\frac{c}{a}-\frac{bc-ad}{a\sqrt{b^2-ac}}=0, \qquad N^2+\frac{2}{a}[b+\sqrt{b^2-ac}]N+\frac{c}{a}+\frac{bc-ad}{a\sqrt{b^2-ac}}=0.$$

On en tire immédiatement α, β, γ, δ.

3. Soit $\beta=\alpha$. Les trois racines de l'équation en y sont alors

$$y_1=\frac{\alpha^2+\gamma\delta}{2\alpha(\gamma+\delta)}, \qquad y_2=\frac{\alpha(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}, \qquad y_3=\frac{\alpha(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)}.$$

Donc dans ce cas l'équation en y a une racine double $y_2=y_3$.

En outre, il existe une relation entre cette racine double et la racine simple.

En effet, on a

$$\frac{1}{y_2}=\frac{\alpha^2+\gamma\delta+\alpha(\gamma+\delta)}{\alpha(\gamma+\delta)}=\frac{\alpha^2+\gamma\delta}{\alpha(\gamma+\delta)}+1=2y_1+1,$$

la relation est donc

$$(6) \qquad 2y_1y_2+y_2-1=0.$$

Dans le cas d'une racine triple, soit $\gamma=\beta=\alpha$,

alors

$$y_1=\frac{\alpha(\alpha+\delta)}{2\alpha(\alpha+\delta)}=y_2=y_3=\frac{1}{2}.$$

Donc, dans ce cas, l'équation en y a une racine triple, égale à $\frac{1}{2}$, c'est ce que montre la relation (6).

Enfin, dans le cas d'une racine quadruple, l'équation en y a encore une racine triple égale à $\frac{1}{2}$.

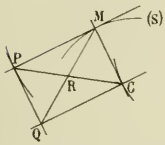
A. DARMON, à Paris.

Bonnes solutions de MM. L. Simon, section normale de Châlons; E.-N. Barisien; W. Mérigot, à Paris; G. Foccay, à Roanne; Ch. Gunge.

Assez bonnes solutions de MM. Bros; A. Malplat; X...

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1653. — *On considère une courbe quelconque* (S), *une de ses développantes* (P) *et sa développée* (*c*). *Soit* M *un point quelconque de* S *et* P *et* C *les points correspondants de* (*p*) *et de* (*c*). *On construit le rectangle* MPQC *de diagonales* MRQ *et* PRC *et l'on considère la courbe* (*r*) *lieu de* R *et la courbe* (*q*) *lieu de* Q :



1° *Montrer que la tangente en* R *à* (*r*) *est perpendiculaire à* MP.

En déduire les trajectoires orthogonales des courbes (*r*) *correspondant aux différentes développantes de* S ;

2° *Déterminer* (S) *pour que la tangente en* Q *à* (*q*) *soit* QC. *Trouver dans ces conditions toutes les courbes* (*r*) ;

3° *Revenant au cas général, calculer le rayon de courbure* ρ_1 *de* (*r*) *au point* R. *Rapprocher le résultat de ceux de la première partie.*

Déterminer (S) *pour que l'on ait, en posant* $\rho = \mathrm{MC}$,

$$\rho_1 = m\rho + n, \qquad m \text{ et } n \text{ étant des constantes.}$$

Cas de $m = 0$;

4° *Déterminer* S *pour que* PC *ait une longueur constante* α. *Montrer que dans ce cas* PC *a une direction fixe et réciproquement. Montrer également que dans ces conditions la relation entre* (S) *et* (*r*) *est réciproque. — Vérifier géométriquement ces résultats après avoir trouvé* (S).

1. Donnons-nous l'équation tangentielle polaire de la développante (P) :

$$(1) \qquad (\mathrm{P}) \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$

p étant une fonction de φ, déterminée à une constante près.

Nous aurons les équations des courbes (S), (*c*) et de la développée (γ) de la courbe (*c*) en dérivant successivement l'équation (1) :

$$(2) \qquad (\mathrm{S}) \quad -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0,$$

$$(3) \qquad (c) \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi + p'' = 0.$$

$$(4) \qquad (\gamma) \quad -x\sin\varphi + y\cos\varphi + p''' = 0.$$

Le point R est donné par l'intersection de deux droites équidistantes : l'une, de (1) et (3) ; l'autre de (2) et (4) :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p - p''}{2} = 0, \qquad -x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{p' - p'''}{2} = 0.$$

En dérivant la première équation et en tenant compte de la seconde, nous avons

$$x'\cos\varphi + y'\sin\varphi = 0.$$

La première droite est donc tangente au lieu de R.

La tangente à la courbe (*r*) est perpendiculaire à MP ; la seconde droite qui est la parallèle à MP menée par le point R sera normale à la courbe (*r*). Si nous supposons que le point P se déplace sur la droite MP, ce qui revient à envisager les diverses développantes, le point R décrit la parallèle à MP menée par R. Cette droite sera normale aux courbes (*r*) en tous ces points R : elle sera une trajectoire orthogonale. Les trajectoires orthogonales aux courbes (*r*) sont donc les droites parallèles aux tangentes correspondantes de (S).

2. Pour que la tangente au point Q à la courbe (*q*) soit la droite CQ, il faut que la courbe (*q*) soit confondue avec la courbe (γ), ou, ce qui revient au même, que la normale à cette courbe, qui a pour équation

$$(5) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p^{\mathrm{IV}} = 0$$

soit confondue avec la droite (1). On a donc

$$\frac{d^4 p}{d\varphi^4} = p.$$

L'équation caractéristique est $r^4 - 1 = 0$. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$p = A \operatorname{ch} \varphi + B \operatorname{sh} \varphi + A' \sin \varphi + B' \cos \varphi.$$

Le point M est à l'intersection des droites (2) et (3) :

$$x = -p' \sin \varphi - p'' \cos \varphi, \qquad y = p' \cos \varphi - p'' \sin \varphi.$$

On a donc les équations paramétriques de la courbe S :

$$x = -A'(\operatorname{sh} \varphi \sin \varphi + \operatorname{ch} \varphi \cos \varphi) - B(\operatorname{ch} \varphi \sin \varphi + \operatorname{sh} \varphi \cos \varphi) + B',$$
$$y = A(\operatorname{sh} \varphi \cos \varphi - \operatorname{ch} \varphi \sin \varphi) + B(\operatorname{ch} \varphi \cos \varphi - \operatorname{sh} \varphi \sin \varphi) + A'.$$

Le point R a pour coordonnées

$$x = -\frac{p' - p'''}{2} \sin \varphi + \frac{p - p''}{2} \cos \varphi = B', \qquad y = \frac{p' - p'''}{2} \cos \varphi + \frac{p - p''}{2} \sin \varphi = A'.$$

Le point R est donc dans ce cas un point fixe.

3. L'équation tangentielle polaire de (r) est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \frac{p - p''}{2} = 0.$$

Nous aurons la normale à la développée en dérivant deux fois :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + \frac{p'' - p^{\text{IV}}}{2} = 0.$$

Nous aurons donc le rayon de courbure à (r) en R :

$$\rho_1 = \frac{p - p^{\text{IV}}}{2}.$$

Nous vérifions sur cette formule le parallélisme des courbes (r) obtenues en considérant les diverses développantes de S, c'est-à-dire en ajoutant à p une constante. Le rayon de courbure est en effet augmenté de la moitié de cette constante, le centre de courbure restant fixe.

La distance $MC = \varphi$ est la distance des deux droites (2) et (4) :

$$\varphi = p' + p'''.$$

Nous aurons donc l'équation différentielle

$$p - p^{\text{IV}} = 2m(p' + p''') + 2n.$$

Si $m = 0$, cette équation se réduit à

$$p - p^{\text{IV}} = 2n,$$

équation déjà intégrée sans second membre. On retrouve toutes les courbes trouvées dans la deuxième partie.

4. On a

$$\overline{PC}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MC}^2 = a^2.$$

Nous aurons donc à résoudre l'équation différentielle

$$(p + p'')^2 + (p' + p''')^2 = a^2.$$

En posant $p + p'' = u$, cette équation devient $u^2 + u'^2 = a^2$, $d\varphi = \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$;

donc on a $\qquad \varphi - \varphi_0 = \text{arc} \sin \dfrac{u}{a}, \qquad$ ou bien $\qquad u = a \sin(\varphi - \varphi_0).$

On est donc ramené à intégrer l'équation

$$p + p'' = a \sin(\varphi - \varphi_0).$$

On tire de cette équation

$$p = A \cos \varphi + B \sin \varphi - a \frac{\varphi}{2} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Les courbes (S) sont ainsi déterminées.

Si nous désignons par α l'angle que fait PC avec Ox et par ω l'angle que fait cette droite avec PM, nous aurons

$$\alpha = \omega + \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

La droite PC aura donc une direction fixe si $\omega + \varphi$ est constant.

Or on a

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{MC}{MP} = \frac{p' + p'''}{p + p''} = \frac{u'}{u} = \cot(\varphi - \varphi_0).$$

On déduit de cette égalité

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \varphi_0 - \varphi, \qquad \text{d'où} \qquad \omega + \varphi = C^{te}.$$

Réciproquement, supposons que PC ait une direction fixe; $\omega + \varphi$ est constant et posons

$$\omega + \varphi = \beta, \qquad \text{d'où} \qquad \omega = \beta - \varphi.$$

Or, on a trouvé

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{p' + p'''}{p + p''} = \frac{u'}{u},$$

on a donc la relation

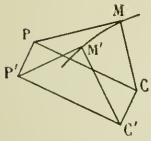
$$\operatorname{tg}(\beta - \varphi)d\varphi = \frac{du}{u}.$$

En intégrant cette équation différentielle, nous aurons

$$L\lambda \cos(\beta - \varphi) = Lu, \qquad \text{ou} \qquad u = \lambda \cos(\beta - \varphi), \qquad \text{puis} \qquad u' = \lambda \sin(\beta - \varphi).$$

On a donc $u^2 + u'^2 = \lambda^2 = \overline{PC}^2$. On voit que PC est constant.

PC étant constant en grandeur et direction, la courbe (c) se déduit de la courbe (p) par la translation PC et la courbe (r) s'en déduit par une translation moitié. La courbe (S) est donc à la fois la développante et la développée de la courbe (r). Il y a donc réciprocité entre ces deux courbes.



On peut vérifier géométriquement que si PC est constant en grandeur, il l'est aussi en direction. Considérons un point P′ infiniment voisin de P, auquel correspond un point C′ voisin de C. On a $P'C' = PC$ et de plus PP′ et CC′ sont parallèles; donc la figure PCC′P′ est un parallélogramme. Par suite PC a une direction fixe.

Réciproquement, si PC est constant en direction, il l'est aussi en grandeur. P′C′ est parallèle à PC, PP′ est parallèle à CC′; donc $PC = P'C'$.

R. BEDOIN, élève au lycée Louis-le-Grand.

Bonne solution de M. Constandaki.

1663. — *On considère la courbe gauche donnée par les équations*

$$x = \lambda^4, \qquad y = \lambda^3 + 3\lambda^2, \qquad z = \lambda^2 + 4\lambda.$$

1° *Former la relation qui existe entre les λ des points d'intersection avec un plan, en déduire l'équation qui donne les λ des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus et démontrer que ces points sont dans un même plan.*

2° *Former les relations qui lient les λ des points qui appartiennent à une sécante triple.*

3° *Montrer que les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe par un point* M *de cette courbe et qui n'ont pas leur point de contact en* M *sont sur une même droite* D.

4° *Trouver l'équation du plan* MD *et l'enveloppe de ce plan lorsque* M *décrit la courbe.*

1. Un plan quelconque, $Ax + By + Cz + D = 0$, coupe la courbe considérée en quatre points dont les λ sont racines de l'équation

$$A\lambda^4 + B(\lambda^3 + 3\lambda^2) + C(\lambda^2 + 4\lambda) + D = 0,$$

ou

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + (3B + C)\lambda^2 + 4C\lambda + D = 0.$$

Soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les racines de cette équation : les relations entre les coefficients et les racines nous donnent

$$\Sigma\lambda_1 = -\frac{B}{A}, \qquad \Sigma\lambda_1\lambda_2 = \frac{3B+C}{A}, \qquad \Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{4C}{A}, \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \frac{D}{A}.$$

Si nous éliminons les trois quantités $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ et $\frac{D}{A}$ entre ces trois équations, nous obtiendrons une relation entre λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, indépendante du plan choisi. Pour faire cette élimination, il suffit de remplacer dans la seconde relation $\frac{B}{A}$ par $-\Sigma\lambda_1$ et $\frac{C}{A}$ par $-\frac{1}{4}\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3$; on obtient ainsi facilement

$$(1) \qquad \Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4\Sigma\lambda_1\lambda_2 + 12\Sigma\lambda_1 = 0.$$

Donc, si quatre points de la courbe sont dans un même plan, leurs λ vérifient la relation (1).

Réciproquement, si les λ de quatre points vérifient la relation (1), je dis que ces quatre points sont dans un même plan.

Pour le démontrer, ordonnons la relation (1) par rapport à λ_1 et posons, pour simplifier l'écriture,

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad S_2 = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \qquad S_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 ;$$

nous obtenons

$$(1)' \qquad \lambda_1(S_2 + 4S_1 + 12) + S_3 + 4S_2 + 12S_1 = 0.$$

Nous supposons que cette relation est vérifiée par les λ de quatre points de la courbe. Considérons le plan passant par les trois points λ_1, λ_2, λ_3 ; ce plan rencontre la courbe en un quatrième point λ'_4, et l'on a d'après ce qui précède

$$(2) \qquad \lambda'_4(S_2 + 4S_1 + 12) + S_3 + 4S_2 + 12S_1 = 0.$$

Retranchons les relations (1)' et (2), nous obtenons

$$(\lambda_4 - \lambda'_4)(S_2 + 4S_1 + 12) = 0.$$

1° Si $S_2 + 4S_1 + 12 \neq 0$, on a $\lambda'_4 = \lambda_4$ et nous voyons ainsi que les quatre points λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 sont dans un même plan.

2° Si $S_2 + 4S_1 + 12 = 0$, la relation (2) nous donne $S_3 + 4S_2 + 12S_1 = 0$, et par suite, cette relation est vérifiée quel que soit λ'_4. On en conclut que le quatrième point de rencontre de la courbe et du plan passant par les points λ_1, λ_2, λ_3 est indéterminé. Ceci ne peut avoir lieu que si le plan est lui-même indéterminé, ou si les trois points λ_1, λ_2, λ_3 sont en ligne droite.

Dans ce cas encore les points λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont dans un même plan.

L'équation qui donne les λ des points où le plan osculateur est stationnaire se déduit immédiatement de l'équation (1) en remplaçant λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 par λ. On obtient ainsi

$$\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 12) = 0.$$

Il existe donc quatre points stationnaires : l'origine, deux points imaginaires conjugués et le point qui correspond à $\lambda = \infty$.

On aura l'équation du plan de ces quatre points en écrivant que le polynome

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + (3B + C)\lambda^2 + 4C\lambda + D$$

s'abaisse au troisième degré et est divisible par $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda$; on trouve ainsi $A = 0$, $D = 0$, $B = 3C$. Par suite l'équation du plan est $y + 3z = 0$.

2. Nous avons trouvé précédemment que pour que trois points λ_1, λ_2, λ_3 de la courbe soient en ligne droite, il faut qu'on ait les deux conditions

$$(3) \qquad S_2 + 4S_1 + 12 = 0, \qquad S_3 + 4S_2 + 12S_1 = 0.$$

3. Soit λ le point de contact d'un plan osculateur mené par un point μ de la courbe. Nous obtiendrons la relation qui relie λ et μ en remplaçant dans l'équation (1) λ_1, λ_2, λ_3 par λ et λ_4 par μ. Nous

trouvons ainsi

$$(4) \qquad \lambda^3 + 3(\mu + 4)\lambda^2 + 12(\mu + 3)\lambda + 12\mu = 0.$$

Il existe donc trois valeurs de λ correspondant à une valeur de μ, et par suite trois points de contact. Pour montrer que ces points sont en ligne droite, il suffit de vérifier que les racines de cette équation satisfont aux relations (3). Ceci ne présente aucune difficulté, puisqu'on a

$$S_1 = -3(\mu + 4), \qquad S_2 = 12(\mu + 3), \qquad S_3 = -12\mu.$$

4. Soit $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan MD. Nous allons déterminer A, B, C, D en écrivant que ce plan rencontre la courbe d'abord au point μ, puis aux trois points dont les λ vérifient l'équation (4).

Nous devons avoir l'identité

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + (3B + C)\lambda^2 + 4C\lambda + D \equiv A(\lambda - \mu)[\lambda^3 + 3(\mu + 4)\lambda^2 + 12(\mu + 3)\lambda + 12\mu].$$

Nous en tirons

$$B = 2A(\mu + 6), \qquad C = -3A\mu(\mu + 2), \qquad D = -12A\mu^2.$$

Par suite, l'équation du plan MD est

$$x + 2(\mu + 6)y - 3\mu(\mu + 2)z - 12\mu^2 = 0\,;$$

elle est du deuxième degré par rapport à μ, et en l'ordonnant elle s'écrit

$$3(z + 4)\mu^2 - 2(y - 6z)\mu - (x + 12y) = 0.$$

On aura l'équation de l'enveloppe en écrivant que cette équation en μ a une racine double, ce qui donne

$$(y - 6z)^2 + 12(z + 4)(x + 12y) = 0.$$

Cette équation représente un cône du deuxième degré tangent aux deux plans $z + 4 = 0$, $x + 12y = 0$, les génératrices de contact étant situées dans le plan $y - 6z = 0$.

BROS.

Bonnes solutions par MM. P. Albertini, à Nice; J. D. Dufaut, à Poitiers; G. Foucry, à Roanne; Victor Grand, à Marseille; L. Sire.

MÉCANIQUE

1654. — *On considère une cycloïde située dans un plan vertical, de base horizontale, concave vers le bas.*

1° *Étudier le mouvement sur la cycloïde d'un point matériel pesant abandonné sur elle en* M_0 *sans vitesse initiale.*

2° *Trouver le point en lequel le point matériel quitte la cycloïde.*

3° *Il décrit alors, pesant et libre, une parabole. Le point* M_0 *variant, construire le lieu du sommet de cette parabole et évaluer l'aire comprise entre ce lieu et la cycloïde.*

4° *Lieu du foyer de cette parabole.*

Prenons la cycloïde sous la forme ordinaire

$$x = R(\varphi - \sin\varphi). \qquad y = R(1 - \cos\varphi).$$

Rectifions-la d'abord. On peut écrire

$$dx = R(1 - \cos\varphi)d\varphi, \qquad dy = R\sin\varphi d\varphi,$$

d'où on tire

$$ds^2 = 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2.$$

Prenons pour origine des arcs le sommet A de la cycloïde et pour sens positif, le sens de A vers O, en supposant le point M_0 compris entre A et O.

Nous aurons $$ds = -2R \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \qquad \text{et} \qquad s = 4R \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Appelons z la distance MP' d'un point M de la cycloïde à la tangente au sommet A, de telle manière qu'on ait $y + z = 2R$; on voit que $z = R(1 + \cos\varphi) = 2R\cos^2\frac{\varphi}{2}$, d'où on tire la relation classique, qui nous sera utile, $s^2 = 8Rz$.

Faisons la remarque que l'angle de la direction de la pesanteur avec la normale dirigée vers le centre de courbure est $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, que le rayon de courbure est $\rho = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$. Ces formules nous seront aussi utiles. Les équations intrinsèques du mouvement d'un point matériel uniquement pesant, assujetti à se mouvoir sans frottement sur la cycloïde, sont

$$\frac{dmv^2}{2} = -mg\,dy, \qquad \frac{mv^2}{\rho} = N + mg\sin\frac{\varphi}{2},$$

N étant la réaction normale de la cycloïde sur le point matériel. La première de ces équations donnera le mouvement du point; la seconde la réaction. Le point matériel quittera la courbe, quand cette réaction, cessant d'être dirigée vers la normale extérieure, s'annulera.

1° Occupons-nous d'abord du mouvement du point sur la cycloïde. La première équation, intégrée une première fois, donne $v^2 + 2g(y - y_0) = 0$, ou bien, en substituant z à y, puis s à z,

$$v^2 + 2g(z_0 - z) = 0 \qquad \text{et} \qquad v^2 + \frac{g}{4R}(s_0^2 - s^2) = 0.$$

On tire de là

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4R}(s^2 - s_0^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{ds}{\sqrt{s^2 - s_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{4R}}\,dt,$$

ou encore

$$\frac{d\frac{s}{s_0}}{\sqrt{\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{g}{4R}}\,dt.$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$L\left(\frac{s}{s_0} + \sqrt{\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 - 1}\right) = \sqrt{\frac{g}{4R}}\,t,$$

relation équivalente à la suivante :

$$\frac{s}{s_0} + \sqrt{\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 - 1} = e^{\sqrt{\frac{g}{4R}}\,t} \quad \text{à laquelle on peut adjoindre} \quad \frac{s}{s_0} - \sqrt{\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 - 1} = e^{-\sqrt{\frac{g}{4R}}\,t},$$

d'où, par addition,

$$s = s_0 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{g}{4R}}\,t.$$

Il est intéressant de faire remarquer que ce calcul est parallèle à celui qui est classique en mécanique, qui est relatif au mouvement d'un point pesant sur une cycloïde concave vers le haut, et qui prouve le tautochronisme du mouvement.

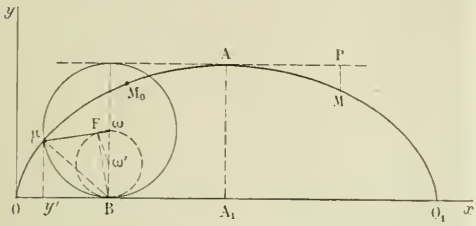
2° Calculons la réaction

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - mg\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2mg(y_0 - y)}{4R\sin\frac{\varphi}{2}} - mg\sin\frac{\varphi}{2} = mg\left[y_0 - y - 2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\right],$$

$$N = mg(y_0 - 2y).$$

Le point où le point matériel quitte la cycloïde a donc une ordonnée moitié de celle du point initial.

3° et 4°. — Après avoir quitté la cycloïde en μ, le point matériel, pesant et libre, décrit une parabole. Mais en μ, les éléments cinématiques des mouvements sont les mêmes (vitesse et accélération). En particulier, l'accélération normale est la même en μ, que le point soit sur la cycloïde ou sur la parabole. La parabole est donc osculatrice à la cycloïde ; en plus, on sait qu'elle est à axe vertical. En toute rigueur, dans le problème actuel, il ne faudrait prendre que les paraboles osculatrices dont le point d'osculation a un y compris entre 0 et R. Mais nous les considérerons toutes.



La méthode la plus simple pour traiter ces deux questions est de commencer par le lieu des foyers. Rappelons qu'en un point μ d'une parabole de foyer F, on obtient le centre de courbure de la manière suivante : on joint μF, on mène en F la perpendiculaire FB à cette droite qui coupe la normale en B. Le point B est le milieu du segment μC, C étant le centre de courbure.

Figurons le point μ de la cycloïde, le cercle générateur ω dans la position correspondante ; il touche la base Ox en B. Le centre de courbure en μ de la cycloïde s'obtient en prolongeant μB d'une longueur égale à elle-même, vers le bas. Le foyer de la parabole osculatrice en μ et d'axe vertical, s'obtient donc en projetant le point B sur le rayon vecteur qui est évidemment le rayon $\mu\omega$. Soit F le point ainsi obtenu.

Cherchons le lieu de ce point. Pour cela, décrivons un cercle sur Bω comme diamètre, de centre ω'. Avec les notations employées au début de cette solution, l'angle B$\omega\mu$ est égal à φ. De là, on tire presque immédiatement que l'arc BωF sur le cercle de centre ω' est égal à $\pi R - R\varphi$, c'est-à-dire, en appelant A_1 la projection du sommet A de la cycloïde sur la base,

$$\text{arc } B\omega F = OA_1 - OB = BA_1.$$

Il en résulte que le lieu de F est la cycloïde dont la base est Ox et dont deux rebroussements consécutifs seraient O et A_1.

Nous allons maintenant nous occuper du lieu du sommet de la parabole. C'est évidemment une courbe rencontrant la cycloïde donnée en O, en A et en O_1. De plus, cette courbe est tout entière intérieure à la cycloïde, car le point matériel quittant la cycloïde reste au-dessous de la cycloïde et décrit une branche de parabole qui ne contient pas le sommet. Comme il y a osculation entre les deux courbes, le sommet de la parabole est bien intérieur à la cycloïde.

L'abscisse de ce sommet est la même que celle du foyer. L'ordonnée pourrait s'obtenir facilement en remarquant qu'elle est la demi-somme entre celle du point μ et celle du point où la tangente en μ à la cycloïde coupe l'axe de la parabole. Plus simplement, rappelons que si un point matériel est uniquement soumis à son poids, il décrit une parabole dont la directrice passe par le point le plus haut que pourrait atteindre le point matériel lancé verticalement de sa position initiale avec sa vitesse initiale.

Il en résulte que la directrice de la parabole est ici la parallèle à Ox menée par M_0. Connaissant l'ordonnée du foyer et celle de la directrice, celle du sommet est immédiate.

Les coordonnées du foyer sont

$$x = \frac{R}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{R}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

L'ordonnée du point M_0 est $2R(1 - \cos\varphi)$.

Donc les coordonnées du sommet sont

$$x = \frac{R}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad y = \frac{R}{2}(1 - \cos\varphi)(3 + \cos\varphi).$$

Nous n'insisterons pas sur la forme de cette courbe qui se trouve immédiatement. Elle touche la cycloïde en O, en A, en O_1 et reste toujours à son intérieur.

Cherchons l'aire comprise entre ces deux courbes. Pour cela, prenons la différence des aires comprises entre chacune d'elles et l'axe des x.

Pour la cycloïde, cette aire est bien connue. C'est $3\pi R^2$, nous ne referons pas l'intégration.

Pour le lieu des sommets, cette aire est

$$\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\varphi)(3 + \cos\varphi)(1 - \cos 2\varphi)d\varphi,$$

qui s'écrit encore

$$\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}(3 - 2\cos\varphi - \cos^2\varphi)(1 - \cos 2\varphi)d\varphi = \frac{R^2}{4}\int_0^{2\pi}(5 - 4\cos\varphi - \cos 2\varphi)(1 - \cos 2\varphi)d\varphi.$$

Considérons la fonction sous le signe $\int$. Elle s'écrit

$$5 - 4\cos\varphi - \cos 2\varphi - 5\cos 2\varphi + 4\cos\varphi\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi,$$

ou encore

$$5 - 4\cos\varphi - 6\cos 2\varphi + 2(\cos 3\varphi + \cos\varphi) + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}$$

ou

$$\frac{11}{2} - 2\cos\varphi - 6\cos 2\varphi + 2\cos 3\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2}.$$

Tous les termes qui suivent le premier donnent, intégrés, des sinus de l'angle φ et de ses multiples dont la différence des valeurs pour 0 et 2π est nulle.

L'intégrale est donc $\frac{11\pi R^2}{4}$. L'aire demandée est par suite $\frac{\pi R^2}{4}$.

Bonne solution de M. Bros, à Albi.
Assez bonne solution de M. G. Garbe.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1908)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

6256. — Connaissant les restes de la division du polynome $f(x)$ par $x - a$, $x - b$, $x - c$, calculer le reste de la division du même polynome par le produit $(x - a)(x - b)(x - c)$.

6257. — Le polynome $(x + y)^m - x^m - y^m$ est-il divisible par $x^2 + xy + y^2$?

6258. — Si m, n, p sont des nombres entiers positifs $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ est divisible par $x^2 + x + 1$.

6259. — Le polynome $(1 - x^n)(1 + x) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)^2$ est divisible par $(1 - x)^3$.

6260. — Plus grand commun diviseur entre $x^m - 1$ et $x^p - 1$.

6261. — Multiplication de deux déterminants de degrés différents.

6262. — Discuter les systèmes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, & bz - cy &= p, & ax + by + cz &= 0, & ax + by + cz + dt &= f, \\ a'x + b'y + c'z &= d', & cx - az &= q, & a'x + b'y + c'z &= 0, & a'x + b'y + c'z + d't &= f', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', & ay - bx &= r, & a''x + b''y + c''z &= 0, & a''x + b''y + c''z + d''t &= f''. \end{aligned}$$

6263. — On divise la suite des nombres impairs en groupes contenant le premier un nombre, le deuxième deux nombres, le troisième trois nombres, etc. Trouver la somme des nombres du n^e groupe.

6264. — Étudier les séries dont les termes généraux sont

$$n(n-1)x^n, \quad \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}, \quad \frac{1}{n^2(\mathrm{Ln}\,n)^5}, \quad n - \sqrt{n^2 - 1}, \quad e^{-(\mathrm{Ln}\,n)^2}, \quad (-1)^n\frac{\mathrm{Ln}\,n}{n}, \quad \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2},$$

$$\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}, \quad \frac{1}{(\mathrm{Ln}\,n)^p}, \quad \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{1 + n(n+1)} \text{ (calculer la somme)}, \quad \frac{1}{n^n}\left(\text{valeur à } \frac{1}{1000} \text{ près}\right),$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ (somme)}.$$

6265. — Soient $u_1, u_2, u_3, \ldots$ les aires des boucles de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$; montrer que la série $u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + \ldots$ est convergente.

6266. — On donne une série positive convergente $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, et une suite de nombres positifs non décroissants $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tels que a_n soit infini pour n infini. Montrer que $\frac{a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n}{a_n}$ a pour limite zéro pour n infini.

6267. — En posant $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{L}(n+1)$, montrer que $v_n = u_n - u_{n-1}$ est le terme général d'une série convergente.

6268. — Pour n infini $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{L}n$ a une limite.

6269. — On pose $u_n = \sum_1^n \mathrm{L}n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}n + n$ et $v_n = u_{n-1} - u_n$. Montrer que la série v_n est convergente. En déduire que u_n a une limite. On considère e^{u_n} qui a aussi une limite. Peut-on en déduire un procédé de calcul approché de $n!$ pour n très grand ?

6270. — Soit a un nombre positif et u_0 un nombre quelconque tel que $u_0 + a > 0$. On pose $u_1 = \sqrt{u_0 + a}$, $u_2 = \sqrt{u_1 + a}$, $\ldots$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} + a}$. Démontrer que u_n a une limite quand n augmente indéfiniment et calculer cette limite.

6271. — Dérivées des fonctions arc sin (th x) et 2 arc tg e^x. Comparer les résultats et les expliquer.

6272. — Calculer la différentielle totale de la fonction

$$\arccos \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \arccos \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} + \arccos \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}.$$

6273. — Dérivée de la fonction implicite y définie par la relation $\sin(x^2 + y^2) - x^2 + y^2)\mathrm{L}(x^2 + y^2) + a = 0$.

6274. — Etudier les variations des fonctions :

$$x^m \mathrm{L}x, \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \mathrm{L}(x^2 - 3x + 2), \qquad \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x.$$

6275. — Minimum de $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, sachant que $x + y$ est constant.

6276. — Etudier les racines de l'équation $\frac{\mathrm{L}x}{x} - \frac{\mathrm{L}a}{a} = 0$. $\left(\text{On étudiera les variations de la fonction } \frac{\mathrm{L}x}{x}\right)$.

6277. — Développer en série entière les fonctions :

$$\mathrm{L}(x^2 - 3x + 2), \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad \operatorname{ch} x \cos x, \qquad \operatorname{ch} x \sin x, \qquad e^x \sin x.$$

6278. — On considère la série entière dont le terme général est $\frac{x^n}{n^2}$. Mettre la somme de cette série sous forme d'une intégrale définie. Même question pour la série $\frac{x^n}{n(n-1)}$.

6279. — Si x est compris entre 0 et 1, on a $\frac{1 + x}{1 - x} > e^{2x}$.

6280. — Si $x > 1$, on a $\frac{e^x}{x} > e$.

6281. — Comment faut-il choisir x pour avoir à $\frac{1}{100}$ près $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$?

6282. — Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $x < \frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \sin x$.

6283. — Etablir la formule

$$2[f(a - h) - f(a)] - h[f'(a) + f'(a + h)] = -\frac{h^3}{3!} f''(a + \theta h).$$

6284. — On considère la relation $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$. Quelle doit être la fonction $f(x)$ pour que θ soit indépendant de x ?

6285. — Trouver pour $x = 0$ les limites des fonctions :

$$\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}, \qquad \mathrm{L}(1 + x) \cdot e^{\frac{1}{\sin x}}, \qquad \sin x \, e^{\frac{1}{1 - \cos}}, \qquad \frac{\operatorname{tg} \pi x - \pi x}{x^2 \operatorname{tg} \pi x}.$$

$$x^m \log_a x, \qquad (\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}, \qquad x^{\frac{1}{x}}, \qquad \sin x \, e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}}, \qquad \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}, \qquad (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

6286. — Trouver pour $x = \frac{\pi}{2}$ les limites des fonctions :

$$\frac{L(1-\sin x)}{\operatorname{tg} x}, \qquad e^{\frac{1}{\cos x}} L\frac{2x}{\pi}, \qquad \operatorname{tg} x\, e^{\frac{1}{\cos x}}, \qquad (1-\sin x)e^{\operatorname{tg} x}, \qquad \cos x\, e^{\operatorname{tg} x}.$$

6287. — Trouver pour m infini les limites des fonctions :

$$\left(\cos\frac{a}{m} + x\sin\frac{a}{m}\right)^m, \qquad \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^m, \qquad \left(\frac{m^2+mx+1}{m^2-my+3}\right)^m, \qquad \left(\frac{m^k+am^{k-1}+bm^{k-2}+\dots}{m^k+a'm^{k-1}+b'm^{k-2}+\dots}\right)^m, \qquad m\sin\frac{30^\circ}{m}.$$

6288. — Limites des fonctions :

$$\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} \quad \text{pour } x=a, \qquad (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} \quad \text{pour } x=\frac{\pi}{4}, \qquad (x-1)e^{\frac{1}{L x}} \quad \text{pour } x=1, \qquad x-\sqrt{x^2+x}$$

pour x infini, $x - L\operatorname{ch} x$ pour x infini.

6289. — Déterminer p de façon que le rapport $\dfrac{L\frac{1+x}{1-x} - 2 + 2\cos x}{\sin^p x}$ ait une limite différente de zéro pour $x=0$.

6290. — Limite de $\left(\dfrac{m+x}{m-y}\right)^m$ pour m infini. En calculant cette limite de deux manières différentes, montrer que $e^x . e^y = e^{x+y}$.

6291. — Calculer $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a+2b) + \dots + \operatorname{sh}[a+(n-1)b]$.

6292. — Étudier les fonctions inverses des fonctions hyperboliques.

6293. — Calculer $\operatorname{sh}\frac{x}{3}$ connaissant $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

6294. — Résoudre les équations $\cos z = \cos a$, $\sin z = \sin a$, z et a étant imaginaires.

6295. — On donne deux nombres imaginaires qui sont les affixes de deux points A et B. Trouver l'imaginaire qui représente le troisième sommet du triangle équilatéral construit sur AB.

6296. — Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ les affixes de six points A, B, M, A', B', M'. Quelle est la signification géométrique de l'égalité $\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \dfrac{\gamma'-\beta'}{\gamma'-\alpha'}$?

6297. — Étudier les équations :

$$9x^8 - 7x^7 - 14x^4 + 12x^3 + 6x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{(racines commensurables)},$$

$$x^4 - 13x - 42 = 0, \qquad 4x^4 + x^3 - 1 = 0, \qquad 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \qquad x^6 - x^5 - x^4 - 2 = 0,$$

$$x^3 - 6x^2 + 18x - 27 = 0, \qquad 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0, \qquad x^m - p(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) = 0,$$

$$x^8 + ax^4 + b = 0 \quad \text{(formules de Newton)}, \qquad x^{12} + ax^6 + b = 0 \quad \text{(id.)}$$

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} - 1 = 0, \qquad 2(x^2-x-1)^4 - x^2 + x = 0,$$

$$\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{2t} = \frac{m}{1+t^2}, \qquad \sqrt{41+x} + \sqrt{41-x} = 4, \qquad x^4 + mx^3 - mx + 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + 3ax + 1 = 0, \qquad \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3a\cos x + 1 = 0, \qquad \operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch}^2 x + 3a\operatorname{ch} x - 1 = 0.$$

6298. — Résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x+b} + \dfrac{1}{x+c} + \dfrac{1}{x+d} = 0$ sachant que les nombres $0, a, b, c, d$ sont les termes consécutifs d'une progression arithmétique.

6299. — Étudier les équations

$$\cos x + L\sin x - 1 = 0, \qquad \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1+x^2} = m, \qquad xL(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} = 0,$$

$$Lx - x^2 = 0, \qquad (x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0, \qquad \cos x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x = 0,$$

$$x^4 + 2\cos x - 2 = 0, \qquad \int_0^{x} \frac{\sqrt{x^2+1} - 2x}{x+1}\,dx = a.$$

6300. — Étudier les systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x+y^2} = \dfrac{121}{13}, \\ x+y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 = x, \\ z^2 + x^2 = y, \\ x^2 + y^2 = z. \end{cases}$$

6301. — Former l'équation du troisième degré qui a pour racines 3, $1+i$ et $1-i$. Variations du premier membre.

6302. — Soit α une racine simple de $f(x)$ qui annule $f''(x)$. Montrer qu'il existe une relation entre α et les autres racines.

6303. — Condition pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ait une racine double.

6304. — On considère l'équation $x^2 + ax + b = 0$, où a et b sont les coordonnées d'un point M du plan. Où doit être ce point pour que l'équation ait trois racines supérieures à 1 ? Où doit-il être pour que l'équation ait deux racines supérieures à 1 ?

6305. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3+px+q=0$; calculer les fonctions symétriques
$$(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \quad \text{et} \quad (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

6306. — Former le résultant des deux équations $x^4+px+q=0$, $x^4+p'x+q'=0$.

6307. — Soit $f(x)$ un polynome qui a toutes les racines réelles et distinctes. Démontrer que l'équation $ff''-f'^2=0$ n'a aucune racine réelle.

6308. — Soit a une racine réelle de l'équation $x^3+px+q=0$; exprimer que les deux autres racines sont aussi réelles. Déduire de là la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ait ses trois racines réelles.

6309. — Déterminer a et b de façon que l'équation $4x^4+4x^3-11x^2+ax+b=0$ admette la racine double 1 ; puis discuter les variations du premier membre.

6310. — Etant donnée l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, p, q, r désignant des nombres réels ou imaginaires, quelles relations doit-il exister entre p et q, pour que les points qui ont pour affixes les racines de l'équation soient les sommets d'un triangle équilatéral : 1° ayant son centre à l'origine, 2° ayant son centre en un point quelconque ?

6311. — Soit $f(x)=0$ une équation de degré m dont toutes les racines sont réelles. Soient a et b deux racines consécutives de cette équation ; entre ces deux racines il existe une seule racine α de la dérivée. Démontrer que cette racine α est comprise dans l'intervalle $\left(\dfrac{a+(m-1)b}{m}, \dfrac{b+(m-1)a}{m}\right)$.

6312. — Soit $\varphi(x)$ une fonction continue telle que la dérivée $\varphi'(x)$ soit inférieure à un nombre fixe k plus petit que 1. Montrer que l'équation $x=\varphi(x)$ a une seule racine. x_0 étant un nombre quelconque, on pose successivement
$$x_1=\varphi(x_0), \quad x_2=\varphi(x_1), \ldots \quad x_n=\varphi(x_{n-1}) \ldots$$
démontrer que pour n infini x_n a pour limite la racine. Appliquer à l'équation de Képler $u-e\sin u=nt$.

6313. — Condition pour que les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation du quatrième degré $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ vérifient la relation $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.

6314. — Eliminer x entre les équations $x^4+px^2+qx+r=0$, $x^3+ax+b=0$.

6315. — Eliminer x entre les équations $x^3+px+q=0$, $x^2+ax+b=0$.

6316. — Calculer la raison d'une progression arithmétique connaissant la somme de cinq termes consécutifs et la somme de leurs cinquièmes puissances.

6317. — Déterminer a, b, c pour que les racines de l'équation x^3+ax^2+bx+c soient a, b, c.

6318. — Combien l'équation $x^4-x+1=0$ a-t-elle de racines comprises entre -3 et $+3$?

6319. — Trouver le produit des carrés des différences des racines de l'équation $x^4+px+q=0$.

6320. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3+1=0$. Former l'équation admettant pour racines les quantités de la forme $y=\dfrac{(a+b)(a+c)}{(b-c)^2}$.

6321. — Montrer qu'on peut toujours déterminer p, q, α, β de façon que le polynome $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$ puisse se mettre sous la forme $p(x+\alpha)^3+q(x+\beta)^3$.

6322. — A quelles conditions le polynome $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$ peut-il se mettre sous la forme
$$p(x+\alpha)^4+q(x+\beta)^4 ?$$
Interprétation géométrique du résultat.

6323. — Eliminer x et y entre les équations $x^4+y^4=a$, $x^3-y^3=b$, $x^2+y^2=c$.

6324. — Condition pour que l'équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ait deux racines doubles.

6325. — Résoudre l'équation $x^4-4x^3+4x^2-12x+3=0$ sachant que le produit de deux racines est égal à 1. Etudier la variation du premier membre.

6326. — Quelle relation doit-il exister entre les coefficients d'une équation du troisième degré $x^3+ax^2+bx+c=0$ pour que les racines soient en progression arithmétique ?

6327. — Soient α, β, γ les racines de l'équation $x^3+ax^2+bx+c=0$. Former l'équation ayant pour racines
$$\alpha+\frac{1}{\alpha}, \quad \beta+\frac{1}{\beta}, \quad \gamma+\frac{1}{\gamma}.$$

6328. — Former les équations du deuxième degré telles que si t est racine, $\dfrac{1+t}{1-t}$ soit aussi racine.

6329. — Former une équation réciproque du sixième degré sachant que si elle admet la racine a, elle admet aussi la racine $1-a$.

6330. — Calculer un arc de cercle inférieur à une demi-circonférence, connaissant la longueur de la corde et la distance du milieu de l'arc au milieu de la corde. Discuter.

6331. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3+px+q=0$. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

6332. — Montrer que l'équation $x^5-209x+56=0$ a deux racines dont le produit est égal à 1.

6333. — Condition pour que l'équation $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ ait deux racines dont la somme soit égale à α.

6334. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{(x-p)(x-q)}{\left(x-\frac{p+q}{2}\right)^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x^4+1}, \quad \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1},$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}, \quad \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}, \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{x^2+x+1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4},$$

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}, \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

6335. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}, \quad \int \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-a^2}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+px+q}}, \quad \int_{-a}^{-a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx,$$

$$\int \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-1}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x+1+2\sqrt{x(x-1)}}, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$$

6336. — Etant donnée la relation $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$, trouver la relation qui existe entre x et y.

6337. — Même question pour $\int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}$ $(a < b)$.

6338. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}, \quad \int \frac{dx}{\cos x - \cos a}, \quad \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}, \quad \int \frac{dx}{\cos 2x}, \quad \int \frac{dx}{1+\sin x},$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}, \quad \int \frac{\cos x\,dx}{1+\operatorname{tg} x}, \quad \int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1-\operatorname{cotg} x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x + \cos 2x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^4\varphi + b^2\sin^4\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin x\,dx}{(\cos^8 x + \sin^8 x)^2},$$

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{(\sin x - \cos x)^3}\,dx, \quad \int \frac{\sin x + 3\cos x}{4\sin x + 2\cos x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx, \quad \int_0^x \operatorname{tg}^n x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

$$\int \sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1+\sin\varphi},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \quad \int (ax^2+bx+c)e^{-x}\,dx, \quad \int x^n \operatorname{arc\,tg} x\,dx, \quad \int e^x \cos x\,dx, \quad \int e^x \sin x\,dx,$$

$$\int \cos x \operatorname{ch} x\,dx, \quad \int \frac{L(1-x)}{x^2}\,dx, \quad \int x^2 \operatorname{ch} x\,dx, \quad \int (Lx)^n\,dx, \quad \int L\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}\,dx,$$

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\frac{m-x}{m+x}\,dx, \quad \int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx, \quad \int_0^1 L\frac{m+x}{m-x}\,dx, \quad \int_0^1 f[tx+a(1-x)]\,dx.$$

6339 — Etant données deux fonctions inverses $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, peut-on déduire l'intégrale $\int \varphi(y)dy$ de l'intégrale $\int f(x)\,dx$?

6340. — Calculer le moment d'inertie d'une arche de cycloïde par rapport à la base.

6341. — On donne un cercle et un point A intérieur. On divise la circonférence en n parties égales par des points de division $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Trouver la limite de la moyenne arithmétique des quantités $\frac{1}{\overline{AM_1}^2}, \frac{1}{\overline{AM_2}^2}, \ldots$ quand n augmente indéfiniment. Même question pour $\overline{AM_1}^2, \overline{AM_2}^2, \ldots$

6342. — On donne une circonférence matérielle et un point A de cette circonférence. En un point M la densité est proportionnelle à la distance rectiligne AM. Trouver la masse de la circonférence.

6343. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy; sur Ox un point B d'abscisse b et sur Oy deux points A et A_n d'ordonnées $+a$ et $-a$. On divise AA_n en n parties égales par les points de division $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Calculer la limite de la somme $\frac{BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_n}{n}$ pour n infini.

6344. — Moment d'inertie d'un cercle par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre.

6345 — Trouver le moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe passant par le milieu de la barre et faisant avec elle un angle θ. Cas particulier, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

6346. — Condition pour que l'intégrale $\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-p)^3(x-q)^2}\,dx$ soit algébrique.

6347. — Un cercle tourne autour d'une de ses tangentes et engendre un tore dont on demande le moment d'inertie par rapport à l'axe.

6348. — Moment d'inertie d'un disque elliptique par rapport : 1° à l'un de ses sommets, 2° à son centre.

6349. — Moment d'inertie d'une sphère par rapport au plan d'un grand cercle.

6350. — Valeur moyenne de la fonction $\sin^3 x \cos^3 x$ dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6351. — Valeur moyenne de $\sin^m x$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

6352. — Aire comprise entre les deux courbes $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$ dans l'intervalle $(0, \pi)$.

6353 — Maxima et minima de l'intégrale $\int_{\lambda}^{\lambda^2} f(x)\,dx$ considérée comme fonction de λ.

6354. — Calculer $\int_b^{2a} f(x)\,dx - \int_{-b}^{2c-a} f(c-x)\,dx$.

6355. — Intégrer les équations différentielles :

$$y' + y + \cos^4 x \sin x = 0, \qquad \frac{y'}{y} = \frac{x-1}{(x+2)(x+3)}, \qquad y' - y = \sin x, \qquad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

$$y' = \frac{axy}{x^2 + y^2} \text{ (passer en coordonnées polaires)}, \qquad y' - 2\frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)}\,y = 1, \qquad x - \frac{y}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}, \qquad \frac{dy}{y^2 - x^2} = \frac{dx}{y^2 + x^2}, \qquad (3y^2x + 2x^3)dx + y^3 dy = 0.$$

6356. — Intégrer les équations différentielles :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 7e^{3t} + \sin t, \quad y'' + y = \cos^3 x, \quad y'' + y = \cos^5 x, \quad y'' + y = \cos^m x, \quad y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x,$$

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x, \quad y'' + y = \cos x + \sin x, \quad y'' + ay' + by = x^2 - 1, \quad y'' - 4y' + 4y = x^5 \cos^2 x,$$

$$y'' - 4y' + 4y = x^3 \operatorname{ch}^2 x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x, \quad y'' + 2y' + y = \sin x + x \operatorname{ch} x, \quad y'' + y = \sin x + \cos 3x,$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x + \cos x + x \sin x, \quad y'' - y = x^2 + 1, \quad y'' - 8y' + 16y = 7e^{4x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2x}{dy^2}.$$

6357. — Intégrer le système $\frac{dx}{dt} = a(x+y)$, $\frac{dy}{dt} = a(x-y)$.

6358. — On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0.$$

On pose $x = \cos t$. Que devient l'équation ? Peut-on l'intégrer ?

6359 — On considère l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$, et on pose $z = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$. Que devient l'équation ?

6360. — On donne l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$. Que devient cette équation quand on prend x comme fonction et y comme variable ?

6361. — Déterminer une fonction $V(r)$, r étant égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$, telle que l'on ait

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = m^2 V.$$

6362. — Soit z une fonction de deux variables x et y : on pose $x + y = u$, $x - y = v$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$. En déduire toutes les fonctions z qui satisfont à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$, ou à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6363. — La relation $z = f(x, y)$ définit x comme fonction de y et de z ; calculer $\frac{\partial x}{\partial y}$ et $\frac{\partial x}{\partial z}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6364. — Soit z une fonction de deux variables x et y : on pose $x + y = u$, $xy = v$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$.

II. — Trigonométrie.

6365. — Simplifier l'expression $\frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{8} - \frac{2\sin^6 x}{6} + \frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{4}$.

6366. — Rendre calculable par logarithmes une somme de sinus ou de cosinus d'arcs en progression arithmétique.

6367. — Calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

6368. — Calculer les lignes trigonométriques de l'arc $\frac{\pi}{n}$.

6369. — Calculer $\sin\frac{a}{4}$ connaissant $\operatorname{tg} a$. Discuter.

6370. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{m} = x$ connaissant $\operatorname{tg} a$. Montrer que si m est pair on peut abaisser le degré de l'équation en posant $y = x - \frac{1}{x}$.

6371. — Résoudre les équations :

$$\frac{\cos^4\theta}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4\theta}{\sin^2 x} = 1, \qquad \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}, \qquad \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0, \qquad \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = a,$$

$$2\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sin}\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,sin}\frac{3}{5} + \operatorname{arc\,sin} 1, \qquad \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{cotg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\operatorname{cotg}(x-a) + \operatorname{cotg}(x-b) + \operatorname{cotg}(x-c) = 0.$$

6372. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = a\cos y, \\ \sin y = b\cos z, \\ \sin z = c\cos x. \end{cases}$$

6373. — Sachant que $2\cos x = a + \frac{1}{a}$, calculer $\cos mx$.

6374. — On donne trois demi-droites Oz, OA, OB, Oz étant verticale, et on projette OA et OB orthogonalement suivant OA_1 et OB_1 sur le plan horizontal du point O. On donne les angles $AOB = \theta$, $AOA_1 = \alpha$, $BOB_1 = \beta$; calculer l'angle A_1OB_1.

6375. — Dans un triangle calculer $\Sigma(b^2 - c^2)\operatorname{cotg} A$.

6376. — Dans un triangle calculer $(p-a)\sin\frac{A}{2} - a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ en fonction de a, b, c.

6377. — Etudier la forme d'un triangle dont les angles satisfont à la relation $2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$.

6378. — Résoudre un triangle connaissant r et R, et sachant que les côtés sont en progression arithmétique.

6379. — Dans un triangle on connaît l'angle A et la relation $h_a = h_b + h_c$ entre les hauteurs. Calculer les angles B et C.

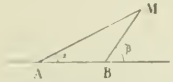
6380. — Déterminer un triangle dans lequel les mesures des côtés et de la surface sont en progression arithmétique.

6381. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois hauteurs : 2° les rayons des cercles exinscrits ; 3° a, r, S ; 4° r, R, S.

6382. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Que devient cette formule lorsque le rayon de la sphère augmente indéfiniment ?

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

6383. — Construire $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ connaissant a et b.



6384. — On donne deux points fixes A et B, et on demande le lieu du point M tel que $\beta = 2\alpha$.

6385. — Démontrer que l'expression $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta$ ne change pas si l'on effectue une transformation de coordonnées quelconques. Lc'

6386. — On donne deux points fixes A et B. Lieu du point M tel que $\widehat{AMB} = 2\widehat{MAB}$. La

6387. — Bissectrices de l'angle de deux droites. Distinguer la bissectrice de l'angle aigu. La

6388. — Par deux points donnés peut-on mener une circonférence orthogonale à une circonférence donnée ?

6389. — On donne deux points A, A' sur Ox et deux points B, B' sur Oy. Lieu du point M tel que le rapport anharmonique du faisceau (M AA'BB') soit égal à un nombre donné.

6390. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$$y = x^3 - 13x - 12, \qquad y = x^3 - 3abx + a^3 + b^3, \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x-1)^2}, \qquad y^2 = x^3(1-x),$$

$$y = x + \sqrt{\frac{4x^3+1}{x+1}}, \qquad y = 2x + \sqrt[3]{\frac{8x^4+1}{x+1}}, \qquad y = x\sqrt{(x-a)(b-x)}, \qquad y = \frac{x^2+6x-1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ (résoudre par rapport à } x\text{)}, \qquad y = \frac{1}{x}\,\mathrm{L}\,\frac{e^x-1}{x}, \qquad y = \cos\sqrt{x}, \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathrm{L}x,$$

$$y = e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad y = (2x+1)e^{\frac{1}{x+1}}, \qquad y = xe^{\frac{1}{x-1}}, \qquad y = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{x}, \qquad y = xe^{\frac{x-1}{x-3}}, \qquad y = (x-1)e^{\frac{x}{x^2-1}},$$

$$y = (x-1)e^{\frac{x^2+1}{x-2}}, \qquad y = (x+1)e^{\frac{x+3}{x-4}}, \qquad y = xe^{\frac{x^2-1}{x^2-1}}.$$

La $x^3 + y^3 = a^3$, $\quad x^n + y^n = a^n$, $\quad x^3y^3 - 2xy^2 + 1 = 0$, $\quad x(x^3 - y^3) = y^2 - 4x^2$,

$(x^2 + y^2)y = a(x^2 - y^2)$ (aire de la boucle), $\quad x^4 + y^4 - a^2xy = 0$ (id.), K

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t-2}{(t-1)(t+2)}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1-t^3}{(1+t)(1+t^2)}, \\ y = \dfrac{t^3}{(1-t)(1-t^2)}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{8t^3-1}{4t^2}, \\ y = \dfrac{2(t^3-1)}{t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \\ y = \operatorname{cotg}(t-1), \end{cases}$$

K

$$\begin{cases} x = \dfrac{t(a^4-t^4)}{a^4+t^4}, \\ y = \dfrac{2a^2t^2}{a^4+t^4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = e^{\operatorname{tg}\varphi}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\frac{1}{\sin\varphi}}, \\ y = \cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sin t, \\ y = e^{\frac{1}{\operatorname{tg} t}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \sin t, \\ y = \dfrac{1}{\cos t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+\sin t}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = r\cos^2\alpha\sin 2\alpha, \\ y = r\sin^2\alpha\cos 2\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\frac{1}{\cos t}}, \\ y = e^{\frac{1}{\sin t}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos^2 t + \mathrm{L}\sin t, \\ y = \sin t\cos t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos\varphi + \mathrm{L}(1-\cos\varphi), \\ y = \sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\frac{1}{\sin t}}, \\ y = e^{\operatorname{tg} t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{1-u^2}, \\ y = u - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\dfrac{1+u}{1-u}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a\displaystyle\int e^{k\varphi}\cos\varphi\,d\varphi, \\ y = a\displaystyle\int e^{k\varphi}\sin\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

6391. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées polaires :

V $\rho = \dfrac{p}{1-2\cos 2\omega}$, $\quad r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, La $\quad r = a\dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$, $\quad r = a\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$,

$r = a(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta)$, $\quad \rho = a\sqrt{1+\cos 2\omega}$, $\quad r = \dfrac{\operatorname{tg}^3\theta}{\operatorname{tg} 3\theta}$, $\quad \rho = \dfrac{a\sin\omega}{1+\operatorname{tg}\omega}$,

$\rho = \dfrac{1-\cos\omega}{1+\sin\omega}$ (points doubles), $\quad \rho = \operatorname{tg}\dfrac{2}{3}\omega$, $\quad \rho^3 = a^3\cos 3\omega$, $\quad \rho = \dfrac{1}{\cos\dfrac{2\omega}{3}}$,

$\rho = \cos\dfrac{2\omega}{5}$ (axes passant par le pôle), $\quad \rho = \dfrac{1}{1+2\sin\omega}$, $\quad \rho = \dfrac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1}$,

$r^2 = a^2\sin 2\theta$ (aire de la boucle), $\quad \rho = \dfrac{\cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega - \cos 2\omega}}{\cos 2\omega}$,

$\rho = \dfrac{p}{1-2\cos\dfrac{\omega}{2}}$ (points doubles), $\quad r = \dfrac{a}{\sqrt{\sin\theta}}$ (rayon de courbure),

$r = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$, $\quad r = 1+\sqrt{\sin\theta}$, $\quad r = a\sqrt{2+\cos 2\theta}$, K $\quad r = a\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$,

K $\quad r = a\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}$, $\quad r = ae^{\operatorname{tg}\theta}$, $\quad r = e^{\frac{1}{\cos\theta}}$, $\quad r = e^{\frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}}$,

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}, \\ \omega = \operatorname{tg}\varphi - \varphi. \end{cases}$$

6392. — On considère la courbe $\rho = \operatorname{tg}\varphi$, $\omega = \varphi - \sin\varphi$. Construire. On fait varier φ de 0 à π. Trouver l'aire comprise entre la courbe et le rayon vecteur.

6393. — Branches infinies des courbes

$$V \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t^2+1} + t. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t+1} + 1, \\ y = \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{3}{t+1} - t. \end{cases} \quad V.$$

6394. — Trajectoires orthogonales des cercles tangents à l'origine à Ox.

6395. — Trajectoires orthogonales des courbes (λ désignant la variable)

$$z = \lambda^2 \frac{\bar{z} - \omega}{\omega}, \quad (x^2 - y^2) - 2ax^2 - y^2 = \lambda, \quad x^2 + \lambda y^2 = 1, \quad Ax^2 + By^2 = \lambda,$$

$$= \lambda^2 \frac{\omega}{\bar{z} - \omega}, \quad \lambda^2 + \lambda x + y = 0, \quad x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2a\lambda - 3\lambda^2 = 0.$$

6396. — On donne deux axes rectangulaires et deux points A et A' sur Ox. A tout point M du plan on fait correspondre un point M' situé sur OM et tel que MA et M'A se coupent sur Oy. Si M décrit une droite, que décrit M' ?

6397. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une spirale logarithmique deux tangentes rectangulaires.

6398. — Trouver l'enveloppe de la droite $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$.

6399. — Même question pour la droite $\dfrac{X - f(t)}{f'(t)} = \dfrac{Y - \varphi(t)}{\varphi'(t)}$.

6400. — Podaire d'un cercle par rapport à un point du cercle. Aire de la courbe obtenue.

6401. — On donne deux cercles égaux et tangents. On prend la polaire d'un point M d'un des cercles par rapport à l'autre, et le point de rencontre P de cette polaire et de la parallèle à la ligne des centres menée par le point M. Lieu du point P. Construire la courbe : elle a deux points de rebroussement. Tangentes en ces deux points.

6402. — Construire la développée de la courbe $y = x^3$.

6403. — Déterminer les axes de symétrie de la courbe $y(y^2 - 3x^2) + 3by^2 - bcy + a = 0$.

6404. — Trouver l'aire de la courbe $x^{2p} + y^{2p} = a^2 x^{p-1} y^{p-1}$.

6405. — Mener par l'origine une tangente à la courbe $y = a^x$. Lieu du point de contact quand a varie.

6406. — Construire la courbe $x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = a\sin^2 t \cos t$. Aire engendrée par cette courbe tournant autour de Ox.

6407. — Le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle se conserve dans une transformation par inversion.

6408. — Par un point fixe A d'une strophoïde droite on mène une sécante rencontrant la courbe aux points M et M' ; on joint ces points au point double O. Démontrer que les droites OM et OM' sont en involution.

6409. — Trouver le point limite de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - f(\theta) = 0$. Normale à l'enveloppe en ce point. Centre de courbure.

6410. — On donne une courbe plane et un point A dans son plan. On joint le point A à un point M variable de la courbe. Étudier les variations de $\overline{AM}^2$.

6411. — On considère la courbe $x^m y^p = 1$, m et p étant des exposants entiers et positifs, et deux points M_1, M_2 de cette courbe ayant des abscisses positives x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$), et des ordonnées positives. On abaisse M_1P_1 et M_2P_2 perpendiculaires sur Ox et on demande l'aire du trapèze mixtiligne $M_1P_1M_2P_2$. On suppose que x_2 augmente indéfiniment, cette aire a-t-elle une limite ?

6412. — Enveloppe d'un cercle de rayon constant dont le centre décrit une courbe donnée.

6413. — Montrer que la lemniscate est unicursale. Exprimer les coordonnées d'un point en fonction rationnelle d'un paramètre.

6414. — Lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe $y^2 = x^3$ deux tangentes rectangulaires.

6415. — Construire la courbe $y = \sin x(1 + \cos x)$. Points d'inflexion. Aire comprise entre la courbe et l'axe des x dans l'intervalle $(0, \pi)$.

6416. — On considère les deux courbes $r = f_1(\theta)$, $r = f_2(\theta)$. Construire la tangente en un point de l'une des courbes $r = f_1(\theta) + f_2(\theta)$, $r = f_1(\theta) f_2(\theta)$.

6417. — Développante d'une spirale logarithmique.

6418. — Aire engendrée par une chaînette tournant autour de son axe de symétrie. Vérifier le théorème de Guldin.

6419. — Développante de la parabole qui passe au sommet.

6420. — Trouver deux points d'une cycloïde tels que les tangentes en ces points soient rectangulaires. Lieu du point de rencontre de ces tangentes.

6421. — Sur les tangentes à une spirale logarithmique on porte dans un sens déterminé une longueur constante. Lieu du point ainsi obtenu.

6422. — On considère une courbe tangente à l'origine à Ox. On mène une corde MM' parallèle à Ox ; soit I le milieu de MM', trouver la limite de OI quand MM' se rapproche indéfiniment de Ox. On représente la courbe par

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots$$

6423. — On considère une courbe rencontrant Oy en un point A. Soit M un point quelconque de la courbe, et G le centre de gravité de l'arc AM. Trouver la tangente au lieu du point G.

6424. — Une courbe algébrique peut-elle avoir une infinité d'axes de symétrie ? Peut-elle avoir deux axes parallèles ; deux axes non rectangulaires ? Équation d'une cubique admettant comme axes les diagonales d'un hexagone régulier.

6425. — On donne deux courbes C et C' dans un plan et d'un point M on mène les normales MA à la courbe C et MA' à la courbe C'. On suppose le point M assujetti à l'une des conditions suivantes : 1° $MA = MA'$, 2° $MA - MA' = a$, 3° $MA + MA' = b$. Construire la tangente au lieu du point M.

6426. — Lieu des centres des cercles tangents à une cardioïde et passant par le point de rebroussement.

6427. — Démontrer que la transformation $X = e^x \cos y$, $Y = e^x \sin y$ conserve les angles.

6428. — Enveloppe de la droite $x\sin t - y\cos t = f(t)$. Normale en un point de l'enveloppe. Rayon de courbure.

6429. — Par un foyer F d'une ellipse on mène des rayons vecteurs FM_1, FM_2, ... FM_n formant une étoile régulière. Trouver la limite de $\frac{\Sigma FM_i}{n}$ quand n augmente indéfiniment.

6430. — Sur la tangente en un point M d'une courbe C on porte une longueur constante MP. Démontrer que la normale en P au lieu de ce point passe par le centre de courbure de la courbe C au point M. V

6431. — Une figure plane, formée de droites concourantes formant entre elles des angles égaux se déplace dans son plan. Chaque droite a une enveloppe. Étudier la figure formée par les points de contact de chaque droite à un instant donné. B

6432. — Aire d'un segment parabolique.

6433. — Sur une courbe on prend un sens positif des arcs, et on calcule les coordonnées polaires ρ et ω d'un point en fonction de l'abscisse curviligne s, $\rho = f(s)$, $\omega = \varphi(s)$. Montrer qu'il existe une relation entre les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$. En un point M de la courbe, on mène la tangente MT dans le sens des s croissants, et sur la droite OM on considère la direction OL telle que $(Ox, OL) = \omega$. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle de la demi-droite OL et de la demi-droite MT.

6434. — On fait rouler un cercle (γ) sur un cercle égal (C). Lieu d'un point M du cercle (γ). Tangente. Rectification de la courbe obtenue. Montrer que cette courbe est un limaçon de Pascal.

6435. — On considère la courbe $\rho = (\omega - a)(\omega - b)(\omega - c)(\omega - d)$. Cette courbe peut-elle avoir des axes de symétrie passant par l'origine ?

6436. — Trouver l'enveloppe des courbes $x = f(t, \lambda)$, $y = \varphi(t, \lambda)$. V

6437. — On considère une courbe plane tangente à l'origine à Ox. On admet que les coordonnées d'un point M de la courbe peuvent se développer suivant les puissances de l'arc $s = OM$. Calculer les premiers termes des développements. On porte sur Ox une longueur $ON = s$. La droite MN rencontre Oy en un point P. Trouver la limite de OP quand s tend vers zéro.

6438. — On considère un limaçon de Pascal ayant son point double en O, et deux points variables M et N de la courbe tels que l'angle MON soit droit. Lieu du milieu de MN.

6439. — Par le point A où la courbe $y = e^x$ rencontre Oy on mène deux droites rectangulaires rencontrant Ox aux points B et C; par ces points on mène des parallèles BB' et CC' à Oy rencontrant la courbe en B' et C'. Étudier les variations de l'aire limitée par la courbe, par Ox et les droites BB' et CC'.

6440. — Les tangentes en deux points voisins M et M' d'une courbe plane se coupent en un point P. Trouver la limite du point de concours des hauteurs des triangles MM'P quand M' se rapproche indéfiniment de M.

6441. — Former l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées par l'origine à la chaînette

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

6442. — Longueur de la développée d'une ellipse.

6443. — Podaire d'un cercle par rapport à un point pris sur le cercle.

6444. — Par un point P on mène une droite qui rencontre les côtés d'un angle donné A en des points M et N. Étudier le lieu d'un point I dont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires sont $x = PM$, $y = PN$.

6445. — Enveloppe des cercles qui sont vus de deux points fixes sous des angles donnés. La

6446. — On donne une courbe $y = f(x)$ et deux points M et M' ayant pour abscisses a et $a + h$. On mène les tangentes en M et M' qui rencontrent respectivement en P' et P les ordonnées de M' et M. Calculer la partie principale de l'infiniment petit $\overline{P'M'} - \overline{PM}$, h étant l'infiniment petit principal.

6447. — Aire engendrée par la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ tournant autour de Ox. Longueur de l'arc. Courbure.

6448. — On donne trois points M', M, M'' de la courbe $y = f(x)$, ayant pour abscisses $a - h$, a, $a + h$, et on considère la tangente au point M qui rencontre en L' et L'' les ordonnées des points M' et M''. Par les points L' et M' on mène des parallèles à Ox qui rencontrent en Q' et P'' l'ordonnée du point M''. Évaluer la différence $\overline{P''M''} - \overline{Q'L''}$. Incidemment déterminer le nombre A tel que $f(a + h) - f(a - h) - 2hf'(a) = Ah^3$. Y a-t-il des courbes pour lesquelles on a

$$f(a + h) - f(a - h) - 2hf'(a) = 0.$$

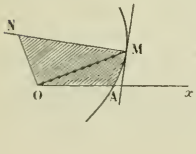
6449. — Podaire de la parabole par rapport à son sommet. Ce lieu est une cissoïde droite. Équations paramétriques de cette cissoïde. Condition pour que quatre points soient sur un cercle. Si par deux points fixes de la cissoïde on fait passer un cercle, la droite qui joint les deux autres points de rencontre passe par un point fixe de la cissoïde.

6450. — Soit C le centre de courbure en un point M (d'abscisse a) de la courbe $y = f(x)$. La normale au point M' (d'abscisse $a + h$) rencontre la normale en M au point P. Évaluer l'infiniment petit CP.

6451. — Équation du cercle osculateur en un point M d'une courbe. Distance d'un point voisin M' de la courbe par rapport à ce cercle.

6452. — Aire balayée par le rayon vecteur dans une podaire de cercle.

6453. — Trouver une courbe telle que la projection du pied de l'ordonnée sur la normale soit le centre de courbure.



6454. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure soit dans un rapport constant avec la normale limitée à Ox.

6455. — On considère une courbe rencontrant Ox au point A. En un point quelconque M de cette courbe on mène la normale qui rencontre en N la perpendiculaire menée par O à OM. Déterminer la courbe de façon que l'aire OAMN soit proportionnelle à l'angle xOM.

6456. — D'un point M d'une courbe on abaisse MA perpendiculaire sur Ox et MB perpendiculaire sur Oy, puis on mène la tangente en M qui rencontre Ox au point T. Déterminer la courbe de façon que l'aire du rectangle OAMB soit égale à $a.MT$, a désignant une constante.

6457. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que l'on ait soit $\overline{ON}.\overline{OT} = a^2$, soit $\overline{OM}^2 = k.\overline{ON}.\overline{OT}$.

6458. — Trouver une courbe telle que la différence entre la sous-normale et la sous-tangente polaire soit égale à $a \cos \omega + b$. Cas particulier où $a = 0$.

6459. — Trouver une courbe telle que l'abscisse du point de rencontre de la tangente en un point avec Ox soit constamment égale à l'arc AM, A étant un point fixe de la courbe.

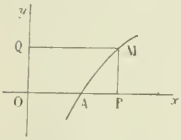
6460. — On considère une courbe, un point M de cette courbe, la tangente en ce point qui coupe Oy au point T, et le centre de courbure ω qui se projette sur Oy en ω'. Déterminer la courbe de façon que le point M se projette sur Oy au milieu de $\omega' T$.

6461. — O désignant un point fixe et M un point d'une courbe, la perpendiculaire menée par O à OM rencontre la tangente et la normale aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que la longueur NT soit constante.

6462. — Trouver les courbes telles que la sous-tangente soit un multiple entier de la sous-normale. Cas de l'égalité.

6463. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que le segment $\overline{NT}$ ait une valeur constante.

6464. — Trouver les courbes dans lesquelles le rayon de courbure R est une fonction de l'angle α que fait Ox avec la tangente dans la direction positive des arcs. $R = f(\alpha)$. Cas particulier : $R = ae^{m\alpha}$.



6465. — On considère une courbe rencontrant Ox au point A, et un point M de cette courbe. Déterminer la courbe de sorte que le rapport de l'aire AMP à l'aire OAMQ soit égale à une fonction $\varphi(x)$ de l'abscisse x du point M. Déterminer la courbe de façon que

$$\frac{\text{aire AMP} + a}{\text{aire OAMQ} + b} = \varphi(x), \quad a \text{ et } b \text{ étant des constantes.}$$

6466. — Déterminer une courbe telle que la portion de tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe soit constante. Rayon de courbure.

6467. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T, et la normale au même point coupe Oy en N. Déterminer la courbe de façon que NT soit perpendiculaire à OM.

6468. — Déterminer une courbe telle que le rectangle formé par la tangente, la normale et les perpendiculaires à ces droites menées par l'origine ait une aire constante. Podaire de cette courbe par rapport à l'origine. Aire balayée par le rayon vecteur quand l'angle polaire croît de 0 à 2π.

6469. — Déterminer une courbe telle que le milieu du segment déterminé sur Ox par la tangente et la normale soit le point O.

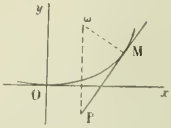
6470. — On considère la parabole $y^2 - 2px = 0$ et une courbe C. Soit M un point quelconque de cette courbe, MT la tangente en ce point, M' le point de rencontre de MT et de la polaire du point M par rapport à la parabole. Déterminer la courbe C de façon que le point M' décrive la droite $y = a$.

6471. — Une courbe C rencontre Oy au point A ; d'un point M de la courbe on mène MP perpendiculaire sur Ox. Déterminer la courbe de façon que l'abscisse x_1 du centre de gravité de l'aire OAMP soit une fonction donnée $f(x)$ de l'abscisse du point M. Cas où $f(x) = kx$.

6472. — Trouver une courbe telle qu'un point pesant, assujetti à décrire la courbe et attiré par un point fixe proportionnellement à la distance soit en équilibre dans toutes les positions : 1° sans frottement, 2° frottement limite.

6473. — On joint un point fixe O à un point M d'une courbe, et on mène par le point O une perpendiculaire à OM qui rencontre la normale en M au point ω. Déterminer la courbe de façon que le point ω soit le centre de courbure au point M.

6474. — Trouver une courbe passant par un point A de Ox et telle que si l'on mène la tangente en un point M rencontrant en T la perpendiculaire menée par O à OM, l'aire OAMT soit constante.



6475. — On considère une courbe tangente à l'origine à Ox. Sur la tangente en un point M dans le sens MO on prend une longueur MP = arc OM, et on joint le point P au centre de courbure ω au point M. Déterminer la courbe de façon que : 1° $P\omega$ ait une longueur constante ; 2° $P\omega$ soit parallèle à Oy.

6476. — Trouver les courbes telles que la projection du rayon de courbure sur une droite fixe soit constante.

6477. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point fixe A sur Ox. Déterminer une courbe telle que si l'on mène en un point M la tangente et la normale qui rencontrent Oy en T et N, l'aire du triangle ANT soit égale au carré de l'ordonnée du point M.

6478. — Trouver une courbe telle que le centre de courbure en un point M se projette sur Ox au point de rencontre de Ox et de la tangente en M.

6479. — La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox en un point N ; on abaisse OA perpendiculaire sur la tangente au point M. Déterminer la courbe de façon que $\frac{OA}{MN} = k$, k désignant une constante.

6480. — Déterminer une courbe telle que l'on ait $s^2 = a\rho^2 + b$, s désignant l'arc, ρ le rayon de courbure, a et b des constantes.

6481. — Soit une courbe C, un point fixe O, N le point où la normale en un point M de la courbe rencontre la perpendiculaire menée à OM par le point O. Déterminer la courbe de façon que le centre de courbure au point M soit le milieu de MN.

6482. — On considère une courbe rencontrant Oy en un point A. Déterminer cette courbe de façon que le centre de gravité de l'arc AM ait même abscisse que le point où la tangente en M rencontre Ox.

6483. — Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure en un point M soit proportionnel à l'arc AM, A étant un point fixe de la courbe.

6484. — On considère une courbe rencontrant Oy en un point A. Soit M un point quelconque de la courbe, MP la perpendiculaire abaissée de M sur Ox. Déterminer la courbe de façon que l'aire OAMP soit proportionnelle à l'arc AM.

6485. — On donne deux point fixes O et A. Déterminer une courbe passant par le point A telle que, M étant un point quelconque de la courbe, l'aire OAM soit proportionnelle à l'arc AM.

6486. — Trouver les courbes dans lesquelles la normale est à une distance constante d'un point fixe.

6487. — Trouver une courbe telle que l'ordonnée d'un point soit proportionnelle à l'ordonnée à l'origine de la normale en ce point.

6488. — Trouver une courbe telle que la tangente et la normale divisent harmoniquement un segment donné AB.

6489. — Soient T et N les points où la tangente et la normale en un point M d'une courbe C rencontrent l'axe des x. Au point N on mène une perpendiculaire à Ox sur laquelle on prend $NP = NM$. Déterminer la courbe C de façon que la tangente au point P au lieu de ce point passe par le point T.

6490. — Déterminer une courbe telle que si l'on abaisse de l'origine une perpendiculaire OH sur la normale au point M, on ait $OH = MN$, N étant le point de rencontre de la normale et de Ox.

6491. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T. Déterminer la courbe de façon que

$$OM = a.\ OT.$$

6492. — Trouver une courbe qui coupe sous un angle constant les droites passant par un point fixe.

6493. — Construire les coniques définies par les équations :

$$x^2 + 7y^2 - 6xy + 2x - 14y = 0, \qquad x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 1 = 0, \qquad 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x = 0 \text{ (aire)},$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x = 0 \text{ (réduction)}, \qquad x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 8y = 0, \qquad y = 2x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 3x - 1},$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

6494. — Lieu d'un point invariablement lié à un segment de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires.

6495. — Calculer les coordonnées des foyers de la conique $y^2 - 2px - qx^2 = 0$.

6496. — Enveloppe des cordes d'une conique qui sont vues d'un foyer sous un angle droit.

6497. — Equation générale des paraboles tangentes aux deux axes.

6498. — Equation générale des coniques tangentes à trois droites. En déduire la question précédente.

6499. — On donne trois points A, B, C. Déterminer les points communs à une ellipse ayant pour demi-diamètres conjugués AB, AC et à une autre ellipse ayant pour demi-diamètres conjugués CA et CB.

6500. — Trouver l'équation du cercle passant par les pieds des normales issues d'un point à une parabole.

6501. — Les normales aux points A et B d'une parabole se rencontrent en un point C. Trouver l'enveloppe de la droite AB sachant que la parallèle à l'axe menée par le point C passe par le milieu de AB.

6502. — Autour d'un des sommets d'une ellipse on fait tourner l'ensemble de deux droites faisant entre elles l'angle de 45°. Enveloppe de la corde qu'elles interceptent sur l'ellipse.

6503. — On considère une ellipse et les cercles décrits sur les axes comme diamètres. Par le centre O on mène une droite rencontrant les cercles aux points M et M' d'un même côté du point O. Par les points M et M' on mène des parallèles aux axes de l'ellipse. Lieu des sommets du rectangle ainsi formé.

6504. — Intersection d'une parabole et de sa développée. Aire comprise entre les deux courbes.

6505. — D'un point P on mène à une parabole les tangentes PA et PB, et on trace les normales en A et B qui se coupent en un point M. Calculer les coordonnées du point M en fonction de celles du point P.

6506. — Lieu des points d'où l'on voit la conique $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\omega}$ sous un angle droit.

6507. — On donne une ellipse ayant pour foyers F et F'. Par le point F' on mène une sécante, et on joint le pôle P de cette sécante au point F. Lieu du point de rencontre de la sécante et de la droite PF.

6508. — On considère une ellipse et un point fixe A ; on trace deux diamètres conjugués quelconques D et D', et on demande le lieu du point de rencontre de D et de la perpendiculaire menée de A sur D'. Solutions analytique et géométrique. Intersection du lieu et de l'ellipse.

6509. — On donne une ellipse fixe et on considère une ellipse égale qui se déplace en restant tangente à la première et de façon que les grands axes soient perpendiculaires. Trouver le lieu du centre de l'ellipse variable.

6510. — D'un point P on peut mener trois normales PA, PB, PC à une parabole. Construire la résultante de ces trois vecteurs.

6511. — Lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel. Discuter.

6512. — On considère la parabole $y^2 - 2px = 0$, ayant pour sommet l'origine O. On prend un point A sur la parabole et on trace un cercle passant par les points O et A et tangent à la parabole au point B. Etudier la correspondance entre les points A et B.

6513. — On donne deux droites Ox, Oy et deux points A et B. On considère les coniques passant en A et B et tangentes aux droites Ox, Oy. Propriétés de la corde des contacts.

6514. — On considère les coniques circonscrites au rectangle dont les côtés ont pour équations $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Déterminer celle de ces coniques pour laquelle le rapport anharmonique des quatre sommets du rectangle a une valeur donnée.

6515. — Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une ellipse de grandeur constante qui tourne autour de son centre.

6516. — D'un point M d'une ellipse on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur les axes. Montrer que la droite PQ est normale à une ellipse.

6517. — Construire la courbe $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$. Former l'équation générale des coniques ayant pour asymptote Oy et rencontrant Ox aux points d'abscisses $+1$ et -1. Chacune de ces coniques rencontre la courbe en deux points A et B. Montrer que AB est parallèle à une droite fixe.

6518. — Lieu des milieux des cordes d'une conique passant par un point. Solutions analytique et géométrique.

6519. — Réduire la conique $y^2 + 4xy + 4x^2 - 6y = 0$.

6520. — Trouver l'enveloppe des cordes d'une parabole qui sont vues du sommet sous un angle de 45°.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1732. — On considère un triangle ABC, dont les deux sommets A et B sont fixes, et tel que le pied de l'une des bissectrices de l'angle A sur le côté BC décrive une droite fixe D.

1° Trouver le lieu du point C. Ce lieu est une conique Γ dont on étudiera le genre d'après la position de la droite D dans le plan.

2° Lieux des points I et I′ où les bissectrices de l'angle A rencontrent le côté BC. Ce lieu se compose, outre la droite D, d'une conique Γ′ qui passe par deux points fixes, quand D varie arbitrairement.

3° L'une des coniques Γ, Γ′ étant construite, en déduire la construction de l'autre. Montrer que si D se déplace parallèlement à une direction fixe Δ, les coniques Γ′ passent par un troisième point fixe, et donner le lieu de ce point quand la direction Δ varie.

4° Trouver les droites D pour lesquelles la conique Γ est une parabole. Ecrire l'équation de l'axe, de la tangente au sommet, de la directrice, les coordonnées du foyer, du sommet, et donner les enveloppes et lieux correspondants.

G. Cotty, lycée de Dijon.

1733. — On considère une conique fixe C et une parabole P de foyer fixe O, et on désigne par M et M′ deux ombilics conjugués de P et de C. En supposant que M décrive une courbe donnée, trouver le lieu du point M′.

L. Bickart.

1734. — Soit la surface gauche $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

1° On suppose qu'un point M se meuve d'un mouvement vibratoire simple sur une génératrice G de cette surface. Le centre de la vibration est le point de la génératrice qui est sur le cercle de gorge. L'amplitude est $\sqrt{2}$. La période est 2π.

La génératrice G tourne autour de oz d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire 1. Trouver, au temps t, les coordonnées de M.

2° Lieu de la trace, sur le plan des xy, de la droite qui porte le vecteur accélération du point M.

3° Construire les projections de la trajectoire du point M sur un plan quelconque passant par oz et sur le plan des xy. Définir géométriquement cette dernière.

4° Trouver et discuter l'intersection de la trajectoire du point M avec les génératrices de chaque système de la surface gauche.

Th. L.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1660. — *Montrer que les deux produits*

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \qquad \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \cdots$$

sont convergents. Trouver la limite du premier.

On sait, et il est facile de démontrer que le produit

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

a une limite différente de 0, quand tous les α étant plus petits que 1, α_n tend vers 0 d'abord, puis quand la série

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

est absolument convergente. Il n'y a qu'à remplacer le produit P_n par son logarithme, et comparer la série des logarithmes à la série des α.

Or, dans le cas actuel, la série des α est

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots;$$

elle est absolument convergente ; donc le produit est convergent.

Pour avoir sa limite, dans le premier cas, décomposons P_n en deux produits

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),\qquad \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

nous aurons

$$P_n=Q_nR_n,$$

avec

$$Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdot\frac{n-1}{n},\qquad R_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Nous avons donc finalement

$$P_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}.$$

La limite est $\frac{1}{2}$.

MICHEL CONSTANDAKI.

Bonnes solutions de MM. AMBLARD, à Ruines ; J. MOURRET, lycée de Marseille ; L. SIMON, Châlons-sur-Marne ; BROS ; L. GAUTHIER, à Fermanville ; W. MÉRIGOT, à Paris ; G. HAUVERGNE, à Alger ; G. GARBE, à Bordeaux ; J. SOUDET, à Rouen ; G. FOUCRY, à Roanne ; GROSCOLAS.

1668. — *On donne* $y=ax+b+\sqrt{cx^2+2dx+f}$. *Trouver une relation entre* y *et ses dérivées successives, qui ne contienne pas* c, d, f. *Dire ce que représente* y *par rapport à cette relation.*

De la relation donnée on tire

$$(y-ax-b)^2=cx^2+2dx+f,$$

et en prenant la dérivée du troisième ordre des deux membres de cette égalité, on élimine immédiatement les constantes c, d, f, et on a

$$(1)\qquad \frac{d^3}{dx^3}(y-ax-b)^2=0,$$

ou, en développant,

$$y'''(y-ax-b)+3y''(y'-a)=0.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle demandée, et d'après la forme (1), on reconnait qu'elle a pour intégrale générale la fonction y définie par l'équation

$$(y-ax-b)^2=cx^2+2dx+f$$

ou

$$y=ax+b\pm\sqrt{cx^2+2dx+f}.$$

c, d, f étant des constantes arbitraires.

On peut dire aussi que les courbes intégrales sont des coniques admettant la droite $y=ax+b$ comme diamètre conjugué des cordes parallèles à Oy.

L. SIMON, à Châlons.

Bonnes solutions par MM. AMBLARD, à Ruines ; BROS ; G. FOUCRY ; Bertrand DE LER SALUCES, à Paris ; H. LE SUEUR, à Nantes ; MORET ; Jean SOUDET, lycée de Rouen ; Gh. GIUNCU.

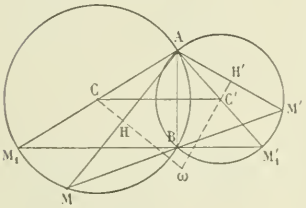
GÉOMÉTRIE

1659. — *On considère deux cercles* C *et* C′ *se coupant aux points* A *et* B ; *par le point* B *on mène une sécante variable qui rencontre à nouveau les cercles en* M *et* M′.

Trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle AMM′ *et le lieu du centre de ce cercle.*

Construire les points de contact de l'enveloppe avec les cercles C *et* C′.

Solution géométrique. — Le triangle AMM′ reste semblable à lui-même, car l'angle M a même mesure que la moitié de l'arc AB du cercle C et l'angle M′ a même mesure que la moitié de l'arc AB du cercle C′, l'angle MAM′ est donc égal à l'angle CAC′, on s'en rend compte aisément en menant la sécante $M_1BM'_1$ parallèle à la ligne des centres CC′.



Le centre ω du cercle circonscrit au triangle AMM′ est situé à l'intersection des perpendiculaires CH et C′H′ aux côtés respectifs AM et AM′ ; mais l'angle ω est constant et supplémentaire de l'angle MAM′ lorsque les points M et M′ sont de part et d'autre du point B, il est au contraire égal à l'angle MAM′ quand les points M et M′ sont d'un même côté du point B ; le lieu du point ω est donc le cercle γ circonscrit au triangle ACC′.

Désignons par γ_1 le cercle circonscrit au triangle $AM_1M'_1$, c'est l'homothétique du cercle γ (A centre d'homothétie, 2 rapport d'homothétie) ; soit ω_1 l'homothétique du point ω, le point de contact du cercle ω avec son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la tangente en ω_1 au cercle γ_1.

L'enveloppe de ce cercle est donc la podaire du point A par rapport au cercle γ_1. C'est une cardioïde facile à construire.

Les cercles C et C′ font partie du groupe (ω), il suffit pour le voir de faire coïncider la sécante MBM′ avec les tangentes aux deux cercles en B ; on obtiendra donc le point de contact de ces deux cercles avec la cardioïde en menant au cercle γ_1 les tangentes en M_1 et M'_1 ; les seconds points d'intersection de ces droites avec les cercles C et C′ déterminent les points de contact cherchés.

BROS.

Solutions analogues : MM. Boulingand, à Nantes ; P. Favre, étudiant à Lyon ; M. Constandaki ; Ch. Guillerme, au lycée de Bourg.

Bonnes solutions de M. G. Lach, à Denain ; Groscolas ; Gh. Giuncu ; H. Janois.

Solution analytique. — Pour traiter la question par le calcul, on peut prendre pour origine le point A, pour axe des y la droite AB et pour axe des x une parallèle à la ligne des centres menée par A, les équations des deux cercles fixes seront

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2a'x - 2by = 0,$$

0 et $2b$ sont les coordonnées du point B.

Une droite passant en ce point a pour équation $y - 2b = \lambda x$, et les rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre avec le premier cercle ont pour équation

$$2b(x^2 + y^2) - 2(ax + by)(y - \lambda x) = 0 ;$$

l'un d'eux est l'axe des y, $x = 0$, et l'autre a pour équation

$$bx - a(y - \lambda x) + b\lambda y = 0, \qquad \text{ou} \qquad (b + a\lambda)x - (a - b\lambda)y = 0.$$

Pour l'autre cercle, on a de même

$$(b + a'\lambda)x - (a' - b\lambda)y = 0.$$

Considérons maintenant le cercle demandé

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 ;$$

son axe radical avec le premier cercle est $(\alpha - a)x + (\beta - b)y = 0$; il doit être identique à

$$(b + a\lambda)x + (b\lambda - a)y = 0.$$

On a donc

$$\frac{b+a\lambda}{\alpha-a}=\frac{b\lambda-a}{\beta-b}.$$

Le second cercle donnera de même

$$\frac{b+a'\lambda}{\alpha-a'}=\frac{b\lambda-a'}{\beta-b},$$

et on aura le lieu en éliminant λ entre ces deux équations.

La première donne de suite

$\lambda(a\beta-b\alpha)+b(\beta-b)+a(\alpha-a)=0,$ et la seconde $\lambda(a'\beta-b\alpha)+b(\beta-b)+a'(\alpha-a')=0.$

Le lieu du centre a donc pour équation

$$(a\beta-b\alpha)[b(\beta-b)+a'(\alpha-a')]-(a'\beta-b\alpha)[b(\beta-b)+a(\alpha-a)]=0.$$

Il est facile de voir que c'est un cercle qui passe à l'origine. Ce cercle a pour équation

$$b(a-a')(\alpha^2+\beta^2)-(a'^2+b^2)(a\beta-b\alpha)+(a^2+b^2)(a'\beta-b\alpha)=0,$$

ou

$$b(\alpha^2+\beta^2)+\beta(aa'-b^2)-b(a+a')\alpha=0.$$

La première forme montre que le cercle passe aux centres des deux cercles. C'est donc le cercle circonscrit au triangle ACC'.

L'enveloppe du cercle mobile est alors une cardioïde facile à trouver.

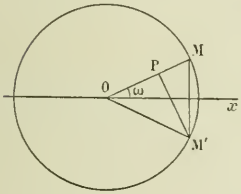
L. SIMON, à Châlons-sur-Marne.

Bonnes solutions géométriques de MM. J. Soudet, à Rouen; G. Garbe, à Bordeaux : R. Bouvaist; L. Montaut, à Alger.
Bonne solution analytique et géométrique de M. G Foucay, à Roanne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1650. — *Un point* M *est mobile sur un cercle fixe* O. *Du symétrique* M' *de* M *par rapport à un diamètre fixe* Ox, *on abaisse une perpendiculaire* $\overline{MP}$ *sur* OM. *Quel est le lieu du point* P ?

Nous allons montrer que ce lieu est une rosace à quatre branches.



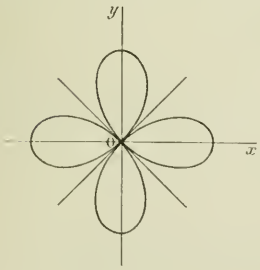
Soit en effet ω l'angle de Ox avec OM et ρ la valeur algébrique du segment $\overline{OP}$. L'angle de OM' avec OM est évidemment 2ω, puisque M' est symétrique de M par rapport à Ox; donc on a

$$\rho=a\cos 2\omega,$$

a étant le rayon du cercle. C'est là l'équation en coordonnées polaires de la courbe.

Construisons cette courbe : il suffit pour cela de faire varier ω de 0 à 2π. Si nous changeons ω en $2\pi-\omega$, ρ ne change pas; il y a symétrie par rapport à Ox.

Si nous changeons ω en $\pi-\omega$, ρ ne change pas ; symétrie par rapport à Oy. Si nous changeons enfin ω en $\frac{3\pi}{2}-\omega$, ρ change de signe, et il y a symétrie par rapport à la première bissectrice.



On verrait de même qu'il y a symétrie par rapport à la deuxième.

Faisons donc varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$:

ω	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	décr.	0

d'où la courbe ci-contre.

Il était évident que la courbe serait symétrique par rapport à Ox et Oy, et par rapport aux deux bissectrices.

L'équation cartésienne de la courbe s'obtient facilement. On a en effet

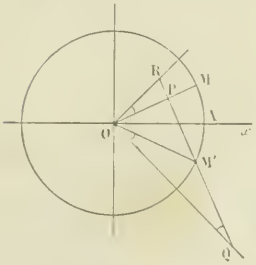
$$\rho = a(\cos^2\omega - \sin^2\omega) = a\left(\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}\right), \qquad \text{puis} \qquad \rho^3 = a(x^2 - y^2),$$

ou enfin

$$(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

La courbe est du sixième degré ; l'origine est un point quadruple.

Remarque. — On définit en général la rosace comme la podaire d'un point O sur une droite de longueur constante, s'appuyant sur deux droites rectangulaires passant par le point. Nous allons montrer que le lieu trouvé correspond à cette définition.



Soient Q et R les points de rencontre de M'P avec les deux bissectrices ; je dis que QR garde une longueur constante égale à $2a$; en effet, j'ai, par symétrie,

$$\widehat{ROP} = \widehat{QOM'},$$

et d'autre part $\widehat{ROP}$ est égal à $\widehat{OQM'}$ comme ayant ses côtés perpendiculaires à ceux de $\widehat{OQM'}$; donc le triangle QOM' est isocèle et $M'Q = a$; on verrait de même que $M'R = a$; donc $QR = 2a$.

PAUL WAHL, lycée Janson.

Bonnes solutions : MM. G. BOULIGAND ; L. MONTAUT, à Alger ; P. FAYRE ; Mlles C. M. ; A. G, à Paris : Isabelle CROZIER ; C. GUILLERME ; M. BONNARD, lycée Janson ; E. N. BARISIEN.

Assez bonnes solutions : MM. J. SOUDET ; L. SIMON ; DUPENDANT ; J. D. DUFAUT ; G. DEMILLY ; G. LACH ; H. LE SUEUR ; NABOULET ; AMBLARD, C. VERNIÈRES, élève à l'École Centrale.

Reçu dernièrement de bonnes solutions de : MM. D. GEORGESCU, à Bucarest : J. VÉROTS, à Lyon : BROS, à Albi ; A. BARRIANT ; H. NIOX-CHATEAU : G. FOUCRY, à Rodune ; H. JANOIS ; R. MANEN.

QUESTIONS PROPOSÉES

1735. — Montrer que si l'on effectue la division

$$\frac{x^{3m} + x^{2m} + x^m + 1}{x^4 + x^2 + x + 1},$$

elle se fera exactement pour m impair. Si m est pair, il y aura deux cas : 1° Si m est un multiple de 4, le reste de la division sera 4, quel que soit x ; 2° si m est un multiple de 4 augmenté de 2, le reste de la division sera $2(x^2 + 1)$.

E.-N. BARISIEN.

1736. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la partie réelle et le coefficient de i pour chacune des racines imaginaires de l'équation

$$z^6 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 = 0.$$

P. BRIZARD.

1737. — On donne un cercle de centre O et on mène par un point fixe extérieur A une droite AP rencontrant le cercle en P ; sur AP on considère le point M tel que $OM = MP$.

1° Lieu du point M.

2° Lieu de l'orthocentre et du point de concours des bissectrices du triangle OMP.

3° Lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

4° Enveloppe de ce cercle.

P. ALBERTINI, à Nice.

1738. — Trouver l'enveloppe des plans qui coupent deux sphères données suivant deux cercles orthogonaux.

Discussion.

Trouver aussi le lieu des centres des cercles sections de l'une des sphères.

G. PÉLISSIER.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 2. Novembre 1908.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

par M. **P. Brizard**, élève de Mathématiques spéciales.

Considérons une équation linéaire à coefficients constants

$$(1)\qquad a_0\frac{d^m y}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+a_m y=f(x),$$

que je me propose d'intégrer.

Soit

$$(2)\qquad A(\alpha)=a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\cdots+a_m=0$$

son équation caractéristique.

Je dis que l'intégration de l'équation (1) pourra se ramener à l'intégration d'une équation d'ordre inférieur à m, et que si l'équation (2) a une racine d'ordre p, la nouvelle équation différentielle sera d'ordre $m-p$.

En effet, posons $\qquad y=uv;$

l'équation (1) devient

$$a_0\left(u\frac{d^m v}{dx^m}+C_1^m\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}}\frac{du}{dx}+C_2^m\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}}\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+v\frac{d^m u}{dx^m}\right)+\cdots$$
$$+a_{m-p}\left(u\frac{d^p v}{dx^p}+C_1^p\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}\frac{du}{dx}+\cdots+v\frac{d^p u}{dx^p}\right)+\cdots$$
$$+a_{m-1}\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)+a_m uv=f(x),$$

ou encore

$$(3)\qquad u\left(a_0\frac{d^m v}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}}+\cdots+a_m v\right)+\cdots$$
$$+\frac{d^p u}{dx^p}\left(a_0C_p^m\frac{d^{m-p}v}{dx^{m-p}}+a_1C_p^{m-1}\frac{d^{m-p-1}v}{dx^{m-p-1}}+\cdots+a_{m-p}v\right)+\cdots+a_0v\frac{d^m u}{dx^m}=f(x).$$

Déterminons v par la condition

$$(4)\qquad a_0\frac{d^m v}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}}+\cdots+a_m v=0.$$

Soit α une racine d'ordre p de l'équation caractéristique. L'équation (4) sera satisfaite pour

$$v=e^{\alpha x}$$

et, en remarquant que

$$A(\alpha)=0,\qquad A'(\alpha)=0,\qquad A''(\alpha)=0,\qquad \ldots,\qquad A^{p-1}(\alpha)=0,\qquad A^{p}(\alpha)\neq 0,$$

l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}\frac{d^p u}{dx^p}+\cdots+a_0\frac{d^m u}{dx^m}=e^{-\alpha x}f(x)$$

ou, en posant $\dfrac{d^p u}{dx^p}=z,$

$$a_0\frac{d^{m-p}z}{dx^{m-p}}+\cdots+\frac{A^{(p)}(\alpha)}{p!}z=e^{-\alpha x}f(x).$$

La proposition est donc établie.

Appliquons cette méthode à l'équation du deuxième ordre

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x). \tag{5}$$

Posons $\qquad A(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c, \qquad y = uv.$

L'équation (5) devient

$$a(uv'' + 2u'v' + u''v) + b(uv' + u'v) + cuv = f(x)$$

ou

$$u'(av'' + bv' + cv) + u'(2av' + bv) + au''v = f(x); \tag{6}$$

faisons dans cette équation

$$av'' + bv' + cv = 0, \qquad \text{ou} \qquad v = e^{\alpha_1 x},$$

α_1 et α_2 étant les racines de l'équation $A(\alpha) = 0$.

L'équation (6) devient :

$$A'(\alpha_1)u' + au'' = e^{-\alpha_1 x} f(x). \tag{7}$$

Nous supposerons d'abord $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

On tire facilement de l'équation (7)

$$u' = \frac{e^{-\frac{A'(\alpha_1)}{a}x}}{a} \int e^{\left[\frac{A'(\alpha_1)}{a} - \alpha_1\right]x} f(x)\,dx.$$

Nous ne mettons pas de constante arbitraire et nous nous bornons à trouver une intégrale particulière de l'équation proposée.

Remarquons que

$$\frac{A'(\alpha_1)}{a} - \alpha_1 = \alpha_1 + \frac{b}{a} = -\alpha_2;$$

on a donc

$$u' = \frac{e^{-\frac{A'(\alpha_1)}{a}x}}{a} \int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx,$$

d'où $\quad u = \frac{1}{a}\int e^{-\frac{A'(\alpha_1)}{a}x}dx \int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx \qquad$ et $\qquad y = \frac{e^{\alpha_1 x}}{a}\int e^{-\frac{A'(\alpha_1)}{a}x}dx \int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx,$

puis, en intégrant par parties,

$$y = \frac{1}{a(\alpha_1 - \alpha_2)}\left[e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx - e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx\right]. \tag{8}$$

Dans le cas où $f(x)$ est un polynome, on peut mettre la formule (8) sous une autre forme.

Posons

$$f(x) = z, \qquad e^{-\alpha_1 x}dx = dt,$$

$$f'(x)dx = dz, \qquad -\frac{e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1} = t;$$

on a

$$\int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx = -\frac{e^{-\alpha_1 x} f(x)}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}\int e^{-\alpha_1 x} f'(x)\,dx;$$

de même

$$\int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx = -\frac{e^{-\alpha_2 x} f(x)}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2}\int e^{-\alpha_2 x} f'(x)\,dx.$$

En intégrant de nouveau par le même procédé, et continuant ainsi jusqu'à ce que la dérivée n^e de $f(x)$ se réduise à une constante (si $f(x)$ est de degré n), puis remplaçant les intégrales par leurs valeurs dans la formule (8), on obtient

$$y = \frac{1}{a\alpha_1\alpha_2}\left[f(x) + \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right)f'(x) + \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)f''(x) + \left(\frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^3}\right)f'''(x) + \cdots\right], \tag{9}$$

la suite s'arrête d'elle-même.

L'équation (8) peut s'écrire sous une forme plus symétrique.

En effet, on a

$$A(\alpha) = a(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2),$$

$$A'(\alpha_1) = a'\alpha_1 - \alpha_2), \qquad A'(\alpha_2) = a(\alpha_2 - \alpha_1),$$

donc

$$(10) \qquad y = \frac{e^{\alpha_1 x}}{A'(\alpha_1)} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx + \frac{e^{\alpha_2}}{A'(\alpha_2)} \int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ les expressions (8) et (10) deviennent illusoires ; on peut dans ce cas opérer de deux manières.

L'équation (7) se réduit à $\qquad au'' = e^{-\alpha_1 x} f(x)$;

on n'aurait qu'à intégrer deux fois ; il est plus simple d'appliquer à l'expression (8) la règle de L'Hospital ; on a ainsi

$$(11) \qquad y = \frac{1}{a} e^{\alpha_1 x} \left[x \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx - \int x e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \right].$$

Nous avons ainsi des intégrales particulières de l'équation (5) ; si nous voulons les intégrales générales, nous n'avons qu'à y ajouter les mêmes expressions dans lesquelles on aurait remplacé les intégrales par des constantes ; on a ainsi

$$(10') \qquad Y = y + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}. \qquad\qquad (11') \qquad Y = y + (C_1 x + C_2) e^{\alpha_1 x}.$$

Généralisation. — Je dis que si nous considérons l'équation

$$(1) \qquad a_0 \frac{d^m y}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + a_m y = f(x),$$

on a, dans le cas des racines simples de l'équation caractéristique, la formule générale

$$(12) \qquad y = \frac{e^{\alpha_1 x}}{A'(\alpha_1)} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx + \frac{e^{\alpha_2 x}}{A'(\alpha_2)} \int e^{-\alpha_2 x} f(x)\,dx + \cdots + \frac{e^{\alpha_m x}}{A'(\alpha_m)} \int e^{-\alpha_m x} f(x)\,dx.$$

En effet, nous avons vu qu'on peut remplacer l'équation (1) par une autre équation d'ordre $m - 1$:

$$(13) \qquad a_0 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \frac{A^{(m-1)}(\alpha_1)}{(m-1)!} \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \cdots + A'(\alpha_1) z = e^{-\alpha_1 x} f(x) :$$

nous supposerons démontrée la formule (12) pour une équation d'ordre $m - 1$. On tire alors de l'équation (13) :

$$u' = z = \frac{e^{\beta_1 x}}{B'(\beta_1)} \int e^{-(\alpha_1 + \beta_1) x} f(x)\,dx + \frac{e^{\beta_2 x}}{B'(\beta_2)} \int e^{-\alpha_1 + \beta_2 x} f(x)\,dx + \cdots + \frac{e^{\beta_{m-1} x}}{B'(\beta_{m-1})} \int e^{-\alpha_1 + \beta_{m-1} x} f(x)\,dx,$$

en posant

$$B(\beta) = a_0 \beta^{m-1} + \frac{A^{m-1}(\alpha_1)}{(m-1)!} \beta^{m-2} + \cdots + A'(\alpha_1) = 0$$

et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ étant les racines de cette équation.

On a donc

$$u = \sum_{p=1}^{p=m-1} \int \frac{e^{\beta_p x}}{B'(\beta_p)}\,dx \int e^{-\alpha_1 + \beta_p x} f(x)\,dx.$$

Posons

$$e^{\beta_p x}\,dx = dr, \qquad \int e^{-(\alpha_1 + \beta_p) x} f(x)\,dx = t, \qquad \frac{e^{\beta_p x}}{\beta_p} = r, \qquad e^{-\alpha_1 + \beta_p x} f(x)\,dx = dt ;$$

on a

$$u = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{\beta_p B'(\beta_p)} \left[e^{\beta_p x} \int e^{-(\alpha_1 + \beta_p) x} f(x)\,dx - \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \right],$$

d'où

$$(14)\qquad y = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{\beta_p B'(\beta_p)} \left[e^{\alpha_1 + \beta_p x} \int e^{-(\alpha_1 + \beta_p)x} f(x)\,dx - e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \right].$$

Or considérons l'équation

$$A(\alpha) = a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0.$$

Soit α_1 une racine de cette équation et posons $\alpha = \beta + \alpha_1$:
on a, d'après la formule de Taylor,

$$A(\alpha) = A(\alpha_1 + \beta) = A(\alpha_1) + \beta \frac{A'(\alpha_1)}{1} + \beta^2 \frac{A''(\alpha_1)}{2} + \cdots + \beta^m a_0$$

ou

$$A(\alpha) = \beta \left[a_0 \beta^{m-1} + \frac{A^{m-1}(\alpha_1)}{(m-1)!} \beta^{m-2} + \cdots + A'(\alpha_1) \right].$$

La partie entre crochets est précisément $B(\beta)$, donc, on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2, \qquad \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_3, \qquad \alpha_1 + \beta_{m-1} = \alpha_m,$$

donc l'équation (14) peut s'écrire

$$y = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{\beta_p B'(\beta_p)} \left[e^{\alpha_{p+1} x} \int e^{-\alpha_{p+1} x} f(x)\,dx - e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \right]$$

ou

$$(15)\qquad y = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{e^{\alpha_{p+1} x}}{\beta_p B'(\beta_p)} \int e^{-\alpha_{p+1} x} f(x)\,dx - e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{\beta_p B'(\beta_p)}.$$

D'autre part

$$B(\beta) = a_0(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)\ldots(\beta - \beta_{m-1}),$$
$$B'(\beta_p) = a_0(\beta_p - \beta_1)(\beta_p - \beta_2)\ldots(\beta_p - \beta_{m-1});$$

or

$$\beta_p - \beta_q = \alpha_{p+1} - \alpha_{q+1}, \qquad \beta_p = \alpha_{p+1} - \alpha_1,$$

donc

$$\beta_p B'(\beta_p) = a_0(\alpha_{p+1} - \alpha_1)(\alpha_{p+1} - \alpha_2)\ldots(\alpha_{p+1} - \alpha_m) = A'(\alpha_{p+1}),$$

d'où

$$y = \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{e^{\alpha_{p+1} x}}{A'(\alpha_{p+1})} \int e^{-\alpha_{p+1} x} f(x)\,dx - e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x} f(x)\,dx \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{A'(\alpha_{p+1})}.$$

D'ailleurs on a, d'après l'identité d'Euler,

$$\frac{1}{A'(\alpha_1)} + \frac{1}{A'(\alpha_2)} + \cdots + \frac{1}{A'(\alpha_m)} = 0,$$

par suite

$$\sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{A'(\alpha_{p+1})} = -\frac{1}{A'(\alpha_1)};$$

on a donc

$$y = \sum_{p=1}^{p=m} \frac{e^{\alpha_p x}}{A'(\alpha_p)} \int e^{-\alpha_p x} f(x)\,dx$$

et, comme l'équation est vérifiée pour une équation du deuxième ordre, elle est générale.

Applications. — Soit l'équation $a \dfrac{d^2y}{dx^2} + b \dfrac{dy}{dx} + cy = f(x)$.

1°

$$f(x) = e^{\alpha_1 x},$$

$$y = \frac{e^{\alpha_1 x}}{A(\alpha_1)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, \qquad \text{si} \qquad \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$y = \frac{e^{\alpha_1 x}}{A(\alpha_1)} + (C_1 x + C_2) e^{\alpha_1 x}, \qquad \text{si} \qquad \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$y = \frac{e^{\alpha_1 x} x}{a(\alpha_1 - \alpha_2)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, \qquad \text{si} \qquad \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$y = \frac{x^2 e^{\alpha_1 x}}{2a} + (C_1 x + C_2) e^{\alpha_1 x}, \qquad \text{si} \qquad r = \alpha_1 = \alpha_2.$$

2°
$$f(x) = \cos px,$$
$$y = \frac{1}{a} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cos px - (\alpha_1 + \alpha_2) p \sin px}{(\alpha_1^2 + p^2)(\alpha_2^2 + p^2)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}.$$

3°
$$f(x) = kx^r.$$

Nous nous servirons de la formule (9) et nous aurons

$$y = \frac{k}{a\alpha_1\alpha_2}\left[x^r + \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) r x^{r-1} + \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right) r(r-1) x^{r-2} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^3}\right) r(r-1)(r-2) x^{r-3} + \cdots \right].$$

ALGÈBRE

1670. — *Soit* $$f(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4.$$

Démontrer que les deux polynomes du quatrième degré

$$2\frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3} - \left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]^2, \qquad 2\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]^3 - 6\frac{df}{dx} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3} + 9\left[\frac{df}{dx}\right]^2 \frac{d^4 f}{dx^4}$$

prennent, quand on y substitue l'une des racines de l'équation $f(x) = 0$, *des valeurs indépendantes de la racine choisie. Calculer ces valeurs en fonction des coefficients de* f.

1° Soit
$$\varphi(x) = 2\frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3} - \left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]^2;$$

on a, après simplifications,
$$\varphi'(x) = 2\frac{df}{dx} \cdot \frac{d^4 f}{dx^4};$$

or
$$\frac{d^4 f}{dx^4} = 24a_0, \qquad \text{donc} \qquad \varphi'(x) = 48a_0 \frac{df}{dx}.$$

Par suite

(1)
$$\varphi(x) = 48a_0 f(x) + C,$$

C étant une constante.

On voit donc que le résultat de la substitution à x dans $\varphi(x)$ de l'une quelconque des racines de $f(x) = 0$ est une valeur indépendante de la racine choisie, la constante C. Pour calculer C, nous faisons $x = 0$ dans les deux membres de l'identité (1) : il vient

$$\varphi(0) = 48a_0 a_4 + C.$$

Or
$$\varphi(0) = 2f'(0).f'''(0) - [f''(0)]^2,$$

mais
$$f'(0) = 4a_3, \qquad f''(0) = 12a_2, \qquad f'''(0) = 24a_1,$$

donc
$$\varphi(0) = 192a_3 a_1 - 144a_2^2.$$

Par suite
$$C = 192a_3 a_1 - 48a_0 a_4 - 144a_2^2 = 48(4a_3 a_1 - a_0 a_4 - 3a_2^2) = -48I,$$

I étant l'invariant équianharmonique.

2° Soit encore
$$\varphi(x) = 2\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]^3 - 6\frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^3 f}{dx^3} + 9\left[\frac{df}{dx}\right]^2 \frac{d^4 f}{dx^4},$$

d'où, après simplification et en remarquant que $\frac{d^5 f}{dx^5} = 0$,

$$\varphi'(x) = 6\frac{df}{dx}\left[2\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^4 f}{dx^4} - \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)^2\right].$$

Soit alors
$$\theta(x) = 2\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^4f}{dx^4} - \left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)^2,$$
on en tire
$$\theta'(x) = 0,$$
ce qui montre que $\theta(x)$ étant une constante C_1, le second polynome φ considéré est bien du quatrième degré.
$$\varphi'(x) = 6C_1\frac{df}{dx} \qquad \text{et par suite} \qquad \varphi(x) = 6C_1 f(x) + C_2.$$

Le résultat de la substitution dans $\varphi(x)$ d'une quelconque des racines de $f(x)$ est ici C_2, indépendant de la racine choisie.

On a d'ailleurs
$$\varphi(0) = 6C_1 f(0) + C_2, \qquad \text{mais} \qquad C_1 = \theta(0) = 2f''(0)f^{IV}(0) - [f'''(0)]^2 = 24^2(a_2a_0 - a_1^2).$$
Ensuite
$$\varphi(0) = 2.12^3(a_2^3 - 2a_1a_2a_3 + a_0a_3^2),$$
donc $C_2 = 2.12^3(a_2^3 - 2a_1a_2a_3 + a_0a_3^2) - 6.24^2a_4(a_2a_0 - a_1^2) = 2.12^3(a_2^3 - 2a_1a_2a_3 + a_0a_3^2 - a_2a_0a_4 + a_4a_1^2)$,
ou
$$C_2 = -2.12^3\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -2.12^3 J,$$
J étant l'invariant harmonique.

En appelant x_1, x_2, x_3, x_4 les racines du polynome f, on peut dire, pour les deux polynomes φ considérés, que $\varphi(x_1)$ est une fonction symétrique des racines de f; d'ailleurs, l'expression générale des polynomes φ du quatrième degré, à une variable, pour lesquels cette propriété est réalisée est $hf + k$, h et k étant deux nombres.

A. DARMON, élève au lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. W. Mérigot, à Paris ; P. Brizard, à Paris ; Bros ; L. Simon, section normale à Châlons ; L. Gauthier, à Fermanville ; H. Le Sueur, à Nantes ; Groscolas ; A. Duby, à Dijon ; R. Manen, à Albi ; Gh. Giuncu, à Jassy.

MÉCANIQUE

1671. — *On donne un paraboloïde de révolution* (P), *d'équation* $x^2 + y^2 = 2pz$.

1° *Déterminer le mouvement d'un mobile qui se déplace sur le paraboloïde de façon que sa projection sur* Oz *ait un mouvement uniforme et que sa projection sur* xOy *obéisse à la loi des aires. Nature de la projection de la trajectoire sur* xOy.

2° *On considère toutes les trajectoires* (C), *obtenues en laissant seul constant le rapport de la vitesse suivant* Oz *à la constante des aires. Démontrer que toutes les tangentes à toutes les courbes* (C) *sont tangentes à un même paraboloïde de révolution* (Q), *de même axe et de même sommet que* (P). *Trouver le lieu des points de contact avec* (Q) *des tangentes à une même courbe* (C) *et le lieu des traces de ces tangentes sur* xOy.

3° *Chercher l'hodographe relatif à une trajectoire déterminée. Chercher également le lieu* (Γ) *des extrémités des vecteurs accélération. Construire la projection de* (Γ) *sur* xOy.

Si on considère parmi toutes les trajectoires précédentes celles qui correspondent à une même valeur de la constante des aires, les courbes (Γ) *correspondantes engendrent une surface de révolution, dont on cherchera l'équation et dont on construira la méridienne principale.*

1° Prenons des coordonnées polaires r et θ, dans le plan des xy, et traduisons les conditions imposées dans l'énoncé ; nous aurons
$$z = v_0t + z_0, \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = c.$$

D'autre part, nous avons aussi $r^2 = 2pz$, puisque le point est astreint à se mouvoir sur le paraboloïde; par conséquent $\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{2pz} = \frac{c}{2p(v_0 t + z_0)}$. Il n'y a plus qu'à intégrer pour obtenir θ :

$$\theta = \frac{c}{2pv_0} \mathrm{L} \frac{v_0 t + z_0}{\mathrm{A}},$$ A étant une constante arbitraire.

Cette équation donne $z = \mathrm{A} e^{\frac{2pv_0}{c}\theta}$, et, par suite de $r^2 = 2pz$,

$$r = \sqrt{2p\mathrm{A}}\, e^{\frac{pv_0}{c}\theta}. \tag{1}$$

Telle est l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xy. Elle représente une spirale logarithmique.

2° Quand $\frac{v_0}{c}$ est constant, on obtient la courbe $r = \lambda e^{m\theta}$, $\left(m = \frac{pv_0}{c}\right)$, m désignant un nombre constant et λ une variable arbitraire. On a ainsi une infinité de trajectoires et les coordonnées d'un point de l'une d'elles sont

$$x = \lambda e^{m\theta} \cos\theta, \qquad y = \lambda e^{m\theta} \sin\theta, \qquad z = \frac{\lambda^2}{2p} e^{2m\theta};$$

elles ne dépendent, pour chaque trajectoire, que de la variable θ. Les paramètres directeurs de la tangente sont donc

$$\frac{dx}{d\theta} = \lambda e^{m\theta}(m\cos\theta - \sin\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \lambda e^{m\theta}(m\sin\theta + \cos\theta), \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{\lambda^2}{p} m e^{2m\theta};$$

en supprimant le facteur $\lambda e^{m\theta}$ et posant $m = \operatorname{tg}\varphi$, on obtient $\sin(\varphi - \theta)$, $\cos(\varphi - \theta)$, $\frac{\lambda}{p}\sin\varphi e^{m\theta}$. Les coordonnées d'un point quelconque de la tangente sont donc

$$x = \lambda e^{m\theta}\cos\theta + \rho\sin(\varphi - \theta), \qquad y = \lambda e^{m\theta}\sin\theta + \rho\cos(\varphi - \theta), \qquad z = \frac{\lambda}{2p} e^{m\theta}(\lambda e^{m\theta} + 2\rho\sin\varphi).$$

Cela posé, considérons un paraboloïde de révolution autour de Oz, $x^2 + y^2 = 2\mu pz$, et écrivons que la droite précédente le rencontre en deux points confondus; nous aurons d'abord une équation du second degré en ρ, qui donnera les ρ des deux points de rencontre

$$\rho^2 + 2\lambda\rho e^{m\theta}\sin\varphi + \lambda^2 e^{2m\theta} = \lambda\mu e^{m\theta}(\lambda e^{m\theta} + 2\rho\sin\varphi);$$

puis, nous écrirons que cette équation a une racine double, ce qui donne

$$\lambda^2 e^{2m\theta}\sin^2\varphi(1 - \mu)^2 - \lambda^2 e^{2m\theta}(1 - \mu) = 0;$$

nous tirons de là $\mu = 1$, ce qui correspond au paraboloïde donné et $\mu\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 0$, ou $\mu = -\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{m^2}$, qui correspond au second paraboloïde indiqué dans l'énoncé. Les tangentes aux diverses courbes (C) sont donc tangentes aux deux paraboloïdes

$$x^2 + y^2 = 2pz, \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = -\frac{2p}{m^2}z.$$

Le ρ du point de contact de la tangente avec le second paraboloïde (Q) a pour valeur

$$\rho = \lambda(\mu - 1)e^{m\theta}\sin\varphi = -\frac{\lambda e^{m\theta}}{\sin\varphi};$$

les coordonnées de ce point sont donc

$$x = \frac{\lambda e^{m\theta}\sin\theta}{m}, \qquad y = -\frac{\lambda e^{m\theta}\cos\theta}{m}, \qquad z = -\frac{\lambda^2 e^{2m\theta}}{2p}.$$

Si l'on change θ en $\theta' + \frac{\pi}{2}$ et que l'on pose $\lambda' = \frac{\lambda e^{m\frac{\pi}{2}}}{m}$, on voit que x et y deviennent

$$x = \lambda' e^{m\theta'}\cos\theta', \qquad y = \lambda' e^{m\theta'}\sin\theta';$$

par conséquent la projection de cette courbe sur le plan des xy est une spirale logarithmique qui se

déduit de la projection de la courbe (C) par une homothétie suivie d'une rotation d'amplitude $-\frac{\pi}{2}$, le centre d'homothétie et le centre de rotation étant confondus avec l'origine.

Le lieu du point de rencontre de la tangente à la courbe (C) avec le plan des xy s'obtient en annulant z : on trouve ainsi

$$\varphi = -\frac{\lambda e^{m\theta}}{2\sin\varphi};$$

puis

$$x = \frac{\lambda e^{m\theta}}{2\sin\varphi}\sin(\theta+\varphi), \qquad y = \frac{-\lambda e^{m\theta}}{2\sin\varphi}\cos(\theta+\varphi).$$

On verra comme précédemment, en posant $\theta - \varphi = \theta' + \frac{\pi}{2}$, que cette courbe est une spirale logarithmique qui se déduit de la courbe (C) par une homothétie suivie d'une rotation.

3° Les coordonnées d'un point de l'hodographe sont

$$X = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \qquad Y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}, \qquad Z = \frac{dz}{dt} = v_0.$$

L'hodographe est donc une courbe plane située dans un plan parallèle au plan des xy, le plan $z = v_0$.

D'autre part,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{\lambda^2 e^{2m\theta}}, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{\lambda e^{m\theta}\sin(\varphi-\theta)}{\cos\varphi}, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\lambda e^{m\theta}\cos(\varphi-\theta)}{\cos\varphi};$$

par conséquent

$$X = \frac{c}{\lambda\cos\varphi}e^{-m\theta}\sin(\varphi-\theta), \qquad Y = \frac{c}{\lambda\cos\varphi}e^{-m\theta}\cos(\varphi-\theta).$$

Cette courbe est encore une spirale, qui se déduit de la courbe (C) par les opérations déjà indiquées précédées d'une inversion, c'est-à-dire en définitive par une inversion suivie d'une rotation.

Les composantes de l'accélération sont $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$;

or

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{\lambda\cos\varphi}e^{-m\theta}[-m\sin(\varphi-\theta) - \cos(\varphi-\theta)]\frac{d\theta}{dt} = -\frac{ce^{-m\theta}}{\lambda\cos^2\varphi}\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$\frac{dX}{dt} = \frac{-c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta}\cos\theta; \quad \text{on a de même} \quad \frac{dY}{dt} = \frac{-c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta}\sin\theta; \quad \text{et enfin} \quad \frac{dZ}{dt} = 0.$$

Les coordonnées de l'extrémité du vecteur accélération sont donc

$$x_1 = x + \frac{dX}{dt} = \cos\theta\left(\lambda e^{m\theta} - \frac{c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta}\right),$$

$$y_1 = y + \frac{dY}{dt} = \sin\theta\left(\lambda e^{m\theta} - \frac{c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta}\right),$$

$$z_1 = z + \frac{dZ}{dt} = \frac{\lambda^2}{2p}e^{2m\theta}.$$

La projection de la courbe ainsi décrite sur le plan des xy a pour équation en coordonnées polaires

$$r = \lambda e^{m\theta} - \frac{c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta};$$

son rayon vecteur est la différence des rayons vecteurs de deux spirales :

$$r = \lambda e^{m\theta}, \qquad r = \frac{c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta};$$

il s'annule pour

$$\theta = \frac{1}{4m}\log\frac{c^2}{\lambda^4\cos^2\varphi}.$$

Pour les grandes valeurs positives de θ, la courbe coïncide sensiblement avec la première spirale ; pour les grandes valeurs négatives de θ, elle coïncide sensiblement avec la seconde. Enfin r croît toujours avec θ. Il serait dès lors facile de tracer la courbe et d'en donner la forme générale.

Supposons maintenant c et v_0 constants et envisageons toutes les courbes (Γ). Nous avons, pour chacune d'elles,

$$r = \lambda e^{m\theta} - \frac{c^2}{\lambda^3\cos^2\varphi}e^{-3m\theta}, \qquad 2pz = \lambda^2 e^{2m\theta},$$

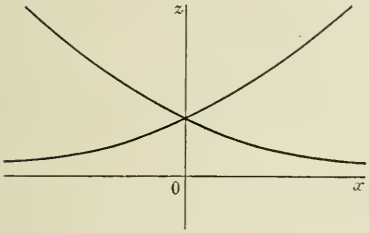
et le lieu de ces courbes s'obtient en éliminant λ entre les deux équations. Ce calcul évident donne

$$r = \sqrt{2pz} - \frac{c^2}{(2pz)^{\frac{3}{2}} \cos^2 \varphi}:$$

c est l'équation d'une surface de révolution autour de Oz et dont la méridienne a pour équation

$$x = \sqrt{2pz} - \frac{c^2}{(2pz)^{\frac{3}{2}} \cos^2 \varphi}, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{4p^2z^2 - c^2(1+m^2)}{2pz\sqrt{2pz}}.$$

Cette équation montre que la courbe est symétrique par rapport à Oz, qu'elle est tout entière du côté des z positifs et que pour z infini, x est infini comme $\sqrt{2pz}$. Il y a donc deux branches paraboliques dans la direction Oz, symétriques l'une de l'autre.



Il y a en outre un point double sur Oz, au point

$$z = \frac{c\sqrt{1+m^2}}{2p}.$$

Il est visible aussi que si l'on envisage la branche qui correspond à la valeur arithmétique du radical, x est une fonction croissante de z, qui croît de $-\infty$ à $+\infty$ quand z varie de 0 à $+\infty$. La courbe a dès lors la forme ci-contre.

BROS.

Bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Roanne : R. Auscher.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Solide commun a deux Cônes.

1702. — O, O′ *et* C, C′, *situés sur une même droite de bout sont les centres de deux sphères de même rayon* R. S, S′ *et* T, T′, *situés à un même niveau, sont les sommets respectifs de deux cônes circonscrits : l'un à la sphère* O, O′ *et l'autre à la sphère* C, C′.

Les axes de ces cônes sont de front.

On demande :

1° *De déterminer, par ses deux projections, le solide commun aux deux cônes ;*

2° *En l'éclairant par des rayons lumineux, tels que* LL′, *parallèles entre eux et inclinés à* 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$, *selon l'usage de déterminer les ombres propres au solide.*

Nota. *a) Les sphères n'ont pas d'existence réelle ; elles ne servent qu'à déterminer les cônes.*

b) On ne demande pas les ombres portées sur les plans de projection.

c) Pour les constructions on se servira de l'intersection des cônes avec le plan horizontal xy *qui passe par les points* x *et* y *où se coupent les tangentes au cercle telles que* S′x *et* T′x.

Le point courant de l'intersection des deux cônes sera désigné par la lettre m, m' *et la tangente en ce point par les lettres* mt, $m't'$.

Les constructions relatives à la recherche de l'intersection seront tracées en rouge. *Celles relatives aux ombres seront en* bleu.

Les lignes existantes (Intersection, contours apparents, séparatrices d'ombre ..) seront dessinées en trait noir plein (—) *pour les lignes* vues, *et* ponctué (...) *pour les lignes* cachées.

Les ombres vues seront recouvertes par des hachures bleues.

(*Ecole Polytechnique, Concours de 1908.*)

On sait que le contour apparent d'un cône circonscrit à une sphère se compose des deux génératrices dont les projections sont les tangentes au contour apparent de la sphère menées par la projection du sommet du

cône. On a donc immédiatement les contours apparents des deux cônes S et T sur chaque plan de projection. Chaque cône ayant son axe de front, le plan de front qui passe par le sommet est un plan de symétrie et contient le grand axe de l'ellipse section du cône par le plan horizontal $x'y'$, dont on a la vraie grandeur ; le centre de la projection horizontale de chaque ellipse est sur l'axe de la feuille, qui passe par le milieu de $x'y'$, et chaque petit axe a pour longueur la corde de bout intérieure à l'un des cônes et qui se projette verticalement en a'. Si l'on imagine que les deux cônes ont leurs axes dans le même plan de front, sans modifier leur projection verticale, ils sont circonscrits à la même sphère, et la corde considérée, commune aux deux plans de contact $a'b'$ et $a'i'$, a ses deux extrémités sur la surface de la sphère. Sa longueur est donc le diamètre du petit cercle horizontal dont le centre se projette en a'. Connaissant maintenant les deux axes de chaque ellipse on peut tracer les projections horizontales des bases des deux cônes donnés.

Intersection des deux surfaces. — Nous couperons les deux cônes par des plans passant par la ligne des sommets ST; leurs traces sur le plan des bases XY seront toutes parallèles à l'horizontale ST et donneront sur chaque ellipse les pieds des génératrices d'intersection dont il suffira de prendre les points communs pour avoir des points de la courbe cherchée. Nous obtenons les deux plans limites $d_1\delta_1$ et $d_2\delta_2$ en menant à chaque ellipse celle des tangentes parallèles à ST qui coupe l'autre ellipse et leur disposition montre qu'il y aura arrachement. Sur chaque génératrice telle que Td_1 nous obtenons des points de l'intersection tels que d_1 en chacun desquels la courbe est tangente à la génératrice de l'autre cône qui passe par ce point. On a ainsi quatre points de la courbe et leurs tangentes.

Points remarquables. — Nous chercherons tout d'abord s'il y a des points sur les génératrices de contour apparent, et pour cela nous mènerons les traces des plans auxiliaires par les pieds de ces génératrices. Ainsi le plan auxiliaire qui passe par le pied e_1 de la génératrice Te_1 nous donne deux points η_1 et η_2 sur cette génératrice — il n'y en a aucun sur la seconde génératrice de contour apparent horizontal du cône T. Nous en trouvons de même deux sur la génératrice Se_2 du second cône.

Les génératrices du contour apparent vertical étant dans le plan de front de l'axe pour chaque cône, leurs pieds se projettent horizontalement aux extrémités du grand axe de chaque ellipse. Nous aurons ainsi, en menant le plan auxiliaire par y_1, les deux génératrices du second cône Tf_1 et Tf_2 dont les projections verticales nous donnent les points φ'_1 et φ'_2 situés sur la génératrice $S'y'$.

On a les points le plus haut et le plus bas en prenant les génératrices situées dans le plan vertical ST. Ainsi Tg'_1 donne le point le plus bas γ'.

Nous avons donné la construction d'un point courant m, m et de la tangente en ce point, en utilisant le plan auxiliaire f_1f_2 et en menant les tangentes aux courbes de base en μ et f_2, pieds des génératrices qui se coupent en m, d'où la tangente tm, $t'm'$.

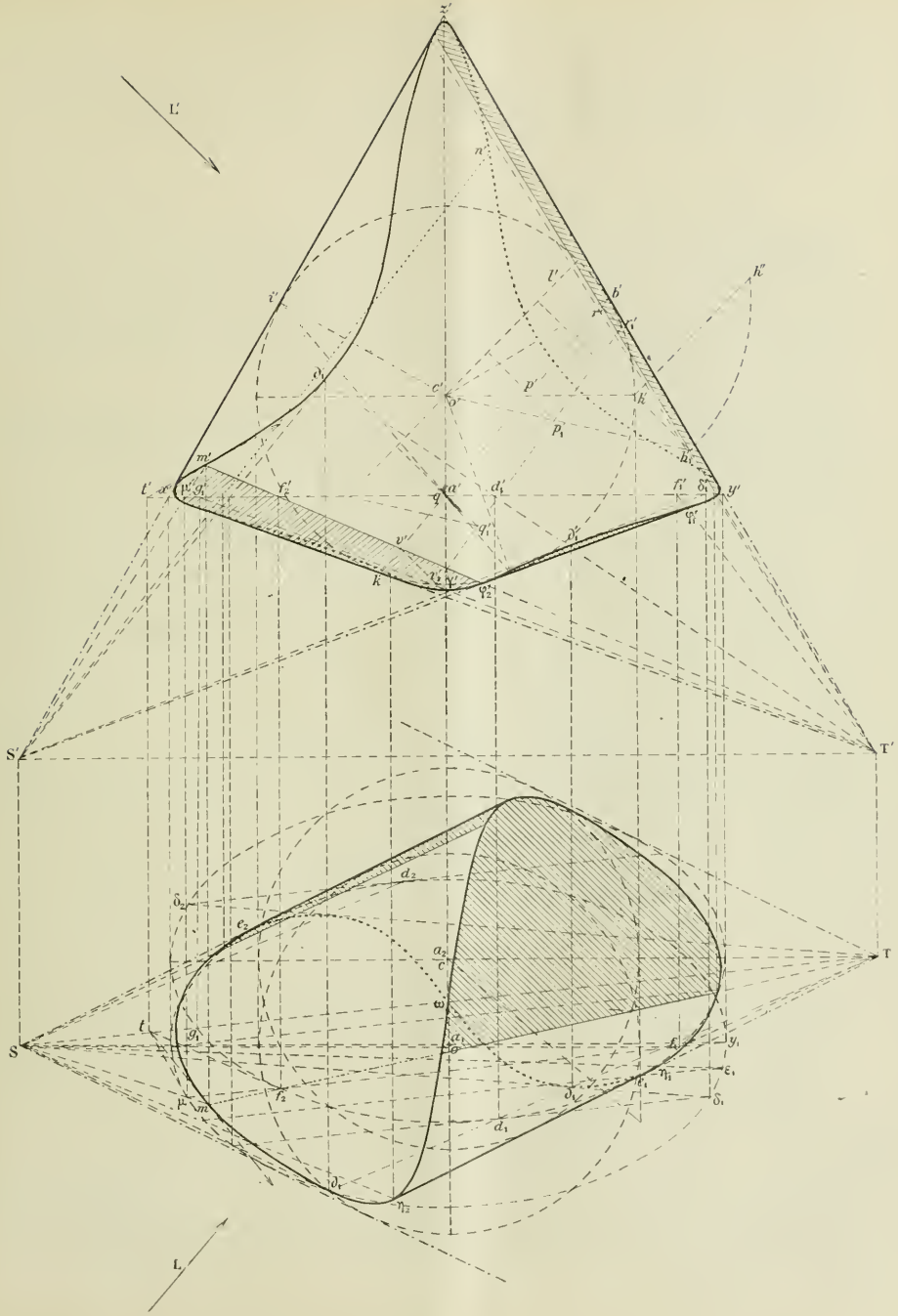
On passe de la projection horizontale de chaque point de l'intersection à sa projection verticale en déterminant la projection verticale de l'une des génératrices qui y passe, et pour cela il suffit de relever son pied sur la trace $x'y'$ du plan des bases.

Il est alors facile de tracer la courbe d'intersection sur chaque projection ; la détermination du solide commun ainsi que des parties vues et cachées n'offre aucune difficulté.

Ombre propre. — Sur chaque cône l'ombre propre est limitée par les génératrices de contact des plans tangents à la surface parallèles aux rayons lumineux ; il suffira d'en conserver ce qui reste sur le solide commun pour obtenir l'ombre propre de ce solide.

Pour déterminer les génératrices de contact sur le cône T par exemple, nous remarquerons qu'elles touchent la sphère inscrite sur le cercle de contact de cette sphère et du cylindre qui lui est circonscrit parallèlement aux rayons lumineux. Elles passent donc par les points communs à ce cercle de contact et au petit cercle suivant lequel le cône touche la sphère. Il suffit alors de prendre la droite d'intersection des plans de ces deux cercles et de chercher les points où elle coupe l'une des courbes de contact pour déterminer les génératrices cherchées.

On pourrait construire l'ellipse projection du cercle d'ombre sur la sphère, mais on peut aussi éviter de tracer cette courbe en rabattant son plan autour du diamètre de front $o'l'$ et en même temps la droite dont on a la projection verticale $b'k'$ et dont les points p' et q' viennent en p'_1 et q'_1. Cette droite coupe le grand cercle en r'_1 et s'_1 qui se relèvent en r' et s', d'où les génératrices cherchées $T'r'$ et $T's'$. Une construction analogue, mais simplifiée parce que la première en a déjà fourni les principaux éléments, fait connaître les génératrices d'ombre propre sur le second cône. On passe de la projection verticale à la projection horizontale en prenant les points où ces génératrices traversent le plan $x'y'$ des bases des deux cônes. On reconnaît qu'une seule des deux génératrices sur le second cône appartient au solide commun, c'est $s'n'$. En conservant sur chaque sur-


L'
L
S'
T'
S
T

face la portion des génératrices limitée par la courbe d'intersection, on obtient l'ombre propre demandée. Tout ce qui est dans l'ombre dans les parties vues sur chaque projection a été recouvert de hachures.

PHYSIQUE

1649. — *Des récipients en nombre n contenant la même masse d'eau à la même température initiale θ_0 peuvent communiquer entre eux de telle sorte que l'eau du 1er s'écoule dans le 2e, celle du 2e dans le 3e et ainsi de suite. On fait arriver dans le 1er de l'eau à 0°, à débit constant et à raison de m grammes par seconde; en même temps on ouvre toutes les communications de manière que la masse d'eau reste constante dans chaque récipient. Exprimer en fonction du temps la température du $n^{ième}$ vase en supposant que, dans chacun d'eux, le mélange se fasse instantanément.*

Considérons, à un moment donné, le $p^{ième}$ récipient. Dans l'intervalle de temps infiniment petit dt, il a perdu une quantité d'eau mdt à la température θ_p qui s'est trouvée remplacée par la quantité égale mdt à la température θ_{p-1} ; il en résulte un gain (négatif) de chaleur égal à $m(\theta_{p-1} - \theta_p)dt$. Or cette chaleur a fait varier de $d\theta_p$ la température de la masse M ; on peut donc écrire

$$Md\theta_p = m(\theta_{p-1} - \theta_p)dt.$$

Désignons par a le rapport $\frac{m}{M}$, c'est-à dire l'inverse du temps nécessaire à un récipient isolé pour se vider, et l'équation générale peut s'écrire $\frac{1}{a}\frac{d\theta_p}{dt} + \theta_p = \theta_{p-1}$. Pour intégrer, posons $\theta_p = uv$: $\frac{1}{a}\frac{udv + vdu}{dt} + uv = \theta_{p-1}$. Déterminons v de façon que le coefficient de u soit nul :

$$\frac{1}{a}\frac{dv}{dt} + v = 0, \qquad \text{d'où} \quad v = Ce^{-at}.$$

On peut supposer $C = 1$; nous aurons donc

$$\theta_p = ue^{-at} \qquad \text{avec} \qquad du = a\theta_{p-1}e^{at}dt.$$

Pour tous les récipients, on aura, pour $t = 0$, $\theta_p = u = \theta_0$.

Soit $p = 1$. On peut supposer θ_{p-1} constant et égal à 0. Donc u est constant et égal à sa valeur initiale θ_0,

$$\theta_1 = \theta_0 e^{-at}.$$

Soit $p = 2$, $\quad du = a\theta_0 dt$, d'où, avec la condition initiale $u = \theta_0(1 + at)$,

$$\theta_2 = \theta_0(1 + at)e^{-at}.$$

Soit $p = 3$, $\quad du = a\theta_0(1 + at)dt$, d'où $u = \theta_0\left(1 + \frac{at}{1} + \frac{a^2t^2}{1.2}\right)$,

$$\theta_3 = \theta_0\left(1 + \frac{at}{1} + \frac{a^2t^2}{1.2}\right)e^{-at}.$$

D'une manière générale, $\theta_n = \theta_0\left(1 + \frac{at}{1} + \frac{a^2t^2}{1.2} + \cdots + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-at}$.

Il est facile, en effet, de vérifier que la loi, supposée vraie pour n vases, l'est pour $n + 1$.

Remarquons qu'au bout du temps $\frac{1}{a}$ on a

$$\theta_n = \frac{\theta_0}{e}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

et, en particulier, pour le premier récipient, $\theta_1 = \frac{\theta_0}{e}$.

R. AUSCHER.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1908)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*fin.*)

6521. — Relation entre la longueur de la normale à l'ellipse limitée à un axe et le rayon de courbure.

6522. — Intégrer l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$. Équation rationnelle des courbes intégrales qui sont des coniques. Axes de ces coniques. Enveloppe des coniques.

6523. — Lieu des pôles des normales à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

6524. — Tangentes menées par le point (α, β) à la conique $f(x, y) = 0$. Condition de réalité.

6525. — Par un point A d'une parabole on mène deux droites variables symétriques par rapport à la normale en A. Ces droites coupent la parabole aux points B et C. Enveloppe de la droite BC.

6526. — Mener du point (x_0, y_0) les tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Discuter. L'ellipse se déforme en conservant les mêmes foyers, comment varient les tangentes ? Lieu des foyers des coniques qui ont un foyer donné et qui sont tangentes à deux droites.

6527. — Une tangente variable à une ellipse rencontre les axes aux points P et Q. Lieu du quatrième sommet du rectangle construit sur OP et OQ.

6528. — Enveloppe des cordes de longueur constante d'une ellipse.

6529. — Soient O le sommet d'une parabole, P le point à l'infini, M et M′ deux points de la courbe symétriques par rapport à l'axe. Calculer le rapport anharmonique des quatre points O, P, M, M′.

6530. — Équation générale des coniques qui passent par les sommets d'un triangle et son centre de gravité.

6531. — La normale en un point M d'une ellipse rencontre la courbe en un second point N. Calculer les coordonnées du point N, la corde MN et le rapport des aires déterminées dans l'ellipse par cette normale.

6532. — Trouver les axes, les sommets et les foyers de la conique $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, les axes de coordonnées faisant l'angle 60°.

6533. — Les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique.

6534. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole des tangentes faisant un angle donné. Solutions géométrique et analytique.

6535. — Lieu du centre de gravité du triangle formé par les pieds des normales issues d'un point à une parabole, quand ce point décrit une droite.

6536. — On donne une ellipse rapportée à ses axes et un point de cette ellipse $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. On pose $t = e^{i\varphi}$, et on exprime x et y en fonction de t. Quelle relation doit-il exister entre les t de quatre points de l'ellipse pour que ces points soient sur un cercle ? B

6537. — Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée à une parabole de grandeur constante qui tourne autour de son foyer.

6538. — Par un point M on mène une tangente MT à une parabole de foyer F. Quel lieu doit décrire le point M pour que l'angle TMF soit constant ?

6539. — Trouver l'enveloppe des axes des hyperboles dont on donne une asymptote, un point et la tangente en ce point. B

6540. — Intersection d'une droite et d'une conique définie par trois points et les tangentes en deux de ces points.

6541. — On joint un point M d'une ellipse aux foyers F et F′. Établir la relation qui existe entre les angles de MF, MF′ avec le grand axe.

6542. — Trouver les foyers de la conique $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2y = 0$.

6543. — Calculer le rapport anharmonique des quatre sommets d'une ellipse.

6544. — Équation générale des paraboles qui ont pour paramètre p. La

6545. — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$ et un point $M(x_0, y_0)$. De ce point on mène des tangentes MA et MB à la courbe. Former l'équation du cercle circonscrit au triangle MAB.

6546. — On donne l'équation différentielle $x - yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$, et on considère les courbes intégrales (C). On demande de former l'équation différentielle que vérifient toutes les courbes polaires réciproques des courbes (C) par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$. Intégrer cette équation, et en déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

6547. — Dans un tétraèdre deux arêtes opposées sont égales. Existe-t-il d'autres relations entre les éléments du tétraèdre ? La

6548. — On donne trois droites quelconques D_1, D_2, D_3. Déterminer respectivement sur ces droites des points A_1, A_2, A_3 tels que A_2A_3 soit perpendiculaire à D_1, A_3A_1 à D_2, A_1A_2 à D_3.

6549. — Trouver le volume d'un tétraèdre SABC connaissant les longueurs SA, SB, SC et les angles BSC, CSA, ASB. La

6550. — On donne deux systèmes d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et Ox', Oy', Oz' ayant même origine et disposés de la même manière. Trouver une droite passant par le point O autour de laquelle on peut faire tourner le trièdre $Oxyz$ pour l'amener sur $Ox'y'z'$. La

6551. — On donne les deux droites $x = y = z$, et $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Équations de la perpendiculaire commune ; plus courte distance. Coordonnées des extrémités de la perpendiculaire commune. La

6552. — Perpendiculaire commune aux deux droites $x = y = z$, et $x = y + 1$, $z = 2y - 1$.

6553. — Étudier la surface $z = \text{arc tg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$. La

6554. — D'un point P de l'espace on mène des plans osculateurs à la courbe $y = x^2$, $z = y^2$. Peut-on choisir le point P de façon que les points de contact de ces plans soient dans un même plan avec le point P ? V

6555. — On considère la courbe $x = az^3$, $y = bz^2$. Trouver la tangente et le plan osculateur. V

6556. — Que représentent les équations $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = av + \varphi(u)$, u et v étant des paramètres. V Plan tangent en un point de la surface.

6557. — Sur les tangentes à une hélice circulaire on porte à partir du point de contact M une longueur $MP = l$ variable avec M. Quelle doit être la loi de variation de l pour que la tangente en P au lieu de ce point soit perpendiculaire à MP ? V

6558. — Lieu des pieds des normales menées des points d'une droite à un cône de révolution.

6559. — Équation du conoïde dont le plan directeur est le plan des xy et dont les génératrices rencontrent Oz et sont tangentes à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + b^2 = 0$.

6560. — On considère la courbe $x = \dfrac{A}{t-a}$, $y = \dfrac{B}{t-b}$, $z = \dfrac{C}{t-c}$. Équation du plan passant par les points t_1, t_2, t_3. Tangente. Plan osculateur. K

6561. — Trouver le cône supplémentaire du cône $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$. La

6562. — Trouver la surface engendrée par un cercle du plan des xy tournant autour de la droite $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$. Étudier la méridienne. La

6563. — Équation de la section droite du cylindre défini par l'équation $f(P, Q) = 0$. La

6564. — On considère la courbe $x = \dfrac{z}{10}$, $y = \dfrac{z^3}{3}$. Tangente. Plan osculateur. Longueur d'un arc. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une droite fixe. K.

6565. — On donne une courbe tangente à l'origine à Oz et admettant le plan zOx comme plan osculateur. Étudier aux environs de l'origine le lieu des traces des tangentes sur le plan des xy. B

6566. — Projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à la tangente.

6567. — Équation de la surface engendrée par la courbe $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, tournant autour de Ox. Volume. Le.

6568. — Former l'équation d'un cylindre de révolution passant par l'origine et ayant pour axe une droite donnée. La

6569. — On considère un cylindre de révolution ayant pour axe Oz. Par le point O on mène une droite rencontrant le cylindre au point M, et sur OM on prend un point P tel que $\overline{OM}\cdot\overline{OP} = k$. Lieu du point P. La

6570. — Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique. V

6571. — Équation de la surface de révolution engendrée par un cercle du plan des xy ayant son centre sur Ox autour d'une droite passant par l'origine et située dans le plan xOz. V

6572. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et un cercle C dans le plan des xy ayant pour centre le point O. Soit M un point de ce cercle. Du point M comme centre et dans le plan zOM on construit un cercle ayant pour rayon la moitié de l'ordonnée du point M. Trouver la surface engendrée par ce cercle, quand le point M décrit le cercle C. La

6573. — Par un point A de l'espace on peut mener trois plans osculateurs à la courbe $x = z^2$, $y = x^2$. Où doit se trouver le point A pour que les points de contact trouvés soient en ligne droite ? V

6574. — Équation de la surface engendrée par une droite parallèle au plan des xy qui rencontre Oz et une hélice tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe Oz. Plan tangent en un point de cette surface.

6575. — Étude de la surface $z = a\,\dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$. Génératrices. Section par un plan passant par une génératrice. K

6576. — Volume de la surface $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ compris entre les plans $z = 0$, $z = h$. K

6577. — On considère la surface dont l'équation s'obtient en éliminant α entre les deux équations $f(x, y, z, \alpha) = 0$, $\varphi(x, y, z, \alpha) = 0$. Trouver le plan tangent en un point. Cas où les deux équations sont du premier degré en x, y, z.

6578. — On donne un point A et une droite D. Par le point A on fait passer une droite variable Δ, et on demande le lieu du pied sur Δ de la perpendiculaire commune à D et à Δ. Le

6579. — Trouver le cône ayant pour sommet le point (1, 1, 1) et pour directrice la courbe $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t$. B

6580. — Lieu du centre d'une sphère passant par deux points et tangente à un plan. B

6581. — On donne un cylindre de révolution et une droite. Lieu des pieds sur les génératrices du cylindre des perpendiculaires communes à ces génératrices et à la droite.

6582. — On donne deux points M et M', voisins, d'une courbe gauche, et du point M on abaisse MP perpendiculaire sur la tangente au point M. Calculer l'ordre infinitésimal de MP, en prenant la distance MM' comme infiniment petit principal.

6583. — Quelles sont les courbes dont le plan osculateur passe par un point fixe?

6584. — Déterminer les courbes gauches dont les tangentes touchent une sphère. Soient A et B deux points d'une de ces courbes. Montrer que l'arc AB s'exprime en fonction des coordonnées des points A et B. Interprétation géométrique. B

6585 — $f(x, y, z, t)$ désignant un polynome homogène, montrer que l'équation $[xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0}]_m = 0$ (puissance symbolique) représente un cône ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0, t_0), lorsque ce point est un point multiple d'ordre m de la surface $f(x, y, z, t) = 0$.

6586. — Aire du paraboloïde de révolution.

6587. — On considère une surface de révolution engendrée par une courbe C du plan des zx tournant autour de l'axe Oz supposé vertical. On limite cette surface à deux plans horizontaux. Déterminer la courbe C de façon que la pression exercée par unité de surface sur la base inférieure soit indépendante de celle-ci. B

6588. — Equation du conoïde engendré par une droite rencontrant Oz, parallèle au plan des xy et s'appuyant sur le cercle $x = a$, $y^2 + z^2 = R^2$. Volume du conoïde limité au cercle.

6589. — Trouver l'équation du cylindre de révolution qui a pour axe la droite

$$4x + 6y + 3z - 7 = 0, \qquad 3x + 7y + 5z + 8 = 0, \qquad \text{et pour rayon } 1.$$

6590. — Démontrer que par un point quelconque P de l'espace, on peut mener trois plans osculateurs à la courbe $y = x^2$, $z = x^3$, et que le plan des trois points de contact passe par le point P.

6591. — Placer sur le cône $x^2 + y^2 = m^2z^2$ une courbe coupant les génératrices sous un angle constant. K

6592. — Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant. Ld

6593. — Trouver les points d'inflexion du développement d'une courbe située sur un cylindre de révolution à axe vertical.

6594. — Moment d'inertie d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe. K

6595 — Etudier les quadriques :

$x^2 + 2xy - 4xz + x + y = 0$ (génératrices parallèles au plan $z = 0$).

$x^2 - xy + xz - y = 0$ (génératrices), $x^2 + y^2 - 8yz + 6x = 0$,

K $x^2 + y^2 - 8xz - 6z + 7 = 0$ (sections circulaires), $x^2 + 2xy + z^2 + 2y - 3 = 0$,

$x^2 + y^2 - 2xy + yz + 2x + 3y = 0$, $y = x \pm \sqrt{x + z}$, $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, La.

$x^2 + y^2 - 4yz + 6x - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 2yz + 2z - 1 = 0$, $yz + zx + xy = 1$,

V $x^2 + y^2 - z^2 + 2yz - 4xy + 2xz + x + y = 0$, $2yz - z^2 + 3y^2 - 2x = 0$,

$x^2 - y^2 + 3yz = 1$, $x^2 + y^2 - 2yz + 2x = 0$. K

6596. — Déterminer λ de façon que la quadrique

$$\lambda(x^2 + y^2) + 6xy + 3z^2 - z + 1 = 0$$

ait une ligne de centres. Le'

6597. — Exprimer qu'une quadrique se décompose en deux plans. Le'

6598. — Lieu des points d'où l'on peut mener à un cône du deuxième degré deux plans tangents rectangulaires

6599. — On donne un point A, une quadrique Q et un plan P. Par le point A, on mène une sécante rencontrant la quadrique aux points M et M', et le plan P en un point B. Lieu du conjugué harmonique de B par rapport à M et M'.

6600. — Déterminer un cône du second degré passant par deux cercles ayant deux points communs. B

6601. — Une droite variable Δ rencontre deux droites fixes D et D' en des points M et M' tels que MM' soit vu d'un point fixe O sous un angle droit. Lieu de la droite Δ. B

6602. — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique passant par un point fixe. La

6603. — Trouver sur un ellipsoïde le lieu des points où la normale rencontre une droite fixe. Le' B

6604 — Même question pour un paraboloïde hyperbolique. Le'

6605. — Trouver sur un paraboloïde hyperbolique $\dfrac{y^2}{p} - \dfrac{z^2}{q} - 2x = 0$ le lieu des points où le plan tangent fait un angle donné avec l'axe. Ld

6606. — On donne un point fixe A et un plan fixe P. Lieu du point M, tel que le rapport des distances du point M au point A et au plan P (comptée parallèlement à une droite donnée) soit constant. Ld

6607. — Deux quadriques qui se touchent en trois points se raccordent en général en tous les points d'une conique.

6608. — Trouver toutes les quadriques qui coupent l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ à angle droit en tous les points d'intersection. B

6609 — Soit $\Delta(S)$ le premier membre de l'équation en S. Former le produit $\Delta(S)\,\Delta(-S)$. Peut-on en déduire que l'équation en S a toutes ses racines réelles? Le.

6610. — Deux quadriques circonscrites à une quadrique se coupent suivant deux coniques. Le'

6611. — Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer trois droites parallèles à un même plan.

6612. — Lieu des points de la surface $xy = az$ où se coupent deux génératrices faisant l'angle de 60°.

6613. — Etant donné l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ et le point A (x_0, y_0, z_0), mener par le point un plan coupant la surface suivant une ellipse ayant pour centre le point A.

6614. — Lieu d'un point M tel que la perpendiculaire menée de ce point sur son plan polaire par rapport à une quadrique passe par un point donné. K

6615. — Etant donnés l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ et la direction qui a pour paramètres directeurs $a\cos\varphi\cos\theta$, $b\sin\varphi\cos\theta$, $c\sin\theta$, quelle relation doit-il exister entre θ et φ pour que cette direction soit celle d'une génératrice de la surface ? Équation de cette génératrice. V

6616. — Lieu des droites passant par un point donné et par lesquelles passent deux plans rectangulaires tangents à un ellipsoïde. V

6617. — Lieu du pôle du plan fixe $ux+vy+wz+r=0$ par rapport aux quadriques $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0$. Le plan fixe coupe chaque quadrique suivant une conique. Lieu des centres de ces coniques. K

6618. — Lieu de la droite commune à deux plans rectangulaires passant chacun par une droite fixe. Nature de la surface. Sections circulaires. Solution géométrique.

6619. — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique qui passent par un point donné. La

6620. — Lieu des centres des coniques section d'une quadrique par des plans passant par un point donné. La

6621. — Lieu des pieds des perpendiculaires menées d'un point sur les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ou d'un hyperboloïde à une nappe. V

6622. — On considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ et une sphère tangente au point $(0, 0, c)$. Projection de l'intersection sur le plan des xy.

6623. — On donne un ellipsoïde et un point A. Lieu d'une droite D passant par A telle que le diamètre conjugué du plan perpendiculaire à D rencontre cette droite. Lieu du point de rencontre. V

6624. — Équations du cône ayant pour sommet le point $(0, 0, h)$ et pour directrice le cercle $x^2+y^2-2kx=0$, $z=0$. Plans cycliques.

6625. — Lieu des points d'un ellipsoïde pour lesquels la distance du centre à la normale est constante, en particulier égale à zéro.

6626. — La normale en un point d'un ellipsoïde rencontre les plans principaux aux points A,B,C. Lieu du centre des moyennes distances de A, B, C quand le point varie sur la surface.

6627. — Lieu des points d'une quadrique où se coupent deux génératrices rectangulaires.

6628. — Plans de sections circulaires d'un ellipsoïde. Trouver le volume compris entre deux plans de sections circulaires.

6629. — Mener d'un point des normales au paraboloïde $yz=ax$.

6630. — Déterminer les plans coupant la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ suivant une courbe qui se projette sur le plan des xy suivant une hyperbole équilatère. V

V. — Géométrie Descriptive.

6631. — Construire l'angle des plans projetant une droite.

6632. — Mener par une droite un plan de pente donnée.

6633. — On donne deux points A et B par leurs projections horizontales, situés dans un plan donné par son échelle de pente. Construire dans le plan un carré ayant AB pour côté, puis un cube ayant ce carré pour face.

6634. — Angle de deux plans donnés par leurs échelles de pente.

6635. — Construire un cube dont une diagonale est verticale.

6636. — On donne un tétraèdre SABC, et par son centre de gravité G on mène un plan parallèle au plan ABC qui détermine un tronc de pyramide. Visibilité. Ombre portée sur le plan horizontal.

6637. — Perpendiculaire commune à une droite quelconque et à la ligne de terre.

6638. — Perpendiculaire commune à deux droites en géométrie cotée.

6639. — Distance d'un point du second bissecteur à une droite donnée par ses projections. Angles de la perpendiculaire avec les plans de projection.

6640. — Couper un angle polyèdre à quatre faces par un plan de manière que la section soit un parallélogramme.

6641. — On donne trois points A,B,C. Trouver le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par les points A,B,C. Le problème est-il toujours possible ?

6642. — On donne deux points A et B par leurs projections et on demande de construire un point C connaissant sa projection horizontale et sachant que AB et AC sont perpendiculaires.

6643. — Faire tourner un tétraèdre ABCD de façon que l'arête AB devienne horizontale.

6644. — Déterminer les dièdres d'un tétraèdre donné par ses projections.

6645. — Projection d'une droite sur un plan donné par son échelle de pente.

6646. — Projection d'un cercle passant par trois points.

6647. — Un cercle donné est la projection horizontale d'une ellipse située dans un plan P donné par son échelle de pente. Cette ellipse est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan P. Le cylindre est éclairé par des rayons lumineux parallèles à une droite donnée. Ombre propre et ombre portée sur le plan P.

6648. — On coupe un cône à base circulaire horizontale par un plan. Trouver les points de la section où le plan sécant est normal au cône.

6649. — Construire une normale commune à un cylindre de révolution dont l'axe est de bout et à un cône de révolution à axe vertical.

6650. — Un cône de révolution à axe vertical est coupé par un plan. La section est la base d'un cylindre parallèle à la ligne de terre. Trouver le contour apparent de ce cylindre.

6651. — Section plane d'un cône oblique à base circulaire. Deuxième direction des plans cycliques. Section parabolique. Sommet.

6652. — On donne un plan défini par deux droites et dans ce plan une conique définie par sa projection horizontale qui est un cercle. Cette conique est la base commune à deux cônes de sommets donnés. Intersection de ces deux cônes.

6653 — On donne deux cercles tangents dans le plan horizontal. L'un est la directrice d'un cylindre vertical, l'autre la directrice d'un cône dont le sommet est sur la verticale du point de contact. Intersection des deux surfaces.

6654. — Intersection d'un cône à base circulaire horizontale et d'un cône parallèle.

6655. — On donne un cône de révolution à axe vertical limité à un plan horizontal et à son sommet, la pointe étant vers le bas et le cône étant creux. On l'éclaire par un point lumineux. Ombre à l'intérieur du cône.

6656. — Construire un cône passant par un cercle et trois points.

6657. — Construire un cylindre passant par un cercle et deux points.

6658. — On donne deux coniques S et Σ dans le plan horizontal; ce sont les bases de deux cônes ayant respectivement pour sommets les points (s, s') et (σ, σ'), s étant le centre de la conique Σ, σ celui de S. Intersection des deux cônes.

6659. — On donne une circonférence dont le centre est sur la ligne de terre. Considérée comme étant dans le plan horizontal, c'est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une frontale (F,F'). Considérée comme étant dans le plan vertical, c'est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une horizontale (H,H'). On suppose en outre que F' et H sont parallèles. Intersection des deux cylindres.

6660. — On donne un cylindre dont la directrice est un cercle du plan vertical tangent à la ligne de terre et dont les génératrices sont horizontales, et un cône de révolution dont le sommet est sur la ligne de terre et touchant le plan horizontal suivant une droite donnée. On connaît en outre le demi-angle au sommet de ce cône. Intersection des deux surfaces.

6661. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un cylindre hyperbolique.

6662. — Intersection de deux cylindres hyperboliques. Points à l'infini.

6663. — On donne deux cercles : C (centre o,o') et γ (centre ω, ω') situés dans des plans horizontaux différents. Intersection du cône qui a pour directrice le cercle C et pour sommet (ω, ω'), et du cône qui a pour directrice γ et pour sommet (o,o').

6664. — Intersection de deux cônes de révolution à axe vertical ayant même angle au sommet.

6665. — On donne une hyperbole horizontale définie par ses asymptotes et un point M : c'est la base d'un cylindre de direction donnée. On demande l'intersection de ce cylindre et d'un cône ayant pour directrice un cercle concentrique à l'hyperbole, passant par le point M et dont le sommet est sur la génératrice du cylindre passant au point M.

6666. — On donne un cercle horizontal et un cercle de front. Chacun d'eux est la base d'un cône ayant pour sommet le centre de l'autre. Intersection.

6667. — On donne un cercle horizontal et une droite de front située dans le même plan de front que le centre. Le cercle tourne autour de cette droite. Déterminer un point du contour apparent de la surface engendrée et la tangente en ce point.

6668 — Cylindre circonscrit à un tore dont l'axe est vertical.

6669. — On donne les projections d'un segment AB qui est le grand axe d'une ellipse dont le petit axe est égal à la moitié de AB. Trouver le contour apparent de l'ellipsoïde engendré par l'ellipse tournant autour de AB.

6670. — Contour apparent horizontal d'un tore dont l'axe est de front. Étude analytique.

6671. — Ombre (en lumière à 45°) d'un tore à axe vertical.

6672. — Une courbe quelconque C tourne autour d'une droite quelconque et engendre une surface de révolution. Trouver la normale à la surface en un point de la courbe C.

6673. — Mener à un tore dont l'axe est vertical un plan tangent parallèle à une droite, le point de contact étant sur un méridien donné.

6674. — On donne trois points par leurs projections, A, B, M et on considère l'ellipse qui a pour foyers A et B et qui passe par le point M. Trouver les contours apparents de l'ellipsoïde engendré par cette ellipse tournant autour de son grand axe.

6675. — Section d'un tore à axe de front par un plan passant par le centre et parallèle au deuxième bissecteur.

6676. — Tout plan bitangent au tore le coupe suivant deux cercles.

6677. — On donne quatre points par leurs projections cotées : construire la sphère inscrite dans le tétraèdre formé par les quatre points.

6678. — On donne deux points M et N sur une sphère. Déterminer sur la sphère un point P tel que le triangle MNP soit équilatéral.

6679. — Ombre (en lumière à 45°) d'un système formé par une sphère pleine et une droite la rencontrant.

6680. — Une sphère est donnée par la projection et la cote de son centre et son rayon. Une droite est définie par un point et sa pente égale à $\frac{1}{3}$. Intersection de la droite et de la sphère.

6681. — Point brillant d'une sphère, les rayons lumineux ayant une direction donnée et l'œil étant à l'infini en haut sur une verticale.

6682. — On donne deux points (o, o') et (a, a') et sur la droite qui les joint entre ces deux points un point (m, m'). Trouver les projections du cercle commun à la sphère de centre (o, o') et de rayon $(oa, o'a')$ avec le plan perpendiculaire à ce rayon et passant par le point (m, m').

6683. — On coupe une sphère par un plan vertical passant par le centre, et on enlève un des hémisphères ainsi formés. Trouver l'ombre de l'autre (ombre à l'intérieur, à l'extérieur, ombre portée sur le plan horizontal).

6684. — Construire la sphère inscrite dans un tétraèdre connaissant les échelles de pente des faces.

6685. — Trouver sur une droite le point d'où l'on voit un segment AB sous un angle droit.

6686. — Construire une sphère tangente à trois plans et passant par un point. Cas où les plans sont les plans de projection et un plan de profil.

6687. — On donne une sphère et un rayon lumineux qui la rencontre ; trouver le rayon réfléchi.

6688. — On coupe une sphère par le plan horizontal et le plan de front du centre et on considère le quart de cette sphère situé en arrière et en bas. Ombre à l'intérieur, les rayons lumineux étant parallèles à 45°.

6689. — On donne une sphère et un point A. Mener par ce point une droite telle que les plans tangents menés à la sphère par cette droite fassent un angle donné.

6690. — Droite conjuguée d'une droite donnée par rapport à une sphère.

6691. — On donne une droite (A, A') et la projection horizontale m d'un point. Construire un cylindre de révolution ayant pour axe la droite (A, A') et tel qu'il n'existe qu'un point du cylindre se projetant horizontalement en m.

6692. — On donne un cylindre de révolution défini par son axe et son rayon. 1° Trouver la projection horizontale d'un point dont on donne la projection verticale. 2° Intersection avec une droite quelconque. 3° Mener des plans tangents par un point ou parallèles à une droite donnée.

6693. — Construire un cylindre de révolution passant par un point et tangent à deux plans.

6694. — Déterminer sur un cylindre de révolution dont l'axe est de front le lieu des points pour lesquels le plan tangent au cylindre fait avec le plan horizontal un angle donné.

6695. — On donne un segment $(ab, a'b')$ qui est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon donné. On coupe ce cylindre par le plan horizontal du point (b, b') et par le plan de section droite du point (a, a'). Représenter le solide obtenu.

6696. — On donne un cylindre de révolution ayant pour axe la ligne de terre, et une droite quelconque. Par les points de la droite on mène des normales au cylindre. Construire le lieu de leurs pieds.

6697. — Un rayon lumineux tombe sur un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre. Construire le rayon réfléchi.

6698. — On donne deux droites A et B par leurs projections cotées. La droite A est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon donné. Mener à ce cylindre un plan tangent parallèle à B.

6699. — On coupe un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre par un plan horizontal passant par l'axe et on considère seulement le demi-cylindre inférieur réduit à la surface et limité à deux plans de profil. Ombre de ce corps.

6700. — Déterminer un cône de révolution connaissant son axe, son sommet, et sachant qu'il est tangent à une verticale donnée.

6701. — Mener par un point donné un plan faisant des angles donnés avec deux droites données.

6702. — On donne un cône de révolution défini par son axe, son sommet et un point. 1° Contour apparent. 2° Intersection avec une droite. Cas où la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection. 3° Plans tangents parallèles à une droite donnée ou passant par un point donné. 4° Section plane.

6703. — On donne un cône de révolution par son axe et une génératrice. Trouver le contour apparent horizontal du cône supplémentaire.

6704. — Plus courte distance d'une droite et d'un cône de révolution à axe quelconque. Cas où la droite est la ligne de terre.

6705. — Trouver la trace horizontale d'un cône de révolution circonscrit à une sphère le long du cercle section par un plan donné.

6706. — Construire un cône de révolution ayant un sommet donné, passant par un point donné et tangent aux plans de projection.

6707. — On donne une sphère, une droite D et un point S sur cette droite. Construire un cône de révolution ayant pour sommet le point S, pour axe la droite D et tangent à la sphère.

6708. — On donne trois droites par leurs projections. Construire un plan coupant ces trois droites sous le même angle.

6709. — Mener à un cône de révolution des plans tangents parallèles à la ligne de terre.

6710. — Construire une droite située à une distance donnée de la ligne de terre et faisant des angles donnés avec les plans de projection, connaissant un point de la projection horizontale de la droite cherchée.

6711. — Mener un plan à une distance donnée d'un point donné et faisant des angles donnés avec les plans de projection.

6712. — Construire un cône de révolution connaissant trois génératrices.

6713. — Mener par un point donné une droite faisant un angle donné avec la ligne de terre et située à une distance donnée de cette ligne.

6714. — On donne une surface gauche de révolution par son axe de front et une génératrice de front. Trouver un point de cette génératrice tel que le plan tangent en ce point fasse un angle donné avec le plan horizontal.

6715. — Mener par une droite un plan coupant une surface gauche de révolution à axe vertical suivant une hyperbole équilatère. Cas particulier où la droite est une génératrice du cône asymptote.

6716. — Ombre propre et ombre portée sur le plan horizontal d'une surface gauche de révolution à axe vertical. Les rayons lumineux sont parallèles.

6717. — Construire une sphère passant par un point et inscrite dans une surface gauche de révolution dont l'axe est de front.

6718. — Trouver le contour apparent d'une surface gauche de révolution dont l'axe est de front et qui a une génératrice verticale. Section par le deuxième bissecteur.

6719. — Trouver les points d'une section plane d'une surface gauche de révolution pour lesquels le plan sécant est normal à la surface.

6720. — On considère une surface gauche de révolution engendrée par une droite G tournant autour d'un axe de front. On l'éclaire par des rayons lumineux à 45°. Trouver les points de la courbe d'ombre sur le parallèle décrit par un point donné de la droite G.

6721. — On donne une surface gauche de révolution par son axe vertical, son centre, son cercle de gorge et un parallèle. Cette surface supposée creuse est limitée par un second parallèle symétrique du premier par rapport au centre. Ombre à l'intérieur, ombre propre et ombre portée, les rayons lumineux étant à 45°.

6722. — Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical des plans tangents par une droite qui rencontre l'axe.

6723. — Déterminer un point et la tangente de la courbe de contact du cône circonscrit de sommet donné à une surface gauche de révolution à axe vertical.

6724. —On considère une surface gauche de révolution engendrée par une verticale tournant autour d'une droite quelconque. Plan tangent à la surface en un point de la verticale.

6725. — Plan polaire d'un point par rapport à une surface gauche à axe vertical. Pôle d'un plan.

6726. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical par son cercle de gorge et un parallèle. On donne la projection horizontale m d'un point de la surface, trouver la projection verticale m'. Par le point (m, m') on mène une droite (D, D') : construire la symétrique de cette droite par rapport à la normale en (m, m') à la surface.

6727. — On considère la surface engendrée par la ligne de terre tournant autour d'une droite définie par ses traces. Construire des génératrices de la surface.

6728. — Section par un plan horizontal de la surface gauche engendrée par une droite quelconque tournant autour d'un axe de front.

6729. — Construire des génératrices de la surface gauche engendrée par une verticale tournant autour d'une droite perpendiculaire au premier bissecteur.

6730. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par un plan horizontal et deux génératrices quelconques non horizontales. 1° Déterminer le sommet ; 2° Plan tangent parallèle à un plan donné. Cas où le deuxième plan directeur est le plan vertical ; 3° Nature de la trace horizontale d'un cône circonscrit ; 4° Intersection du paraboloïde et d'un cône de révolution ayant pour axe l'une des génératrices données ; 5° Intersection du paraboloïde et d'un cylindre ayant pour base un cercle de front et pour génératrice une génératrice du paraboloïde ; 6° Courbe de contact du cylindre circonscrit dont la direction des génératrices est donnée.

6731. — Lieu des projections d'un point donné sur les génératrices horizontales d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

6732. — Ombre (au flambeau) propre et ombre portée sur le plan horizontal d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

6733. — Section parabolique d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Sommet de la parabole.

6734. — Trouver le sommet d'un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et ayant un plan directeur parallèle au deuxième bissecteur.

6735. — Trouver un plan passant par une droite donnée et coupant un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal suivant une hyperbole équilatère.

6736. — Trouver le plan polaire d'un point par rapport à un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

6737. — On donne un hyperboloïde défini par trois génératrices. Trouver un point et le plan tangent en ce point.

6738. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution engendré par une génératrice de front de la surface tournant autour d'une parallèle menée par le centre de la surface.

6739. — On donne deux cercles C et C_1 situés dans le plan horizontal et tangents intérieurement en un point a de la ligne de terre. Le cercle de plus petit rayon C est la base d'un cône dont le sommet est sur la verticale du point a. L'autre C_1 est la section droite d'un cylindre. Intersection des deux surfaces.

6740. — Intersection d'une sphère avec un cône de révolution ayant pour sommet un point du contour apparent vertical, pour axe une droite de front passant par le point le plus à gauche de la sphère, ce cône passant en outre par le centre de la sphère.

6741. — Projection cotée d'un ellipsoïde reposant sur le plan de cote 0 suivant un ombilic.

6742. — Intersection du cône de révolution engendré par le segment $(sa, s'a')$ tournant autour de la verticale du point (s, s') et de la sphère ayant ce segment comme diamètre.

6743. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est de front.

6744. — On considère un cylindre de révolution vertical limité au plan horizontal de projection et à un plan horizontal H. Dans le plan H, on considère un losange circonscrit à la base supérieure du cylindre, l'une des diagonales étant parallèle au plan vertical. Ce losange est la base d'un prisme de hauteur donnée. Ombre du système en lumière à 45°.

6745. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution ayant pour sommet le point le plus haut de la sphère, pour axe une parallèle au deuxième bissecteur faisant 45° avec les lignes de rappel et pour demi-angle au sommet 45°.

6746. — Un paraboloïde a pour plan directeur le plan horizontal et deux génératrices de front. Un autre paraboloïde a un plan directeur de front et deux génératrices horizontales. Intersection des deux surfaces.

6747. — On donne deux cercles tangents intérieurement en un point a,a' de la ligne de terre et une droite (A, A') située dans le plan vertical et passant par le point (a,a'). Intersection de deux hyperboloïdes passant tous deux par la droite (A,A') et ayant les deux cercles donnés comme cercles de gorge.

6748. — On donne un paraboloïde de révolution à axe de front et un parallèle. Trouver les points de ce parallèle où le plan tangent fait un angle donné avec le plan horizontal.

6749. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'un hyperboloïde à axe de front admettant l'axe du cylindre pour génératrice.

6750. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution ayant pour axe une génératrice de front de l'hyperboloïde.

6751. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical et un cône de révolution parallèle au cône asymptote de la surface. Déterminer la direction du plan de la conique intersection.

6752. — Ombre portée par une sphère éclairée par des rayons à 45° sur un cône de révolution à axe vertical.

6753. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et d'un hyperboloïde de révolution engendré par l'axe du paraboloïde tournant autour d'une droite de front.

6754. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et d'un cône ayant pour directrice un cercle horizontal.

6755. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et une verticale. Trouver le lieu des pieds des normales au paraboloïde qui rencontrent cette verticale.

6756. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône dont l'axe est une génératrice de front de la surface.

6757. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'une surface gauche engendrée par l'axe du cylindre tournant autour d'une droite donnée quelconque.

6758. — On donne dans un plan horizontal un parallélogramme $abcd$ (ad et bc étant les diagonales). On fait tourner ab autour de ad et cd autour de bc. Intersection des deux cônes engendrés.

6759. — On donne une verticale, une frontale et une droite quelconque qui définissent un hyperboloïde. Intersection de cette surface avec un cylindre de révolution ayant pour axe la frontale.

6760. — Ombre au flambeau d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Courbe d'ombre propre. Tangentes horizontales.

6761. — Intersection d'un cône de révolution et d'un paraboloïde de révolution dont les axes sont parallèles.

6762. — On coupe un hyperboloïde de révolution à axe vertical par un plan et on considère un cône ayant pour base la section plane. Section du cône par un plan horizontal.

6763. — Intersection d'une surface gauche à axe vertical avec une sphère tangente à la surface en un point.

6764. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe de front et d'un cône de révolution à axe vertical, les axes ne se rencontrant pas.

6765. — On donne un tore à axe vertical et un plan bitangent qui coupe le tore suivant deux cercles. L'un des cercles est la base d'un cône de révolution. Intersection de ce cône et du tore.

6766. — Intersection d'une surface gauche à axe vertical avec un cône ayant un sommet sur la méridienne principale et dont la base est une conique dans le plan du cercle de gorge.

6767. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'une surface gauche de révolution engendrée par l'axe du tore tournant autour d'une droite de front.

6768. — On donne une surface gauche de révolution engendrée par une frontale F tournant autour d'une verticale V. Intersection de cette surface et du paraboloïde hyperbolique passant par les droites F et V, et ayant le deuxième bissecteur pour plan directeur.

6769. — Intersection de deux cylindres de révolution dont les axes se rencontrent à angle droit. Projection sur le plan des axes. Asymptotes.

6770. — On donne quatre points A, B, C, D. Représenter le cône passant par les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.

6771. — Trace horizontale d'un cylindre circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

6772. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution ayant avec la surface une génératrice commune de front et dont l'axe passe par le centre de la surface.

6773. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur horizontal commun et définis chacun par deux génératrices du système non horizontal. Étude analytique.

6774. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes de front se coupent à angle droit et dont les demi-angles au sommet soit égaux à 45°. Etude analytique.

6775. — Déterminer une droite rencontrant quatre droites de profil données.

6776. — On donne deux droites de front rectangulaires dans un même plan, et une droite les rencontrant. On fait tourner cette droite successivement autour des deux premières. Intersection des cônes ainsi engendrés.

6777. — Représentation d'une hélice en géométrie cotée. Construire un point, la tangente, le plan osculateur et la normale principale.

6778. — On donne un cercle dans le plan des xy tangent à la ligne de terre au point (a, a'), et une droite (G, G') dans le plan vertical passant par le point (a, a'), et on considère la surface gauche de révolution ayant le cercle donné comme cercle de gorge et la droite (G, G') comme génératrice. Intersection de cette surface et d'un cône ayant pour sommet un point de la génératrice et pour base le cercle de gorge.

6779. — On considère un cône de révolution à axe vertical, limité à un plan horizontal et reposant sur un cylindre de révolution parallèle à la ligne de terre. Ombre portée par le cône sur le cylindre.

6780. — Intersection d'une sphère et d'un cône ayant pour sommet le point le plus haut de la sphère et pour base un cercle situé dans le plan horizontal intérieur tangent à la sphère.

6781. — On donne une verticale, une ligne de front et une parallèle à la ligne de terre qui définissent un hyperboloïde à une nappe. Construire des génératrices de différents systèmes. Plan tangent en un point.

6782. — On donne un hyperboloïde par une verticale, une droite de bout et une droite quelconque. Construire des génératrices et trouver sa section par le premier bissecteur.

6783. — On donne une verticale A, une horizontale H de cote donnée, et une droite B définie par sa projection cotée. Ces trois droites définissent un hyperboloïde. Représenter des génératrices. Trouver la cote d'un point connaissant sa projection horizontale. Plans tangents horizontaux.

6784. — Trouver les contours apparents d'un cylindre ayant pour directrice une section plane d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et dont les génératrices ont une direction donnée.

6685. — On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical, éclairé par des rayons parallèles à une direction donnée. Trouver le point brillant pour un observateur à l'infini sur l'axe.

VI. — Cinématique.

6786. — Etudier le mouvement d'un point connaissant sa trajectoire $y^2 = 2px + qx^2$, et l'hodographe relatif à l'origine, qui est une parabole $(y - mx)^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ ayant son sommet à l'origine.

6787. — Déterminer *analytiquement* les projections de l'accélération totale sur la tangente et la normale principale, sachant que les projections de cette accélération sur les axes de coordonnées sont $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. On différentie les relations $\frac{dx}{dt} = v\alpha$, $\frac{dy}{dt} = v\beta$, $\frac{dz}{dt} = v\gamma$, α, β, γ étant les cosinus directeurs de la tangente.

6788. — Trouver le mouvement d'un point M tel que le rapport de ses vitesses aréolaires par rapport à deux points fixes O et O' soit : 1° constant ; 2° égal au rapport $\frac{OM}{O'M}$.

6789. — Un vecteur MP de longueur constante a se déplace de telle manière que le point M décrit un cercle d'un mouvement uniforme et que la vitesse du point P soit égale à celle du point M. Trouver la trajectoire du point P. Même question en supposant que la vitesse de P est dirigée vers le point M.

6790. — Etudier le mouvement défini par les équations

$$x = \frac{1}{3}(1 + \sin\omega t - \sqrt{3}\cos\omega t), \qquad y = \frac{1}{3}(1 + \sin\omega t + \sqrt{3}\cos\omega t), \qquad z = \frac{1}{3}(1 + 2\sin\omega t).$$

Nature de la trajectoire.

6791. — On donne un axe fixe autour duquel tourne une droite parallèle Δ d'un mouvement uniforme. Soit M le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et à une droite fixe D. Lieu du point M. Etudier son mouvement.

6792. — Etudier le mouvement $x = L \operatorname{tg} \frac{t+k}{2}$, $y = \sin t$.

6793. — Sachant qu'un point décrit une hélice d'un mouvement uniformément accéléré, trouver les équations du mouvement de ce point.

6794. — Un point se déplace sur un cercle d'un mouvement uniformément accéléré. Trouver la force qui pourrait produire ce mouvement.

6795. — Un cercle est parcouru par un point M d'un mouvement uniforme. Trouver les équations du mouvement de la projection du point M dans un plan donné.

6796. — Déterminer le mouvement d'un point sur une hélice circulaire de manière que l'hodographe se projette sur un plan passant par l'axe du cylindre suivant une parabole ayant son foyer sur l'axe.

6797. — Déterminer le mouvement d'un point M dans un plan sachant que O étant un point fixe du plan, la droite OM tourne autour du point O avec une vitesse constante ω, que la vitesse v du point M est égale : 1° à $\frac{K}{OM^2}$, K désignant une constante ; 2° à $\sqrt{K.OM}$; 3° à K.OM.

6798. — On considère deux ellipses ayant un foyer commun et décrites par deux points suivant la loi des aires, ces deux points se trouvant en coïncidence en chacun des points communs aux deux ellipses. Étudier le mouvement du milieu des deux points.

6799. — Un vecteur MP de grandeur constante se déplace de façon que M décrive un cercle donné et que la vitesse du point P soit toujours dirigée vers le point M. Déterminer la trajectoire du point P.

6800. — Un segment AB se meut dans un plan. Chercher si, à un instant donné, il existe sur ce segment un point dont la vitesse soit dirigée suivant AB.

6801. — Deux vecteurs OA et OB tournent autour du point O avec des vitesses angulaires constantes, égales et de signes contraires. Construire la vitesse du point I, milieu de AB. Montrer que cette vitesse est perpendiculaire à AB. Lieu du point I.

6802. — On donne un cône de révolution et une droite D parallèle à l'axe : on mène la perpendiculaire commune à D et à une génératrice G du cône. Étudier le mouvement du pied M de cette perpendiculaire sur G, quand G tourne d'un mouvement uniforme.

6803. — Étudier le mouvement rectiligne dans lequel l'accélération est proportionnelle au carré de la vitesse.

6804. — Une droite se déplace dans l'espace. Démontrer qu'à un instant donné les vitesses de tous ses points sont parallèles à un plan.

6805. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Un point M de masse m décrit un cercle situé dans le plan des xy avec une vitesse angulaire constante ω. Un point M′ de masse m' décrit un cercle situé dans le plan des xz avec la même vitesse angulaire ω. Déterminer le mouvement du centre de gravité des deux points.

6806. — Étudier le mouvement $x = at^2 + a_1t + a_2$, $y = bt^2 + b_1t + b_2$, $z = ct^2 + c_1t + c_2$.

6807. — Étudier le mouvement plan dans lequel le vecteur accélération est à chaque instant perpendiculaire au vecteur vitesse et à même longueur.

6808. — On donne dans un plan deux points fixes O et A, et une droite D. A tout point M de la droite on fait correspondre le point M_1 symétrique de A par rapport à OM. Étudier le mouvement de M_1 lorsque M décrit D d'un mouvement uniforme.

6809. — On considère un cercle de rayon OA, et sur la tangente en un point M du cercle, on porte une longueur MP = arc AM du même côté que l'arc AM par rapport au point M. Étudier le mouvement du point P quand M décrit le cercle d'un mouvement uniforme. Du calcul de l'accélération déduire le rayon de courbure.

VII. — Dynamique.

6810. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

6811. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. Cas où la vitesse initiale passe par le centre fixe.

6812. — De la surface terrestre on lance un point matériel suivant la verticale. Quelle doit être la vitesse initiale pour que le point s'éloigne indéfiniment ? Qu'arrivera-t-il quand on lance ce point avec la même vitesse suivant l'horizontale ?

6813. — Avec quelle vitesse doit on lancer un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance pour qu'il décrive un cercle ; une hyperbole équilatère ?

6814. — Un point M est attiré par un point fixe O suivant une force inversement proportionnelle à la distance. La résistance du milieu ambiant étant proportionnelle à la vitesse, étudier le mouvement du point. La vitesse initiale passe par le point O.

6815. — On donne un cercle dans un plan vertical ; un point matériel se déplaçant sur le cercle est lancé du point le plus bas. Quelle doit être la vitesse initiale pour qu'il arrive au point le plus haut ?

6816. — Un point décrit une ellipse sous l'action d'une force émanée d'un foyer et inversement proportionnelle au carré de la distance. Le point partant d'un sommet à l'époque O, calculer sa position à l'instant t, sachant que la durée de la révolution est T. Anomalie vraie, anomalie excentrique. Discuter l'équation $\varphi - e \sin \varphi = \frac{2\pi t}{T}$.

6817. — Mouvement d'un point attiré par Ox et Oy, en raison inverse du cube des distances du point à ces axes.

6818. — Un point M a un mouvement rectiligne vibratoire simple. Trouver le mouvement d'un point P attiré à chaque instant par le point M proportionnellement à la distance.

6819. — On considère un point attiré par un centre fixe en fonction de la distance. Déterminer le rayon vecteur en fonction du temps.

6820. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde.

6821. — Étudier le mouvement d'un point assujetti à se déplacer sur une droite avec frottement et attiré par un point fixe situé en dehors de la droite proportionnellement à la distance.

6822. — On considère un point M mobile dans un champ uniforme d'intensité H. Soit v la vitesse du mobile. Trouver le mouvement du point M soumis à une force constante F perpendiculaire au plan Hv.

6823. — Que devient le théorème des aires lorsque le centre attractif s'éloigne indéfiniment ?

6824. — Étudier le mouvement d'un point pesant sur une hélice circulaire dont l'axe est vertical.

6825. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse de la quatrième puissance de la distance. La vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur et la constante des forces vives est nulle. Construire la trajectoire.

6826. — Valeur moyenne de $f(\rho)$ dans le mouvement des planètes pour une révolution complète, la variable étant le temps, ρ le rayon vecteur, et $f(\rho)$ une fonction de ρ. Cas particulier où $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$.

6827. — On lance sur une sphère un point assujetti à y rester et qui n'est soumis à aucune force. Déterminer le mouvement.

6828. — Même question en remplaçant la sphère par un cylindre de révolution.

6829. — Un point décrit la cardioïde $r = a(1 - \cos\theta)$ sous l'action d'une force passant par l'origine et fonction de r. Quelle est cette force ? Problème inverse. Ayant trouvé la force, étudier le mouvement du point.

6830. — On lance un point horizontalement sur la terre. Quelle doit être la vitesse initiale pour que le point fasse le tour de la terre ?

6831. — Etudier le mouvement d'un point pesant lancé sur un paraboloïde de révolution à axe vertical.

6832. — Un point matériel est assujetti à décrire une parabole. Il est soumis à une force normale à l'axe de la parabole, et la projection du point sur l'axe a un mouvement uniforme. Déterminer la force.

6833. — Travail élémentaire de la force $X = 1$, $Y = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Fonction des forces. Lignes de niveau. Lignes de force.

6834. — Mouvement d'un point soumis à une force centrale proportionnelle à la distance. Traiter la question en écrivant les équations des aires et des forces vives.

6835. — Un point est assujetti à décrire sans frottement un cercle ; il est attiré par une force émanant d'un point du cercle et proportionnelle à la distance. Étudier le mouvement.

6836. — Un point matériel décrit une parabole sans frottement sous l'action d'une force émanée du foyer. Déterminer cette force pour que le mouvement soit uniformément varié.

6837. — Un point matériel est assujetti à décrire une lemniscate sans frottement sous l'action d'une force émanée du point double. Quelle doit être cette force pour que le rayon vecteur varie proportionnellement au temps ?

6838. — Deux projectiles sont lancés d'un même point avec une même vitesse initiale, mais sous des angles différents et à des époques différentes. Ces deux projectiles peuvent-ils se rencontrer ?

6839. — Travail de la force $X = \frac{1}{y^2}$, $Y = -\frac{2x}{y^3}$, $Z = z^2$. Examiner s'il y a un potentiel.

6840. — La courbe $r = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ est parcourue par un mobile suivant la loi des aires. Trouver la force qui le sollicite.

6841. — Un point est attiré par l'axe Oz proportionnellement à sa distance à l'axe. Montrer qu'on peut disposer des données initiales pour qu'il décrive une hélice circulaire tracée sur un cylindre ayant pour axe Oz.

6842. — Travail élémentaire de la force $X = y^2 + 2xy$, $Y = x^2 + 2xy$. Y a-t-il une fonction des forces ?

6843. — On donne deux axes rectangulaires, Ox horizontal et Oy vertical, et dans le plan de ces deux axes on considère une courbe C passant par le point O. Un point pesant assujetti à décrire la courbe est abandonné au point O sans vitesse initiale. Déterminer la courbe : 1° de façon que le temps mis à parcourir l'arc $OM = s$ soit fonction de s ; 2° de façon que l'ordonnée du point M soit fonction de s.

6844. — On donne une cycloïde dans un plan vertical, la base étant horizontale et la concavité tournée vers le haut. On abandonne un point pesant sans vitesse initiale en l'un des points de rebroussement. Quel temps mettra-t-il pour arriver au sommet ?

6845. — Etudier le mouvement d'un point décrivant une lemniscate sous l'action d'une force passant par le centre. Expression de la force. Problème inverse.

6846. — Démontrer que dans le mouvement des planètes, l'hodographe est un cercle. Réciproquement si l'hodographe est un cercle, et si la force passe par un point fixe, celle-ci est inversement proportionnelle au carré de la distance.

6847. — Travail d'une force dans un mouvement de rotation.

6848. — Un point M décrit une parabole de foyer F suivant la loi $FM = f(t)$. Calculer la force qui sollicite le point en fonction de $r = FM$.

6849. — Un point matériel est assujetti à décrire une ellipse, en étant soumis à une force émanant du centre. Déterminer cette force pour que la tangente à l'ellipse tourne d'un mouvement uniforme.

6850. — Un point est soumis à l'action d'une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au carré de la distance. La trajectoire peut-elle être une hyperbole équilatère ?

6851. — Un point est soumis à l'action de la force $X = -\frac{ky}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{kx}{x^2 + y^2}$, $Z = -g$. Y a-t-il une fonction des forces ? Surfaces de niveau ; lignes de force.

6852. — Trouver l'hodographe dans un mouvement produit par une force centrale. Cas où la force est proportionnelle à la distance.

6853. — On lance de l'origine et en même temps divers points pesants suivant une même direction, mais avec des vitesses différentes. Lieu de leurs positions à l'instant t. Lieu des sommets des paraboles.

6854. — D'un point O de l'espace on laisse tomber un mobile, puis au bout d'un temps θ on lance un deuxième mobile vers le bas avec une vitesse v_0. Le deuxième mobile atteindra-t-il le premier ?

6855. — Un cercle situé dans un plan horizontal est décrit par un point M. A ce point est attaché un fil inextensible

et sans masse dont l'autre extrémité est attachée à un point A, dont on connaît le mouvement. Comment varie la tension de ce fil ?

6856. — D'un point O on lance un mobile pesant avec une vitesse v_0 donnée en grandeur et en direction. Ce mobile décrit une parabole. On suppose cette parabole coupée par un plan horizontal. Le mobile s'y réfléchit. Etudier le mouvement du mobile après réflexion.

6857. — Un point matériel est soumis à une seule force, rencontrant une droite fixe. Comment sera la trajectoire ?

6858. — On lance vers le haut avec une vitesse initiale v_0 un point pesant sur un plan incliné. Le point frottant sur le plan repassera-t-il par sa position initiale ? Quelle y sera sa vitesse ?

6859. — Un point matériel pesant se déplace avec frottement sur un cercle vertical. Etudier sa vitesse en fonction de sa position sur la courbe.

6860. — Travail élémentaire de la force $X = 1 - \frac{y^2}{r^2}$, $Y = \frac{2y}{x}$. Travail total. Fonction des forces. Lignes de niveau. Lignes de force.

6861. — Mouvement d'un point pesant sur une hélice dont l'axe est horizontal.

6862. — Un point matériel étant attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, le lancer d'un point A pour qu'il atteigne un point B.

6863. — Calculer le travail total de la force $X = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $Z = \frac{1}{z}$ quand le point d'application décrit une spire d'hélice tracée sur un cylindre de révolution d'axe Ox.

6864. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox et un point B sur Oy, $OA = OB = a$. On considère un point soumis à l'action d'une force centrale émanée du point O et proportionnelle à la distance. On lance ce point du point A avec une vitesse v_0 faisant l'angle θ avec Ox. Quelle relation doit-il exister entre v_0 et θ pour que le point passe en B ?

6865. — Sur une droite glisse un point matériel A auquel est attaché une extrémité d'un fil élastique. A l'autre extrémité est fixé un autre point matériel M se déplaçant sur la même droite. Le mouvement de A étant donné, déterminer celui de M.

6866. — Appliquer le théorème des aires et le théorème des forces vives au mouvement d'un point attiré d'un centre fixe par une force $F = -\frac{k}{r^3} - \frac{k}{r^2}$, r désignant le rayon vecteur. Etudier la trajectoire.

VIII. — Statique

6867. — On donne une ellipse dont le grand axe est vertical. Son foyer supérieur F est considéré comme une poulie infiniment petite sur laquelle passe un fil reliant deux points A et B, qui sont assujettis à se mouvoir sur l'ellipse. Conditions d'équilibre.

6868. — Un point pesant M se déplace sur un plan horizontal avec frottement. Il est relié par un fil élastique à un point fixe A du plan. La longueur de ce fil est l, et quand le fil s'allonge, la tension est proportionnelle à l'allongement. Plages d'équilibre.

6869. — On considère deux points pesants M et M', assujettis à se déplacer sur un cercle vertical et reliés par un fil sans masse tendu sur le cercle. Equilibre du système.

6870. — Equilibre d'un point matériel pesant assujetti à se déplacer avec frottement sur une parabole à axe vertical.

6871. — Un point matériel pesant est placé sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, l'axe des z étant vertical. Position d'équilibre en supposant qu'il y ait frottement.

6872. — On donne un disque circulaire et un point A qui se projette orthogonalement au centre du disque. Chaque élément du disque est attiré par le point A en raison inverse de la distance et proportionnellement à la masse de l'élément. Trouver la résultante de ces attractions. Que devient-elle lorsque le rayon du disque augmente ?

6873. — On donne une barre AA' dont on désigne par ρ la masse de l'unité de longueur. Un point B, situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AA', est attiré par chaque élément de la barre en raison inverse du carré de la distance et proportionnellement à la masse de l'élément. Trouver la résultante de toutes ces attractions.

6874. — Une force constante tourne autour de son point d'application dans un plan donné. Lieu de l'extrémité du moment de cette force par rapport à un point fixe O.

6875. — Equilibre d'un point M pesant, placé sur un cercle vertical et soumis à l'action d'une force attractive émanant du point A, extrémité gauche du diamètre horizontal du cercle et proportionnelle à la distance AM. Montrer que la résultante des deux forces rencontre la tangente en A en un point fixe.

6876. — Un point pesant A placé sur un plan horizontal est attiré par un point fixe O de ce plan en raison inverse du carré de la distance OA. Il y a frottement. Trouver les plages d'équilibre.

6877. — Equilibre d'un point matériel pesant situé sur la surface intérieure d'un paraboloïde elliptique à axe vertical, en supposant qu'il y ait frottement.

6878. — Deux points pesants de poids p et p' sont placés sur un plan horizontal ; ils sont reliés par un fil élastique qui développe une tension proportionnelle à l'allongement. On désigne par f et f' les coefficients de frottement pour chacun des points. Trouver les positions d'équilibre.

6879. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces puisse se réduire à deux passant par deux points donnés. Expliquer l'indétermination du résultat.

6880. — Réduire un système de forces à deux dont l'une soit sur une droite donnée. Solution géométrique et analytique.

6881. — On donne n droites dans l'espace. Peut-on trouver des forces portées par ces droites et se faisant équilibre ? Discuter suivant la valeur de n.

6882. — Conditions d'équilibre d'un corps solide assujetti à passer par un point fixe et à reposer sur un plan fixe.

6883. — Peut-on réduire un système de forces appliquées à un corps solide à deux forces portées sur deux droites données ?

6884. — On considère un système de forces situées dans un même plan, et on fait tourner chaque force autour de son point d'application avec une même vitesse angulaire. Chercher l'enveloppe de la résultante du système.

6885. — Réduire un système de forces à deux rectangulaires.

6886. — Démontrer que la perpendiculaire commune à deux forces rencontre l'axe central de leur système. Lieu du moment résultant quand son point d'application décrit la perpendiculaire commune.

6887 — Faire la réduction d'un système de forces représentées géométriquement par les arêtes AB, AC, AD, BC, CD, DB d'un tétraèdre ABCD.

6888. — Déterminer deux forces dont les supports doivent rencontrer Ox et qui sont telles que la résultante générale et le moment resultant par rapport au point O sont sur Oz.

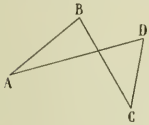
6889. — A quelles conditions peut-on réduire un système de forces à deux dont l'une soit parallèle à Ox et l'autre à Oy ?

6890. — Trouver l'axe central du système formé par trois forces appliquées l'une en un point A de Ox, l'autre en un point B de Oy et la troisième en un point C de Oz.

6891. — Quatre forces sont placées sur quatre génératrices de même système d'un hyperboloïde. Condition pour qu'elles admettent une résultante unique ?

6892. — Tout système de forces appliquées à un corps solide peut se réduire à six forces placées sur les arêtes d'un tétraèdre, et cette réduction est unique.

6893. — On considère quatre forces situées dans un même plan et représentées par les côtés d'un quadrilatère concave AB, BC, CD, DA. Ces quatre forces peuvent-elles se faire équilibre ?

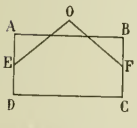


6894. — Réduire un système de forces à deux dont l'une soit dans un plan donné et ait une grandeur donnée.

6895. — Un corps solide est mobile autour d'un point O ; il repose en outre sur un plan fixe par un point A. Ce corps est soumis à un système de forces quelconques. Conditions d'équilibre.

6896. — Aux milieux des côtés d'un polygone plan on applique normalement des forces proportionnelles à ces côtés et dirigées vers l'extérieur. Démontrer que ces forces se font équilibre.

6897. — On considère un tableau rectangulaire ABCD ; on fixe deux cordons égaux sur les côtés AD et BC, et on les réunit par leur extrémité O. On accroche le cordon en O contre un mur, le côté CD reposant sur le mur. Equilibre du système.



6898. — Equilibre d'une barre reposant sur le sol avec frottement et sur un cylindre de révolution tangent au sol. Le cylindre est supposé parfaitement poli.

6899. — On donne deux points fixes O et O' situés sur une même horizontale. Une barre pesante AB a son extrémité A attachée à un fil fixé en O. Au point B est attaché un autre fil passant par le point O' et à l'extrémité duquel est appliquée une force F. Position d'équilibre du système. Pour quelle valeur de F, AB est-elle horizontale ? Calculer dans ce cas la tension du fil OA.

6900. — Equilibre d'un corps sur un plan incliné avec frottement.

6901. — Une échelle double est posée sur un plan horizontal. Une personne y est placée à une certaine hauteur ; on réunit par une corde les deux montants. On demande la tension de la corde en négligeant tous les frottements.

6902. — Une échelle double repose sur un plan horizontal sur lequel elle frotte. En négligeant les frottements à la charnière, on demande quel est l'angle maximum des deux montants pour que l'échelle ne s'aplatisse pas.

6903. — Equilibre d'une sphère soumise à l'action d'un système de forces et assujettie à être tangente à une droite.

6904. — En un point A d'un mur vertical est attaché un fil AB, à l'extrémité B duquel est attachée une tige BC, le point C reposant sur le mur avec frottement. Trouver les positions d'équilibre.

6905. — Equilibre d'une tige pesante passant par un point fixe et reposant sur le bord supérieur horizontal d'un mur vertical : 1° sans frottement ; 2° avec frottement.

6906. — On considère une barre rigide pesante dans un plan vertical, appuyée par ses extrémités sur deux plans, l'un vertical et l'autre horizontal. Discussion de l'équilibre. Cas où il n'y a frottement que sur le mur vertical.

6907. — Centre de gravité d'un arc de parabole.

6908 — Centre de gravité d'un arc d'hélice circulaire. Mouvement de ce point quand l'une des extrémités de l'arc se déplace d'un mouvement uniforme.

6909. — Centre de gravité de la table de Pythagore.

6910. — Soit G le centre de gravité d'un arc de cercle AM. Le point A restant fixe, et le point M décrivant le cercle d'un mouvement uniforme, trouver le mouvement du point G. Trajectoire et vitesse.

6911. — On considère un tube vertical de 1 mètre de long, de 1 centimètre carré de section droite et pesant 300

grammes. On le remplit de mercure jusqu'à une certaine hauteur. Trouver le centre de gravité du système. Combien faut-il verser de mercure pour que le centre de gravité soit le plus bas possible ?

6912. — Centre de gravité du volume d'un hémisphère homogène.

6913. — Centre de gravité de l'aire limitée par une parabole, son axe et une perpendiculaire à l'axe.

6914. — Centre de gravité d'un hémisphère, la densité en chaque point étant une fonction $f(z)$ de la distance z de ce point à la base de l'hémisphère. Cas particulier : $f(z) = kz$, $f(z) = k(R - z)$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1739. — 1° Étudier les variations des fonctions

$$\varphi_1(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\frac{x^2}{2!}}, \qquad \ldots \qquad \varphi_p(x) = \frac{e^x - 1 - x \ldots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}}{\frac{x^p}{p!}}.$$

2° Trouver la somme de la série entière dont le terme général est $\dfrac{f(n)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}x^n$, p étant un entier positif, f un polynome.

Th. L.

1740. — Trouver une courbe (S) telle que le cercle (C) décrit de chaque point de la courbe comme centre, avec le rayon de courbure comme rayon, soit orthogonal à un cercle fixe (γ).

On construira les différentes formes de courbes obtenues, ainsi que leurs développées et leurs podaires par rapport au centre de (γ).

On construira, dans chaque cas, l'enveloppe du cercle (C). Enfin on rectifiera toutes les courbes (S).

J. Haag.

1741. — Une ellipse E a son centre en un point donné O et est tangente à un plan donné P, la distance du point O au plan P étant égale à la moitié OB du petit axe BB'. On la fait rouler sans glisser sur le plan P, le centre restant en O. Quel est le lieu du point de contact de l'ellipse avec le plan.

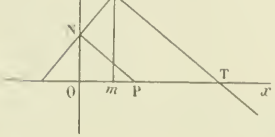
L'ellipse étant dans sa position initiale, on considère les ellipsoïdes, en nombre simplement infini, qui ont deux sommets opposés en B et B', qui passent par l'ellipse E, et qui sont tangents au plan P. Ces ellipsoïdes se raccordent le long de l'ellipse E ; si on les suppose entraînés par cette ellipse, ils roulent sur le plan P.

G. F.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

1661. — *Trouver une courbe telle qu'il y ait un rapport constant entre la sous-tangente en un point quelconque* M *et le segment* OP *compris entre l'origine et le point* P *où la parallèle à la tangente en* M, *menée par le point de rencontre de la normale au point* M *avec* Oy, *rencontre* Ox.



Soit $M(x, y)$ un point de la courbe cherchée et y' la dérivée de y par rapport à x ; l'équation de la tangente est

$$Y - y = y'(X - x),$$

et, si nous y faisons $Y = 0$, nous avons $X - x = \overline{mT} = \dfrac{-y}{y'}$.

D'autre part, l'équation de la normale est

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

et, pour $X = 0$, nous avons $Y = y + \dfrac{x}{y'}$;

c'est l'ordonnée du point N.

La parallèle à la tangente menée par le point N a pour équation

$$Y - y - \frac{x}{y'} = y'X;$$

elle coupe Ox au point P d'abscisse $-\frac{yy'+x}{y'^2}$; le rapport $\frac{\overline{mT}}{\overline{OP}}$ est donc égal à $\frac{yy'}{yy'+x}$, et l'on doit poser

$$\frac{yy'}{yy'+x} = k.$$

Finalement, y est donné par l'équation différentielle

$$kx + (k-1)yy' = 0,$$

et la courbe cherchée a pour équation

$$kx^2 + (k-1)y^2 = C.$$

Si k est négatif, ou positif et plus grand que 1, toutes les courbes sont des ellipses rapportées à leurs axes. Si k est compris entre 0 et 1, ces courbes sont des hyperboles.

Si l'on pose $C = kC'$ et que l'on fasse grandir k indéfiniment, on obtient des cercles, ce qui était évident *a priori* et doit être regardé comme une vérification.

Pour $k = \frac{1}{2}$, on a des hyperboles équilatères.

Bonnes solutions: MM. R. Bouvaist; G. Foucry, à Roanne; J. Soudet, à Rouen; D. Georgescu; L. Simon, à Châlons-sur-Marne; Bros, à Albi; Amblard, à Ruines; G. Lach, à Denain; R. Dupendant, à Rouen; H. Auvergne, à Alger; Groscolas, à Beaune.

1672. — *On considère les deux polynomes*

$$f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \cdots, \qquad g(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \cdots.$$

Démontrer l'identité $$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = n^2(1+x^2)^{n-1}.$$

Soient $$f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \cdots \quad \text{et} \quad g(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \cdots$$

les deux polynomes proposés. On a évidemment

$$f(x) + ig(x) = 1 + iC_n^1 x - C_n^2 x^2 - iC_n^3 x^3 \cdots = 1 + C_n^1(ix) + C_n^2(ix)^2 + C_n^3(ix)^3 + \cdots;$$

donc $$f(x) + ig(x) = (1+ix)^n.$$

De même $$f(x) - ig(x) = (1-ix)^n.$$

et par suite $$\overline{f(x)}^2 + \overline{g(x)}^2 = (1+x^2)^n.$$

En dérivant les deux identités précédentes par rapport à x, on a aussi successivement

$$f'(x) + ig'(x) = ni(1+ix)^{n-1}. \qquad f'(x) - ig'(x) = -ni(1-ix)^{n-1},$$

et, par suite, $$\overline{f'(x)}^2 + \overline{g'(x)}^2 = n^2(1+x^2)^{n-1}.$$

On pourrait continuer:

$$f''(x) + ig''(x) = -n(n-1)(1+ix)^{n-2}, \qquad f''(x) - ig''(x) = -n(n-1)(1-ix)^{n-2},$$

et $$\overline{f''(x)}^2 + \overline{g''(x)}^2 = n^2(n-1)^2(1+x^2)^{n-2}.$$

Autre solution. — En posant $x = \operatorname{tg}\varphi$, le polynome $f(x)$ est égal à $\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}$, et $g(x)$ à $\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}$.

On a donc bien

$$\overline{f(x)}^2 + \overline{g(x)}^2 = \frac{1}{\cos^{2n}\varphi} = (1+x^2)^n.$$

On a de même

$$f'(x) = \frac{-n\sin n\varphi\cos^n\varphi + n\cos n\varphi\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx},$$

$$g'(x) = \frac{n\cos n\varphi\cos^n\varphi + n\sin n\varphi\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi}{\cos^{2n}\varphi}\frac{d\varphi}{dx};$$

d'ailleurs

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

et l'on a

$$f'(x) = -n\frac{\sin(n-1)\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad g'(x) = n\frac{\cos(n-1)\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}\frac{d\varphi}{dx},$$

et

$$\overline{f'(x)}^2 + \overline{g'(x)}^2 = \frac{n^2(1+x^2)^{n+1}}{(1+x^2)^2} = n^2(1+x^2)^{n-1}.$$

A. DARMON, élève au lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; P. Brizard ; L. Gauthier, à Fermanville ; J. Soudet, à Rouen ; Groscolas, à Besançon ; A. Duby, à Dijon ; Gh. Giuncu, à Jassy.

1673. — *Déterminer un polynome du cinquième degré* $P(x)$ *tel que* $P(x)+10$ *soit divisible par* $(x+2)^3$ *et* $P(x)-10$ *par* $(x-2)^3$.

Par hypothèse le polynome

$$\varphi(x) = P(x) + 10$$

est divisible par $(x+2)^3$; donc sa dérivée $P'(x)$ est divisible par $(x+2)^2$, on voit de même que $P'(x)$ est divisible par $(x-2)^2$. Comme ce polynome $P'(x)$ est du quatrième degré, on a

$$(1) \qquad P'(x) = C(x+2)^2(x-2)^2 = C(x^2-4)^2,$$

C étant une constante à déterminer.

De (1) on tire, en intégrant,

$$P(x) = C\left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right) + C_1,$$

C_1 étant une nouvelle constante à déterminer.

Pour calculer C et C_1, nous nous appuyons sur ce que

$$P(-2) + 10 = 0, \qquad P(2) - 10 = 0,$$

ce qui donne

$$C\left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) + C_1 + 10 = 0, \qquad C\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + C_1 - 10 = 0.$$

En ajoutant, on trouve $C_1 = 0$ et par suite $C = \frac{75}{128}$;

finalement

$$P(x) = \frac{75}{128}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right).$$

A. DARMON.

Bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Roanne ; H. Le Sueur, à Nantes ; W. Mérigot ; P. Brizard ; L. Gauthier, à Fermanville ; Rebouillat, à Villersexel ; Groscolas ; R. Dupendant, à Rouen ; Guillerme, à Bourg ; L. Simon, à Châlons ; J. Soudet, à Rouen ; A. Duby, à Dijon ; Gh. Giuncu, à Jassy ; R. Manen.

MÉCANIQUE

1669. — *On considère un cercle*

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

rapporté à un diamètre Ox *et à la tangente* Oy *à l'extrémité de ce diamètre, et un point* M *mobile sur ce cercle.*

1° *Soit* θ *l'angle du rayon vecteur* OM *avec* Ox *et* $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}$ *la vitesse angulaire de ce rayon vecteur autour du point* O. *On suppose en outre qu'à l'origine des temps le rayon* OM *coïncide avec* Oy $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. *Trouver les équations du mouvement du point* M, *la vitesse de ce point, l'accélération et construire l'hodographe.*

2° *Soient* Mx' *l'axe* OM *prolongé et* My' *l'axe perpendiculaire orienté dans le sens* $\theta + \frac{\pi}{2}$. *On suppose un plan entraîné avec ces deux axes dans le mouvement précédent et on demande les équations du mouvement d'un point de ce plan. Trouver le point qui a une vitesse nulle, son lieu dans le plan mobile et aussi dans le plan fixe.*

3° *Trouver le lieu des points du plan mobile qui ont une vitesse égale à celle du point* M.

Ce lieu est un cercle dont on demande l'équation dans le plan mobile. On demande aussi le lieu dans le plan fixe du point de ce cercle qui est le plus rapproché du point O.

1° On a, par hypothèse, $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}$, par suite

$$\theta = -\operatorname{arc\,tg} t + C^{te};$$

or, pour $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; donc la constante d'intégration est égale à $\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\operatorname{arc\,tg} t = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad t = \operatorname{cotg}\theta, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{t}.$$

D'autre part, les coordonnées du point M sont évidemment

$$x = \mathrm{OM}\cos\theta = 2a\cos^2\theta, \qquad y = \mathrm{OM}\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta.$$

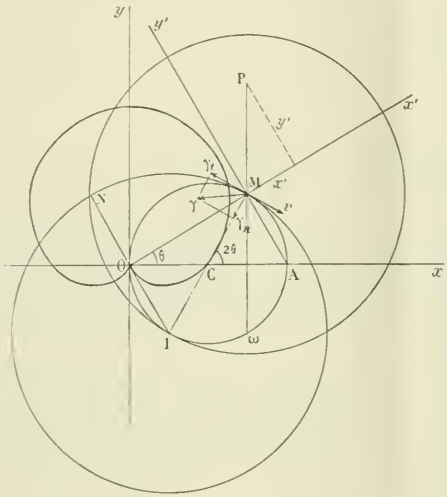
Les équations du mouvement du point M sont donc

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2at}{1+t^2},$$

et les composantes de la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

La vitesse est donnée par $v = \frac{2a}{1+t^2}$, si on suppose le cercle orienté dans le sens du mouvement, et par $v = -\frac{2a}{1+t^2}$, si on suppose le cercle orienté dans le sens habituel.



Pour $t = 0$, la vitesse est maximum et égale à $2a$; elle décroît ensuite quand t augmente, et tend vers 0 quand t grandit indéfiniment. L'angle θ décroît aussi de $\frac{\pi}{2}$ à 0 dans les mêmes conditions et le mobile part de O, tourne sur le cercle dans le sens OMA et se rapproche indéfiniment du point A, sans jamais l'atteindre.

L'accélération a pour composante tangentielle $\gamma_t = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$, quand on oriente le cercle dans le sens du mouvement, et pour composante normale $\gamma_n = \frac{4a}{(1+t^2)^2}$.

L'accélération totale est donc

$$\gamma = \frac{4a}{\sqrt{(1+t^2)^3}} :$$

elle est retardatrice du mouvement, comme on pouvait le prévoir d'après l'étude de la vitesse.

En outre, $\frac{\gamma_t}{\gamma_n} = -t$, $\gamma_n = -\gamma_t \operatorname{tg}\theta$; l'accélération $M\gamma$ fait donc avec la tangente, en sens contraire de la vitesse, un angle égal à θ ; elle décroît depuis $4a$ jusqu'à 0.

Les coordonnées de l'hodographe sont

$$x = \frac{4at}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Ces deux équations sont les équations paramétriques de la courbe. L'équation cartésienne s'obtient en élevant d'abord au carré et ajoutant, ce qui donne

$$x^2 + y^2 = \frac{4a^2}{(1+t^2)^2} ;$$

on en déduit de suite $ax = t(x^2+y^2)$; d'autre part, $\frac{y}{x} = \frac{1-t^2}{2t}$.

L'élimination est alors immédiate et l'on a

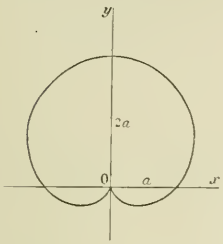
$$\frac{y}{x} = \frac{(x^2+y^2)^2 - a^2x^2}{2ax(x^2+y^2)}.$$

L'équation de l'hodographe est donc finalement

$$(x^2+y^2)^2 - 2ay(x^2+y^2) - a^2x^2 = 0.$$

Mais l'emploi des coordonnées polaires est plus simple encore : l'angle de la vitesse avec Ox est en effet $2\theta - \frac{\pi}{2}$; nous avons donc $\rho = v$, $\omega = 2\theta - \frac{\pi}{2}$;

or $v = \frac{2a}{1+t^2} = 2a\sin^2\theta = a(1-\cos 2\theta)$, et comme $\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sin\omega$,



$$\rho = a(1 + \sin\omega).$$

Cette dernière équation montre que l'hodographe est une cardioïde relative au cercle $x^2 + y^2 - ay = 0$, et à l'origine ; Oy est l'axe de symétrie et la tangente au point de rebroussement. La courbe a la forme ci-contre.

2. Soient P un point du plan mobile, x' et y' ses coordonnées par rapport aux axes Mx' et My', et x, y, ses coordonnées dans l'ancien système. Nous avons de suite

$$x = x_0 + x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = y_0 + x'\sin\theta + y'\cos\theta,$$

en appelant x_0, y_0 les coordonnées du point M ; ensuite

$$x = 2a\cos^2\theta + x'\cos\theta - y'\sin\theta, \qquad y = 2a\sin\theta\cos\theta + x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Il n'y aurait qu'à remplacer $\operatorname{tg}\theta$ par $\frac{1}{t}$ pour avoir les coordonnées du point M en fonction du temps, c'est-à-dire les équations du mouvement du point P.

La trajectoire de ce point s'obtiendrait sans peine en éliminant θ entre les deux équations précédentes ; mais elle est évidente géométriquement. En effet le vecteur MP est invariable dans le système $Mx'y'$, l'angle PMy' et son opposé par le sommet $AM\omega$ sont constants, le point ω est donc fixe, et, comme $MP = C^{te}$, le lieu du point P est un limaçon de Pascal par rapport au cercle donné et au point ω. Si $MP < 2a$, il y a un point double ordinaire au point ω ; si $MP > 2a$, c'est un point isolé ; si $MP = 2a$, c'est un point de rebroussement, le lieu de P est une cardioïde.

Les composantes de la vitesse du point P sont

$$\frac{dx}{dt} = -(4a\sin\theta\cos\theta + x'\sin\theta + y'\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = (2a\cos 2\theta + x'\cos\theta - y'\sin\theta)\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = -(y + a\sin 2\theta)\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = (x - 2a\sin^2\theta)\frac{d\theta}{dt};$$

elles sont nulles au point

$$x = 2a\sin^2\theta, \qquad y = -2a\sin\theta\cos\theta.$$

C'est le point I du cercle C qu'on obtient en changeant θ en $\theta - \frac{\pi}{2}$; c'est le point diamétralement opposé au point M.

Le lieu de ce point dans le plan fixe est donc le cercle donné C, et, dans le plan mobile, c'est le cercle de centre M et de rayon $2a$.

Tous ces résultats sont évidents *a priori* ; car les deux points O et A du plan mobile décrivant des trajectoires tangentes aux droites MO et MA, le point M décrit le cercle C, les trois normales en ces points aux trois trajectoires se coupent au point I, qui est le centre instantané de rotation, et, par suite, le point de vitesse nulle.

Les deux lieux de ce point sont évidents et constituent : l'un, le cercle CO, la roulette fixe, la base du mouvement ; l'autre, le cercle mobile MI, la roulette mobile. Celle-ci roule sans glisser sur le cercle fixe CO et produit le mouvement du plan mobile qu'elle entraîne avec elle. Tous les points de cette roulette engendrent des cardioïdes, les autres engendrent des limaçons de Pascal.

3° La dernière partie est évidente géométriquement : les points qui ont même vitesse que le point M, à l'époque t, sont sur le cercle de centre I et de rayon IM. Le plus près du point O est sur le rayon IO ; c'est le point N. Comme $IN = C^{te} = 2a$, le lieu de ce point est une cardioïde relative au cercle donné et au point O ; elle a pour point de rebroussement le point O et pour tangente Ox. C'est l'une des cardioïdes décrites par un point de la roulette mobile. Il n'y a aucune difficulté à écrire les équations de ces deux lieux.

On peut d'ailleurs trouver l'équation du premier lieu dans le plan mobile en écrivant que

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 = 4a^2 \sin^2 \theta, \qquad \text{ou encore} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Ce calcul donne immédiatement

$$x'^2 + y'^2 + 4ax' \cos \theta + 4ay' \sin \theta = 0.$$

C'est bien le cercle IM.

Quant à l'équation de ce cercle dans le plan fixe, c'est

$$(x - 2a \sin^2 \theta)^2 + (y + 2a \sin \theta \cos \theta)^2 = 4a^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 4ax \sin^2 \theta + 4ay \sin \theta \cos \theta - 4a^2 \cos^2 \theta = 0.$$

On aura le lieu des points de rencontre avec le rayon IO en coupant par la droite

$$y = x \operatorname{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -x \operatorname{cotg} \theta.$$

On déduit de là

$$\frac{\cos \theta}{-y} = \frac{\sin \theta}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

l'équation du dernier lieu est donc

$$(x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0.$$

C'est bien la cardioïde que nous avons signalée.

G. BOULIGAND, élève de mathématiques spéciales, au lycée de Nantes.

Bonnes solutions : MM. L. Gauthier, à Fernanville ; J. Soudet, à Rouen ; Bros, à Albi ; Groscolas, à Besançon ; G. D. et Y. D., à Poitiers ; H. Le Sueur à Nantes ; G. Foucry, à Roanne ; L. Sire, à Lyon ; G. Garbe ; M. Constandaki ; H. Janois, à Nantes ; Gh. Giency, à Jassy.

QUESTIONS PROPOSÉES

1742. — Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{x}$$

et montrer que les fonctions

$$G = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}dt}{1 + t^2}, \qquad H = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x + t}\, dt$$

satisfont à cette équation et sont les mêmes.

P. Brizard.

1743. — La courbe lieu du point du plan d'une parabole à égale distance de la parabole et de son sommet est une développée de parabole.

Cette courbe est aussi le lieu du point dont les trois normales issues de ce point à la parabole et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique.

E.-N. Barisien.

1744. — On considère deux sphères fixes, S et S', de centres O et O', et les sphères variables Σ passant par le centre de S et coupant les sphères S et S' suivant deux cercles orthogonaux.

1° Trouver le lieu des centres des sphères Σ.

2° Trouver l'enveloppe des sphères Σ et construire la section de cette enveloppe par un plan passant par la droite OO'.

Examiner le cas où S et S' sont orthogonales.

Solution géométrique.

G. Pélissier, à Toulouse.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 3. Décembre 1908.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE ET RECTIFICATION DE LA QUESTION 1652,

par M. J. **Haag**.

Dans l'énoncé de la question 1652 :

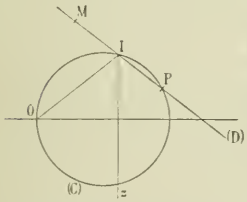
On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy. *Un segment* BC *de grandeur constante et glissant sur* Ox *est l'hypoténuse d'un triangle dont le sommet* A *de l'angle droit décrit* Oy.

1° *Trouver l'enveloppe des côtés de l'angle droit.*

2° *On considère un rectangle dont le centre est le milieu* I *de* AB, *dont une diagonale est dirigée suivant* AB *et a pour longueur* OC, *et dont les côtés sont parallèles aux symétriques par rapport à* Ox *des bissectrices de l'angle* ABC. *On demande l'enveloppe des côtés de ce rectangle, le lieu de ses sommets et de leurs projections sur* AB.

3° *On construit sur* AB *un polygone semblable à un polygone donné, d'ailleurs quelconque. On demande le lieu des sommets de ce polygone et l'enveloppe de ses côtés,* dont la solution a paru dans la *Revue* de Septembre 1908, se trouvait une légère erreur d'impression, qui compliquait considérablement la seconde partie et la rendait par cela même peu intéressante. Dans la deuxième ligne de la seconde partie de l'énoncé, il fallait lire « et a pour longueur BC » au lieu de « et a pour longueur OC ». Avec cette rectification, la solution analytique complète ne doit présenter aucune difficulté. Je me bornerai ici à indiquer une solution géométrique qui intéressera peut-être quelques lecteurs de la *Revue*.

Je rappellerai d'abord la propriété suivante de l'hypocycloïde à trois rebroussements, dont j'aurai dans la suite à faire grand usage.

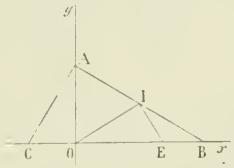


Soit un cercle (C), O un point fixe et I un point variable de ce cercle. Menons Iz parallèle à une direction fixe, d'ailleurs quelconque. Menons ensuite la droite (D), symétrique de OI par rapport à Iz. Cette droite enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, tritangente au cercle (C). Le point de contact M de la droite (D) avec son enveloppe est symétrique du point P par rapport au point I (voir la figure). Enfin, le point O est un point de contact du cercle (C) avec l'hypocycloïde, dans le cas où Iz est perpendiculaire au diamètre passant par O. Dans les autres cas, on a facilement les points de contact par une trisection d'angle que le lecteur apercevra aisément [1].

Ceci étant, arrivons à la solution de la question 1652.

[1] Je ne rappelle pas la démonstration de ces propriétés, dont j'ai déjà eu l'occasion de me servir dans cette Revue. On les trouvera très rapidement en partant de la définition ordinaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements et de la construction classique de sa tangente.

1. Soit I le milieu de AB. Menons IE perpendiculaire à OI. Le triangle rectangle OIE est évidemment semblable au triangle BAC, dans le rapport $\frac{1}{2}$. Donc $OE = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. Par suite le point E est fixe et le point I décrit un cercle (C) de diamètre OE. Il s'en suit, d'après la propriété rappelée plus haut, que AB enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements (H) tritangente au cercle (C), le point O étant l'un des trois points de contact. On verrait de même que AC enveloppe l'hypocycloïde symétrique de la précédente par rapport à Oy.

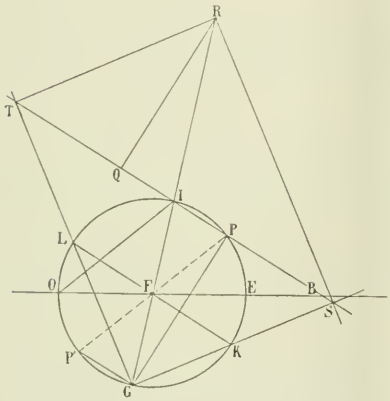


2. Traçons le cercle (C) de diamètre OE. Soit F son centre. Traçons le diamètre IFG. Un raisonnement élémentaire montre que l'angle GIB et l'angle IOB ont des bissectrices parallèles. On en conclut aisément que IG est la seconde diagonale du rectangle de l'énoncé. Comme cette diagonale a pour longueur 2OE, l'une des extrémités est le point G, qui décrit le cercle (C), et l'autre est le point R symétrique de G par rapport à I, et qui décrit un cercle (C') homothétique de (C) dans le rapport 3 et de centre F. Les côtés du rectangle issus de G vont passer par les extrémités K et L du diamètre perpendiculaire à PG, comme on s'en assure en s'appuyant sur ce qu'ils doivent être bissectrices de $\widehat{IGP}$. Mais FK est parallèle à IP ; donc

$$\widehat{EFK} = \widehat{IOF}.$$

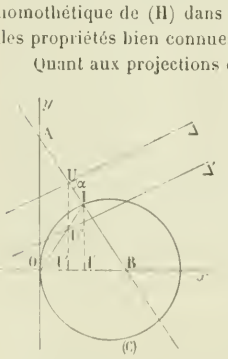
Par suite,

$$\widehat{OPG} = \widehat{IPE} = \widehat{2EK}.$$



Il s'en suit que GK est symétrique de OK par rapport à la perpendiculaire à OE menée par K. Donc GK enveloppe l'hypocycloïde (H). Même chose pour GL. Les deux autres sommets S et T du rectangle sont respectivement symétriques de G par rapport à K et à L. Ce sont donc les points de contact de (H) avec GK et GL. Les côtés RT et RS enveloppent évidemment une hypocycloïde (H') homothétique de (H) dans le rapport -3, relativement au point F. (Ceci nous démontre en passant des propriétés bien connues sur l'hypocycloïde à trois rebroussements et sur sa développée.)

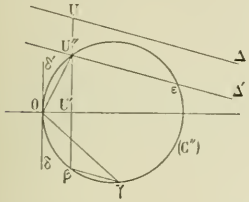
Quant aux projections des sommets G et R sur AB, elles décrivent, l'une P le cercle (C), l'autre Q l'hypocycloïde (H).



3. Soit Δ un côté quelconque du polygone en question. Il coupe AB en U sous un angle constant α et le rapport $\frac{UA}{UB}$ est aussi constant. On déduit de cette dernière propriété que le rapport $\frac{U'U}{U'U''}$ et le rapport $\frac{OU''}{OI}$ sont également constants. Ceci prouve d'abord que U'' décrit un cercle (C'') homothétique à (C) relativement à O. Menons alors par U'' une parallèle Δ' à Δ. La bissectrice de l'angle OU''Δ' a visiblement une direction fixe. Donc Δ' enveloppe une hypocycloïde (H'') tritangente à (C''). Je dis que Δ enveloppe aussi une hypocycloïde.

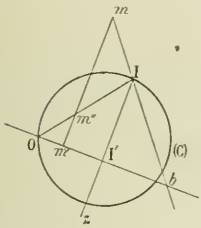
En effet, traçons le cercle (C'). Menons βγ parallèle à Δ' (Voir la figure), joignons Oγ et traçons

la tangente $O\delta$ en O à (C″). Je dis que l'angle $\delta O\gamma$ a même bissectrice que $\widehat{OU''\varepsilon}$. Il suffit, pour le prouver, de montrer que l'angle $\delta' OU''$ est égal à l'angle de $O\gamma$ avec Δ'.



Or le premier a pour mesure $\frac{\widehat{OU''}}{2}$. Le second a pour mesure $\frac{\widehat{\gamma\varepsilon} - \widehat{OU''}}{2} = \frac{\widehat{\beta U''} - \widehat{OU''}}{2} = \frac{\widehat{\beta O}}{2} = \frac{\widehat{OU''}}{2}$. Donc les deux angles sont bien égaux. Il résulte de là que le point γ reste fixe quand U″ décrit (C″). Or, les droites Δ et Δ' sont homothétiques relativement à γ dans le rapport constant $\frac{\beta U}{\beta U''}$. Comme Δ' enveloppe une hypocycloïde, il en est de même de Δ. Nous avons de plus un moyen très simple de placer cette hypocycloïde, en s'appuyant sur ce qui précède.

Reste à trouver le lieu d'un sommet quelconque du polygone. Soit m un tel sommet. Si on le joint au point I, on obtient une droite faisant un angle constant avec BC, et par suite symétrique de OI par rapport à une direction fixe Iz. De plus, le rapport $\frac{Im}{OI}$ est constant. Or, soit Ob la perpendiculaire à Iz et $mm''m'$ parallèle à Iz. On a les égalités suivantes :



$$\frac{OI}{Om''} = \frac{OI}{OI - Im} = \frac{1}{1 - \frac{Im}{OI}} = c^{te}.$$

Donc m'' décrit un cercle (C‴) homothétique de (C). Puis

$$\frac{m'm''}{II} = \frac{Om''}{OI} = c^{te},$$

$$\frac{mm}{II} = \frac{bm}{bI} = \frac{OI + Im}{OI} = 1 + \frac{Im}{OI} = c^{te},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{m'm}{m'm''} = c^{te}.$$

Il résulte de là que le point m décrira la projection d'un cercle ou une courbe pouvant se projeter suivant un cercle, c'est-à-dire une ellipse, dont les axes seront évidemment parallèle et perpendiculaire à Ob et qui passera par O. Nous n'insistons pas davantage sur cette ellipse dont il serait très facile de déterminer tous les éléments.

Remarque. — Dans la solution fournie par la *Revue* dans le numéro de Septembre 1908, l'auteur, cherchant l'enveloppe d'un côté du polygone, se borne à dire que cette enveloppe est une courbe de troisième classe. Il était très facile de voir sur l'équation obtenue que c'était une hypocycloïde à trois rebroussements. En divisant l'équation par $\cos(\varphi - \beta)$ et posant $\operatorname{tg}(\varphi - \beta) = m$, on voit de suite que l'équation de la droite prend la forme

$$y = mx + \frac{\varphi_3(m)}{1 + m^2},$$

$\varphi_3(m)$ désignant un certain polynome du troisième degré en m. Or c'est là, comme on sait, la forme caractéristique de l'équation d'une tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements.

NOTE SUR L'ÉQUATION DE RICCATI,

par M. J. **Haag**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Je me propose d'exposer ici les propriétés les plus importantes d'une équation célèbre, qui, sans être au programme de la classe de Mathématiques spéciales, peut intéresser les lecteurs de la Revue, car on la rencontre dans un grand nombre de questions de Géométrie. Cette équation, qu'on appelle l'équation de Riccati, est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a + by + cy^2, \tag{1}$$

a, b, c étant des fonctions quelconques de x.

On ne sait pas intégrer cette équation dans le cas général. Mais on peut le faire dès que l'on en connaît une intégrale particulière y_1. Posons en effet

$$y = y_1 + \frac{1}{z}. \tag{2}$$

L'équation devient, en tenant compte de ce que y_1 vérifie l'équation (1),

$$\frac{dz}{dx} + z(b + 2cy_1) + c = 0. \tag{3}$$

On arrive donc à une équation linéaire, qui s'intègre, comme on sait, par deux quadratures dans le cas général et par une quadrature quand on en connaît une intégrale particulière. Donc

Théorème. — *L'équation de Riccati s'intègre par deux ou une quadrature suivant que l'on en connaît une ou deux intégrales particulières.*

L'équation (3) a une intégrale générale de la forme

$$z = X + CX_1. \qquad (C = \text{c}^{\text{te}} \text{ arbitraire}).$$

Donc, l'équation (1) a une intégrale générale de la forme

$$y = \frac{X_2 + CX_3}{X + CX_1}. \tag{4}$$

D'où l'on déduit sans peine le théorème suivant :

Théorème. — *Le rapport anharmonique de quatre intégrales particulières de l'équation de Riccati est indépendant de la variable x.*

De ce théorème résulte que si l'on connaît trois intégrales particulières y_1, y_2, y_3, l'intégrale générale sera donnée par

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C,$$

où C désigne une constante arbitraire. L'équation s'intégrera donc dans ce cas par des calculs purement algébriques.

Application. — Soit l'équation

$$y'' + Ay' + By = 0, \tag{5}$$

où A et B sont des fonctions quelconques de x. Posons

$$y = e^{\int z dx}. \tag{6}$$

L'équation transformée est

$$z' + z^2 + Az + B = 0. \tag{7}$$

C'est une équation de Riccati. *Si donc on sait intégrer* (7), *on saura aussi intégrer* (5).

Inversement *toute équation de Riccati se ramène à une équation linéaire du second ordre.* Soit en effet l'équation

(8) $$u' + au^2 + bu + c = 0.$$

Posons $u = \lambda z$, l'équation devient

$$\lambda z' + a\lambda^2 z^2 + z(b\lambda + \lambda') + c = 0,$$

équation qui sera identique à (7), si l'on prend

$$a\lambda - 1 = 0, \qquad A = b + \frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad B = \lambda c.$$

L'intégration de (8) se ramène donc bien à celle d'une équation de la forme (5). De cette transformation de l'équation de Riccati, on déduira sans peine toutes les propriétés établies plus haut, en s'appuyant sur ce que l'intégrale générale de (5) est

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

où y_1 et y_2 désignent deux intégrales particulières distinctes.

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE QUELCONQUE DE CERCLES,

par M. **J. Haag**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

La présente note a pour but de donner aux lecteurs de la Revue quelques principes généraux sur la recherche des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles. Les résultats que je vais exposer se trouvent d'ailleurs dans l'ouvrage de M. Darboux sur la théorie des surfaces (Tome I, pages 113 et suivantes).

Considérons une famille quelconque de cercles C. Soient x_0, y_0 et R les coordonnées du centre et le rayon de l'un quelconque de ces cercles. Ce sont trois fonctions données d'un certain paramètre u. Pour trouver l'équation différentielle des trajectoires orthogonales Γ, appliquons la méthode employée par MM. Cotty et Durand pour la solution des questions 1595 et 1635, méthode qui n'est autre que celle qu'utilise M. Darboux dans l'ouvrage cité plus haut. Appelons v l'angle polaire d'un rayon quelconque d'un cercle C. Les coordonnées de l'extrémité de ce rayon sont

(1) $$x = x_0 + R\cos v, \qquad y = y_0 + R\sin v.$$

Ce point décrira une courbe Γ si l'on a

$$\sin v . dx - \cos v . dy = 0$$

ou $$\sin v[(x_0' + R'\cos v)du - R\sin v dv] - \cos v[(y_0' + R'\sin v)du + R\cos v dv = 0$$

ou (2) $$R\frac{dv}{du} + y_0'\cos v - x_0'\sin v = 0.$$

Or, posons $$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = t,$$

l'équation (2) devient

(3) $$2\frac{dt}{du} + \frac{y_0'}{R}(1 - t^2) - 2\frac{x_0'}{R}t = 0.$$

Cette équation est bien connue ; c'est une équation de Riccati. Appliquons-en les propriétés.

On sait d'abord que le rapport anharmonique de quatre intégrales de cette équation est indépendant de u. D'où :

Théorème. — *Soient quatre trajectoires quelconques* Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *et soient* M_1, M_2, M_3, M_4 *les points où elles coupent un même cercle* C. *Quand celui-ci varie, le rapport anharmonique* $(M_1M_2M_3M_4)$ *reste constant.*

Une conséquence immédiate est que *si l'on connaît trois trajectoires particulières* Γ_1, Γ_2, Γ_3, on aura la plus générale en prenant sur chaque cercle C un point M qui forme un rapport anharmonique cons-

tant avec M_1, M_2, M_3. Le point M décrira alors une courbe Γ. *Le problème s'achèvera donc dans ce cas par des calculs purement algébriques.* On sait aussi que si l'on connaît *une* ou *deux* intégrales particulières d'une équation de Riccati, l'intégrale générale peut s'obtenir par *deux* ou *une* quadrature. Donc

Théorème. — *Si l'on connaît une ou deux trajectoires particulières, les autres se déterminent par deux ou une quadrature.*

En particulier, supposons que tous les cercles C soient orthogonaux à un cercle fixe Γ_0. Chaque cercle C sera orthogonal à Γ_0 en deux points différents, ce qui donnera donc deux intégrales différentes de l'équation (3). Donc

Théorème. — *Si les cercles d'une famille sont orthogonaux à un cercle fixe, leurs trajectoires orthogonales se déterminent par une quadrature.*

Ceci arrive en particulier si les cercles C ont leurs centres en ligne droite, comme dans les questions 1635 et 1595, ou encore si les cercles C passent par un point fixe (cas limite), comme dans la note que j'ai publiée dans la Revue en janvier 1908.

ALGÈBRE

1675. — *On considère la fonction*

$$y = \frac{\alpha \mathrm{L}x - x}{x^2},$$

dans laquelle α désigne un nombre positif donné.

1° *Montrer que cette fonction satisfait à l'équation différentielle*

$$xy' + \alpha y = \frac{\alpha - x}{x^2};$$

en déduire le calcul de $y^{(n)}$ en fonction de $y^{(n-1)}$. Calculer y, y', y'' et y''' pour $x = 1$, et trouver comment la parabole

$$y + 1 = (2\alpha - 1)(x - 1) - \frac{3\alpha^2}{2}(x - 1)^2$$

est placée par rapport à la courbe

$$y = \frac{\alpha \mathrm{L}x - x}{x^2},$$

au voisinage du point $(x = 1, \quad y = -1)$.

2° *Étudier la variation de y pour les diverses valeurs positives de α. Construire les courbes qui correspondent aux divers cas, en particulier, celles qu'on obtient pour* $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\alpha = e$.

1. La fonction $y = \frac{\alpha \mathrm{L}x - x}{x^2}$ satisfait à la relation $x^2 y = \alpha \mathrm{L}x - x$, et, par suite, en prenant la dérivée par rapport à x,

$$\alpha x^{\alpha-1} y + x^\alpha y' = \frac{\alpha}{x} - 1, \qquad xy' + \alpha y = \frac{\alpha - x}{x^2}.$$

C'est la relation indiquée.

Elle peut s'écrire

$$xy' + \alpha y = \alpha x^{-2} - x^{-\alpha+1},$$

et, en la dérivant successivement par rapport à x, elle donne

$$xy'' + (\alpha + 1)y' = -\alpha^2 x^{-\alpha-1} + (\alpha - 1)x^{-2};$$
$$xy''' + (\alpha + 2)y'' = \alpha.\alpha.(\alpha + 1)x^{-\alpha-2} - (\alpha - 1)\alpha x^{-\alpha-1};$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$xy^{n+1} + (\alpha + n)y^{(n)} = (-1)^n\alpha.\alpha.(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)x^{-\alpha-n} - (-1)^n(\alpha-1)\alpha\ldots(\alpha+n-2)x^{-\alpha-n+1}.$$

Ces formules donnent successivement y', y'', y''', ..., y^{n}, ...

Pour $x = 1$, on a $y = -1$; puis $y' = 2\alpha - 1$,

$$y'' + (\alpha+1)(2\alpha-1) = -\alpha^2 + \alpha - 1, \qquad y'' = -3\alpha^2;$$

enfin,

$$y''' + (\alpha+2)(-3\alpha^2) = \alpha^2(\alpha+1) - \alpha(\alpha-1), \qquad y''' = 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + \alpha.$$

La parabole

$$y + 1 = (2\alpha-1)(x-1) - \frac{3\alpha^2}{2}(x-1)^2$$

s'obtient en prenant les premiers termes du développement de y par la formule de Taylor, au voisinage du point $x = 1$. Soit y_1 l'ordonnée de la parabole et y celle de la courbe proposée; on a évidemment

$$y = y_1 + \frac{4\alpha^3 + 6\alpha^2 + \alpha}{6}(x-1)^3 + \ldots;$$

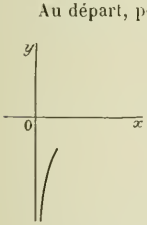
par conséquent

$$y - y_1 = \frac{(\alpha-1)^3}{6}[4\alpha^3 + 6\alpha^2 + \alpha + (x-1)(\ldots)\ldots].$$

Au voisinage de $x = 1$, $y - y_1$ a le signe du premier terme; il est donc négatif avant et positif après; la parabole est au-dessus de la courbe à gauche du point $x = 1$, et au-dessous à droite.

Cette parabole est osculatrice à la courbe au point envisagé; elle a le même rayon de courbure qu'elle; elle rencontre la courbe en trois points confondus, c'est-à-dire qu'elle a deux éléments consécutifs confondus avec elle.

2. En même temps que nous allons étudier les variations de y, nous allons aussi figurer la courbe correspondante.

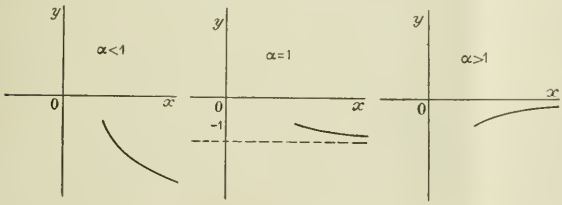


Au départ, pour $x = 0$ ou ε, la fonction est égale à $-\infty$. Pour $x = 1$, elle est égale à -1. Il est d'ailleurs bien visible qu'elle n'existe que pour $x > 0$. Enfin à l'arrivée, pour $x = +\infty$, elle est égale à $-\infty$ si α est plus petit que 1, à -1 si $\alpha = 1$, et à 0 si α est plus grand que 1. (On sait que le terme $\frac{Lx}{x^2}$ a toujours pour limite 0). Si $\alpha = 1$, $y = -1 + \varepsilon$ pour x infini, et si $\alpha > 1$, y est infiniment petit et négatif. Nous aurons donc les trois formes ci-dessous.

Voyons maintenant si la courbe traverse Ox, c'est-à-dire si $\alpha Lx - x$ peut s'annuler. Pour cela, étudions la fonction $u = \alpha Lx - x$; nous avons $u' = \frac{\alpha}{x} - 1$; cette dérivée s'annule pour $x = \alpha$, et on a alors

$$u = \alpha(L\alpha - 1).$$

Avant α, u' est positif, la fonction croît; après α, u' est négatif, la fonction décroît; le nombre trouvé est donc un maximum.



Nous voyons donc de suite que : si α est plus petit que e, la courbe reste au-dessous de Ox, si $\alpha = e$, elle touche Ox au point $x = \alpha = e$; enfin si $\alpha > e$, elle traverse Ox et entre les deux points de rencontre avec Ox, il y a sûrement un maximum.

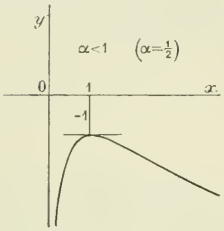
Voyons maintenant la dérivée:

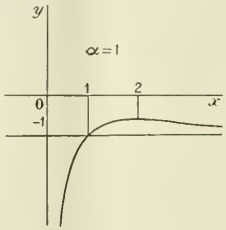
$$y' = \frac{\alpha - x - \alpha^2 \mathrm{L}x + \alpha x}{x^{\alpha+1}}.$$

Nous poserons $z = \alpha - x - \alpha^2 \mathrm{L}x + \alpha x$, et nous aurons $z' = \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{x}$.

Si α est inférieur ou égal à 1, z' est toujours négatif : par suite z décroît toujours. Or pour $x = \varepsilon$, $z = +\infty$ et pour $x = +\infty$, on a le signe de $(\alpha - 1)x$, c'est le signe $-$. La dérivée passe donc du positif au négatif ; la fonction y a un maximum unique. Pour $\alpha = 1$, la racine de la dérivée est égale à e.

On peut donc tracer de suite les courbes qui correspondent aux valeurs de α inférieures à 1 et à $\alpha = 1$.





Nous avons pris comme exemple le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$: alors le maximum a lieu pour $x = 1$.

Quand $\alpha > 1$, z' s'annule pour $x = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$, et alors z va de $+\infty$ à $+\infty$ en passant par un minimum pour cette valeur de x. Ce minimum a pour valeur

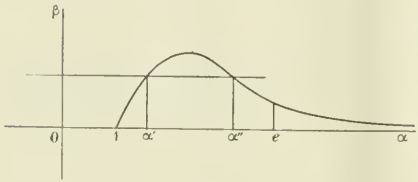
$$\alpha + \alpha^2 - \alpha^2 \mathrm{L} \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} = \alpha^2 \mathrm{L} e^{1+\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}.$$

Tout dépend donc du signe de $\mathrm{L} e^{1+\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$ ou de la position du nombre $\beta = e^{1+\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$ par rapport à 1. Pour $\alpha = 1$, ce nombre est nul ; pour $\alpha = +\infty$, il est nul encore. Voyons s'il a un maximum et quel est ce maximum ; pour cela, annulons β',

$$\beta' = \frac{e^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^4}(-\alpha^2 + \alpha + 1); \qquad \text{la racine est} \qquad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

β est donc maximum pour ce nombre là.

Ce nombre est voisin de 2 et pour $\alpha = 2$, $\beta = e^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} > 1$; on peut alors figurer sans peine la courbe β. De 1 à α', β est plus petit que 1 et z s'annule deux fois ; de α' à α'', β est plus grand que 1, et z ne s'annule pas. Enfin de α'' à $+\infty$, β est plus petit que 1 et z s'annule de nouveau deux fois.



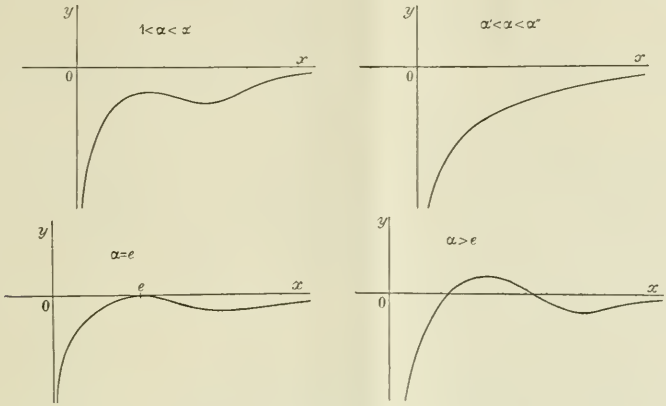
Il est facile de vérifier que β est plus petit que 1 pour $\alpha = e$; e est donc au delà de α''.

Prenons alors une valeur comprise entre 1 et α'. Pour cette valeur de α, la fonction aura un maximum et un minimum et restera toujours négative ; on aura la forme ci-contre.

Pour α compris entre α' et α'', il n'y a pas de sinuosité, y croît toujours.

Enfin, entre α'' et e, les sinuosités réapparaissent et la courbe reste au-dessous de Ox. Pour $\alpha = e$, elle est tangente à Ox.

Pour $\alpha > e$, elle traverse Ox.



Telles sont les différentes formes de courbes que donnent les diverses valeurs positives de α, portées dans la fonction y.

Bonnes solutions : MM. G. Foucay, à Roanne ; P. Baizard ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; Bros ; G. Denay, à Poitiers ; H. Janois, à Nantes ; Amblard, à Ruines.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1676. — *On considère deux paraboles focales l'une de l'autre. Soient* M *un point de l'une et* M′ *un point de l'autre. Soient* Γ *le milieu de* MM′ *et* (P) *le plan perpendiculaire à* MM′ *mené par ce point.*

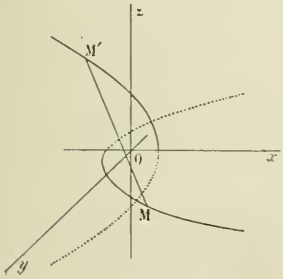
1° *Former l'équation générale des plans* (P). *Chercher les plans* (P) *qui passent à l'origine.*

2° *On considère les plans* (P) *parallèles à l'axe commun* Ox *des deux paraboles. Chercher l'enveloppe de ces plans, le lieu des points* Γ *et des droites* MM′ *qui leur correspondent. Le lieu de* MM′ *est une surface réglée dont on cherchera le degré, la ligne de striction et le contour apparent sur le plan des* yz.

3° *On considère les plans* (P) *qui font avec* Ox *un angle constant. L'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces plans est une hélice située sur un cylindre à base hypocycloïdale et sur un hyperboloïde de révolution. La trace de* (P) *sur* yOz *enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

N. B. — *On prendra pour axe des* x *l'axe commun aux deux paraboles et pour origine des coordonnées le milieu des deux sommets.*

1° Nous prenons pour axe des x l'axe commun, pour plan des xy celui de l'une des paraboles, les axes étant rectangulaires.



Les équations des deux paraboles sont alors

$$\begin{cases} y^2 - 2p\left(x + \frac{p}{4}\right) = 0, \\ z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2 + 2p\left(x - \frac{p}{4}\right) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Nous allons exprimer les coordonnées d'un point de chacune d'elles en fonction d'un paramètre.

Pour la première, on pose $\qquad y = \frac{1}{u}\left(x + \frac{p}{4}\right);$

on en tire, pour les coordonnées de M,

$$x_1 + \frac{p}{4} = 2pu^2, \qquad y_1 = 2pu, \qquad z_1 = 0.$$

Quant à la seconde, on pose $z = \frac{1}{v}\left(x - \frac{p}{4}\right)$, d'où, pour les coordonnées de M',

$$x_2 - \frac{p}{4} = -2pv^2, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = -2pv.$$

Les coordonnées du point Γ sont alors

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = p(u^2 - v^2), \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = pu, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2} = -pv.$$

Remarquons en passant que ce point décrit le paraboloïde équilatère représenté par l'équation

$$y^2 - z^2 = px.$$

Les paramètres directeurs de MM' sont

$$x_1 - x_2 = 2p(u^2 + v^2) - \frac{p}{2}, \qquad y_1 - y_2 = 2pu, \qquad z_1 - z_2 = 2pv.$$

L'équation du plan P est donc

$$(1) \qquad \left[x - p(u^2 - v^2)\right]\left[2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}\right] + (y - pu)2u + (z + pv)2v = 0.$$

Cherchons ceux de ces plans passant à l'origine ; pour cela annulons le terme constant de (1) ; nous avons

$$(u^2 - v^2)\left[2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}\right] + 2(u^2 - v^2) = 0,$$

équation qui se décompose en

$$(2) \qquad u^2 - v^2 = 0, \qquad\qquad (3) \qquad u^2 + v^2 + \frac{3}{4} = 0.$$

La première donne $v = \pm u$; l'équation des plans correspondants est

$$x\left(4u^2 - \frac{1}{2}\right) + 2u(y \pm z) = 0,$$

équation montrant que ces plans se partagent en deux familles, les plans de chacune des familles passant par l'une des droites

$$\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

bissectrices des axes Oy, Oz.

Quant à (3), elle fournit des plans imaginaires.

2° Pour écrire que l'équation (1) représente un plan parallèle à Ox, nous annulons le coefficient du terme en x, ce qui donne

$$(4) \qquad u^2 + v^2 = \frac{1}{4}.$$

(1) devient alors

$$(5) \qquad (y - pu)u + (z + pv)v = 0.$$

Ces plans enveloppent un cylindre parallèle à Ox ; sa trace sur le plan yOz est l'enveloppe de (5), u et v étant reliés par (4).

De (4) on tire $\quad u = \frac{1}{2}\cos\varphi, \qquad v = \frac{1}{2}\sin\varphi,$ $\quad\varphi$ étant un nouveau paramètre.

(5) devient alors

$$(6) \qquad y\cos\varphi + z\sin\varphi - \frac{p}{2}\cos 2\varphi = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe, nous dériverons par rapport à φ ; il vient

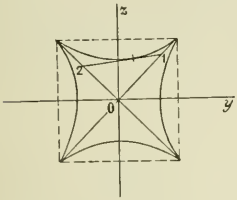
(6)′ $$-y\sin\varphi + z\cos\varphi + p\sin 2\varphi = 0.$$

Nous obtenons une représentation paramétrique de la courbe en résolvant (6) et (6)′ par rapport à y et z, ce qui donne

$$y = \frac{p}{2}(3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi), \qquad z = \frac{p}{2}(2\sin^3\varphi - 3\sin\varphi).$$

Je pourrais construire la courbe en me servant de ces formules, mais il est plus simple de remarquer que c'est une hypocycloïde à quatre rebroussements admettant les bissectrices des axes pour tangentes de rebroussement.

En effet, les coordonnées des points de rencontre de la droite (6) avec ces bissectrices s'obtiennent en faisant $y = z$ et $y = -z$ dans (6), ce qui donne



$$y_1 = z_1 = \frac{p}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi), \qquad y_2 = -z_2 = \frac{p}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

et par suite

$$(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = p^2 = \text{c}^{\text{te}}.$$

Les segments de tangente à la courbe enveloppe compris entre les deux bissectrices ayant une longueur constante, la propriété est établie. Le plan P enveloppe donc un cylindre parallèle à Ox ayant cette hypercycloïde pour base.

Lieu de Γ. — Les coordonnées de Γ sont dans ce cas

$$x = \frac{p}{4}\cos 2\varphi, \qquad y = \frac{p}{2}\cos\varphi, \qquad z = -\frac{p}{2}\sin\varphi.$$

Ces formes paramétriques représentent une biquadratique tracée sur les cylindres

$$y^2 + z^2 = \frac{p^2}{4}, \qquad y^2 = \frac{p}{2}\left(x + \frac{p}{4}\right), \qquad z^2 = -\frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{4}\right);$$

les deux dernières surfaces étant des cylindres paraboliques ont un plan tangent commun, le plan de l'infini; par suite la biquadratique a un point double; c'est ce qui explique sa rationalité.

Lieu de MM′. — La droite MM′ passe par le point Γ; ses équations sont donc

$$\frac{x - p(u^2 - v^2)}{2p(u^2 + v^2) - \frac{p}{2}} = \frac{y - pu}{2pu} = \frac{z + pv}{2pv};$$

or, dans le cas qui nous occupe, $2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2} = 0$.

Donc les équations de MM′ sont

$$x = p(u^2 - v^2), \qquad \frac{y - pu}{u} = \frac{z + pv}{v},$$

ou, en fonction de φ, $\quad x = \frac{p}{4}\cos 2\varphi, \qquad y\sin\varphi - z\cos\varphi - \frac{p}{2}\sin 2\varphi = 0.$

Pour avoir l'équation de la surface engendrée, j'élimine u et v entre les équations de la droite et

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4};$$

j'ai immédiatement $\quad u^2 - v^2 = \frac{x}{p} \quad$ et $\quad 2u^2 = \frac{1}{4} + \frac{x}{p}, \qquad 2v^2 = \frac{1}{4} - \frac{x}{p}.$

Mais de $\quad \frac{y - pu}{u} = \frac{z + pv}{v} = \rho, \quad$ on tire $\quad y = u(\rho + p), \qquad z = v(\rho - p);$

par suite $$(\rho + p)^2 = \frac{y^2}{u^2}, \qquad (\rho - p)^2 = \frac{z^2}{v^2},$$

d'où, par addition et soustraction,

$$\rho^2 + p^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{v^2}\right), \qquad \rho p = \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{u^2} - \frac{z^2}{v^2}\right),$$

ou, en éliminant ρ,

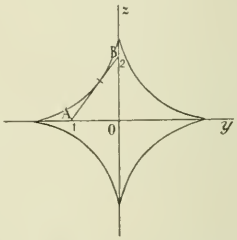
$$\frac{1}{16p^2}\left(\frac{y^2}{u^2} - \frac{z^2}{v^2}\right)^2 + p^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{v^2}\right);$$

u^2 et v^2 étant linéaires en x, cette équation représente une surface du sixième degré.

Ligne de striction. — Considérons deux génératrices G et G′ de la surface ; elles se projettent sur le plan des yz suivant les droites g et g' se coupant en A. Comme G et G′ sont parallèles au plan des yz, leur perpendiculaire commune, et par suite son pied P sur G, se projette en A ; or si G′ tend vers G, P tend vers le point central et sa projection A sur le plan des yz tend vers le point de contact de g avec son enveloppe, donc la ligne de striction se confond avec le contour apparent.

Nous allons chercher la projection de ce dernier sur le plan des yz ; c'est l'enveloppe de la projection de la génératrice sur ce plan, c'est-à-dire de la droite

$$y \sin \varphi - z \cos \varphi - \frac{p}{2} \sin 2\varphi = 0.$$



Cette droite rencontre les axes en des points qui ont pour coordonnées

$$A \begin{cases} y_1 = p \cos \varphi, \\ z_1 = 0 ; \end{cases} \qquad B \begin{cases} y_2 = 0, \\ z_2 = -p \sin \varphi, \end{cases}$$

donc

$$\overline{AB}^2 = p^2 = \text{c}^{\text{te}}.$$

L'enveloppe est donc une hypocycloïde à quatre rebroussements.

3. Les coefficients du plan P sont $\quad 2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}, \quad 2u, \quad 2v$;

les cosinus directeurs de Ox : 1, 0, 0 ; l'angle du plan P avec Ox est donc donné par la relation

$$\sin V = \frac{2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(u^2 + v^2)}} = \frac{2(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}}{2(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sin V}{1 - \sin V}.$$

Or $\frac{1}{2}\frac{1 + \sin V}{1 - \sin V}$ est toujours positif ; on peut donc écrire $u^2 + v^2 = m^2$, m^2 étant une constante.

L'équation du plan P est dans ce cas

$$\left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)x + 2uy + 2vz - p(u^2 - v^2)\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Or on peut poser $u = m \cos \varphi$, $v = m \sin \varphi$, φ étant un nouveau paramètre ; l'équation du plan devient

$$(1) \qquad \left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)x + 2my \cos \varphi + 2mz \sin \varphi - pm^2\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right) \cos 2\varphi = 0.$$

Ce plan, dépendant d'un seul paramètre, enveloppe une surface développable, dont nous aurons l'arête de rebroussement en adjoignant à son équation celles obtenues en la dérivant deux fois par rapport à φ, ce qui donne :

$$(2) \qquad -y \sin \varphi + z \cos \varphi = -pm\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right) \sin 2\varphi,$$

$$(3) \qquad -y \cos \varphi - z \sin \varphi = -2pm\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right) \cos 2\varphi.$$

d'où, en résolvant (2) et (3) et ajoutant (1) et (3),

$$x = -3pm^2 \frac{2m^2 + \frac{3}{2}}{2m^2 - \frac{1}{2}} \cos 2\varphi, \qquad y = 2pm\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)\cos^3\varphi, \qquad z = -2pm\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)\sin^3\varphi.$$

Ces formules nous définissent l'arête de rebroussement : c'est une courbe du sixième ordre ; les deux dernières donnent d'ailleurs

$$y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = \left[2pm\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)\right]^{\frac{2}{3}},$$

équation d'un cylindre parallèle à Ox, contenant la courbe et ayant pour base une hypocycloïde à quatre rebroussements.

On a d'ailleurs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 9m^2p^2 \frac{\left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2}{\left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)^2}\left(2m^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 2\varphi\, d\varphi^2,$$

donc, k désignant une constante, $\qquad ds = k \sin 2\varphi\, d\varphi.$

Or $\qquad dx = 6pm^2 \dfrac{2m^2 + \frac{3}{2}}{2m^2 - \frac{1}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi, \qquad$ donc $\qquad \dfrac{dx}{ds} = \text{c}^{\text{te}}.$

Par suite, la tangente à la courbe fait un angle constant avec Ox. Cette arête de rebroussement est donc bien une hélice.

Montrons encore que cette arête de rebroussement est située sur un hyperboloïde de révolution.

On a, pour représenter la courbe, les formules

$$x = b\cos 2\varphi. \qquad y = 2a\cos^3\varphi, \qquad z = -2a\sin^3\varphi,$$

a et b étant des constantes.

Des deux dernières on tire

$$\frac{y^2 + z^2}{4a^2} = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi;$$

de la première,

$$\frac{x^2}{b^2} = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

ou, en multipliant le premier membre par 1 et le deuxième par $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$,

$$\frac{x^2}{b^2} = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi.$$

Or de $\qquad \cos 2\varphi = \dfrac{x}{b}, \qquad$ on tire $\qquad \sin^2 2\varphi = 1 - \dfrac{x^2}{b^2};$

finalement $\qquad \dfrac{x^2}{b^2} = \dfrac{y^2 + z^2}{4a^2} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{x^2}{b^2}\right),$

ou $\qquad \dfrac{y^2 + z^2}{a^2} - \dfrac{3x^2}{b^2} - 1 = 0,$

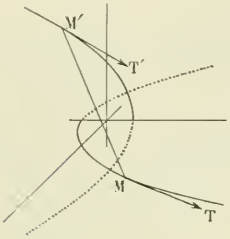
hyperboloïde de révolution à une nappe.

La trace du plan P sur yOz a pour équation

$$y\cos\varphi + z\sin\varphi - \frac{pm}{2}\left(2m^2 + \frac{2}{3}\right)\cos 2\varphi = 0$$

équation qui se déduit de l'équation (6) du premier paragraphe en changeant p en $pm\left(2m^2+\frac{3}{2}\right)$; elle représente donc une droite enveloppant une hypocycloïde à quatre rebroussements situés sur les bissectrices des axes.

Remarque. — Les droites rencontrant les deux paraboles forment une congruence intersection de deux complexes de droites s'appuyant sur chacune des paraboles. Elle est donc de quatrième ordre et de quatrième classe et admet comme surface focale l'ensemble des deux paraboles. Il y a plus : C'est une congruence de normales.



En effet, prouvons que les plans focaux sont rectangulaires : chacun d'eux est défini par MM' et la tangente à l'une des paraboles.

Les paramètres directeurs de MM' sont

$$2p(u^2+v^2)-\frac{p}{2}, \qquad 2pu, \qquad 2pv;$$

ceux des tangentes MT, M'T',

$$4pu, \quad 2p, \quad 0; \qquad 4pv, \quad 0, \quad -2p;$$

les coefficients A, B, C ; A', B', C' des plans (MM', MT), (MM', M'T') vérifient les équations

$$A\left(u^2+v^2-\frac{1}{4}\right)+Bu+Cv=0, \qquad A2u+B=0,$$

$$A'\left(u^2+v^2-\frac{1}{4}\right)+B'u+C'v=0, \qquad A'.2v+C'=0.$$

Des deux premières on tire

$$\frac{A}{-v}=\frac{B}{2uv}=\frac{C}{v^2-u^2-\frac{1}{4}};$$

des deux dernières,

$$\frac{A'}{u}=\frac{B'}{-\left(u^2-v^2-\frac{1}{4}\right)}=\frac{C'}{-2uv},$$

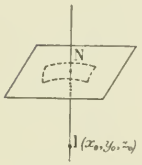
d'où

$$AA'+BB'+CC'=-uv-2uv\left(u^2-v^2-\frac{1}{4}\right)-2uv\left(v^2-u^2-\frac{1}{4}\right)=0;$$

la propriété est établie.

Toutes les droites MM' envisagées sont normales à une famille de surfaces parallèles.

Cherchons ces surfaces.



Les équations de MM' sont

$$\frac{x-p(u^2-v^2)}{2(u^2+v^2)-\frac{1}{2}}=\frac{y-pu}{2u}=\frac{z+pv}{2v}=\rho.$$

Mettons les coordonnées de l'un quelconque de ses points sous la forme :

$$x=x_0+\alpha\rho, \qquad y=y_0+\beta\rho, \qquad z=z_0+\gamma\rho,$$

avec

$$(1) \qquad x_0=p(u^2-v^2), \qquad y_0=pu, \qquad z_0=-pv.$$

$$\alpha=2(u^2+v^2)-\frac{1}{2}, \quad \beta=2u, \qquad \gamma=2v.$$

Cherchons à déterminer un point N sur MM' par sa distance ρ (ou une quantité proportionnelle) à I, en écrivant que cette droite est normale à tout déplacement infiniment petit effectué sur la surface lieu du point N au voisinage de ce point, ce qui s'exprime par la condition

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=0;$$

cette équation donne, tout calcul fait,

$$udu-vdv+\rho(udu+vdv)+\frac{d\rho}{2}\left[2(u^2+v^2)+\frac{1}{2}\right]=0;$$

c'est la différentielle totale de

$$u^2-v^2+\rho\left[2(u^2+v^2)+\frac{1}{2}\right]=\text{cte},$$

d'où

$$\rho = \frac{C}{2(u^2+v^2)+\frac{1}{2}} - \frac{u^2-v^2}{2(u^2+v^2)+\frac{1}{2}}.$$

En portant cette valeur de ρ dans les expressions de x, y, z, on a toutes les surfaces cherchées ; elles sont algébriques et unicursales.

A. DARMON.

Bonnes solutions de MM. P. Albertini, à Nice ; Bros ; J. D. Dufaut, à Poitiers ; R. Bouvaist.

CONCOURS DE 1908

POUR L'EMPLOI DE

COMMISSAIRE-CONTROLEUR DES SOCIÉTÉS D'ASSURANCES SUR LA VIE (*)

Epreuves éliminatoires.

Mathématiques

I. — **1745**. — Calculer l'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

II. — **1746**. — Construire la courbe

$$y = xe^{-\sqrt{\frac{3}{4}}\left(x-\frac{1}{x}\right)} - 1.$$

Calculer à $\frac{1}{1000}$ près l'ordonnée du maximum et celle du minimum et à $\frac{1}{100}$ près la plus petite racine de l'équation

$$xe^{-\sqrt{\frac{3}{4}}\left(x-\frac{1}{x}\right)} - 1 = 0.$$

III. — Deux urnes contiennent l'une 4 boules blanches et 8 boules noires, l'autre 10 boules blanches et 12 boules noires. On tire, d'un seul coup, 6 boules de la première urne pour les mettre dans la seconde. On demande la probabilité de tirer une boule blanche de la seconde après cette opération.

IV. — **1747**. — On considère l'équation linéaire

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\,y = 0.$$

On pose

(2) $$y = uv$$

et on demande de déterminer la fonction u de manière que l'équation en v, qui sera aussi linéaire et du second ordre, manque de second terme.

Application à l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (2-h^2x^2)\,y = 0.$$

Etablir l'intégrale et voir ce qu'elle deviendrait si on remplaçait h par ki $(i^2 = -1)$.

Epreuves definitives.

Composition financière.

I. — Exposer sommairement les diverses méthodes de calcul de la réserve mathématique des assurances à terme.

II. — Une entreprise de capitalisation émet annuellement, le 1er janvier, 1000 bons remboursables à 1000 fr. l'un au plus tard au bout de 20 ans, et par anticipation, au moyen de tirages semestriels ayant lieu, les 1er mars et 1er septembre de chaque année.

Il sort à chaque tirage 1 bon sur 250 bons émis dans une même série annuelle.

(*) Le prochain concours aura lieu le 10 février 1909 (Ministère du Travail).

La prime est de 12 francs par trimestre, payable les 1er janvier, 1er avril, 1er juillet et 1er octobre. En cas de remboursement par anticipation, les versements à échoir cessent d'être dus.

1° Quel est le chargement compris dans la prime ?

2° L'entreprise ayant commencé à fonctionner le 1er janvier 1901, quel est le montant de ses réserves mathématiques au 31 décembre 1903.

On supposera que le taux annuel de capitalisation est de 3 1/2 0/0.

III. — Trois personnes d'âges x, y, z, désirent se constituer une rente viagère annuelle immédiate, reposant sur leurs trois têtes, payable jusqu'au dernier décès, et devant toujours se partager également entre les vivants. Quelle est la prime unique pure de cette opération ? Quelle est, dans cette prime, la part contributive de chacune des personnes considérées ?

QUESTION PROPOSÉE

1748. — 1° Construire la courbe (S), $\rho = \frac{a}{\operatorname{th}\omega}$, et déterminer en particulier la position de cette courbe par rapport à son asymptote.

2° On mène la symétrique de MO par rapport à la tangente en M à (S) ; cette droite rencontre la perpendiculaire à OM au point O en un point P. Trouver le lieu de ce point.

3° On fait tourner (S) autour de O. Trouver les trajectoires orthogonales des courbes ainsi obtenues. Construire une de ces courbes (T).

4° On considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon a. Trouver le lieu des centres des cercles (C) orthogonaux à (Γ) et tels que le diamètre passant par O ait une extrémité sur la courbe (T) précédemment construite.

Donner une construction géométrique des points de contact du cercle (C) avec son enveloppe.

J. Haag.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1674. — *On considère une ellipse et un point* M *de l'ellipse. De* M *on abaisse les trois normales à l'ellipse, ayant pour pieds* A, B, C. *Construire la quartique lieu du centre des ellipses qui passent par* M, A, B, C *et un foyer de l'ellipse, lorsque* M *varie.*

Soit $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes et $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point M de cette ellipse. L'hyperbole d'Apollonius relative au point M par rapport à l'ellipse a pour équation

$$c^2xy + b^3x\sin\varphi - a^3y\cos\varphi = 0;$$

elle rencontre l'ellipse au point M, puis aux pieds A, B, C des normales issues du point M. Par suite, l'équation d'une conique quelconque passant par les quatre points M, A, B, C est

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + c^2xy + b^3x\sin\varphi - a^3y\cos\varphi = 0.$$

Cette conique passe par le foyer $(c, 0)$ de l'ellipse, si $\lambda = \frac{c}{b}\sin\varphi$. Nous sommes donc conduits à chercher le lieu des centres des coniques

$$c\sin\varphi(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + b(c^2xy + b^3x\sin\varphi - a^3y\cos\varphi) = 0,$$

quand φ varie.

Le centre est défini par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} 2b^2cx\sin\varphi + b(c^2y + b^3\sin\varphi) = 0, \\ 2a^2cy\sin\varphi + b(c^2x - a^3\cos\varphi) = 0. \end{cases}$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant φ entre ces deux équations.

La première nous donne

$$\sin\varphi = -\frac{c^2y}{b(2cx + b^2)}$$

et la seconde

$$a^3b\cos\varphi = 2a^2cy\sin\varphi + bc^2x = bc^2x - \frac{2a^2c^3y^2}{b(2cx + b^2)} = \frac{c^2[b^2x(2cx + b^2) - 2a^2cy^2]}{b(2cx + b^2)},$$

ou

$$\cos\varphi = \frac{c^2[b^2x(2cx + b^2) - 2a^2cy^2]}{a^3b^2(2cx + b^2)}.$$

Écrivons maintenant que $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, nous obtenons l'équation du lieu

$$\frac{c^4y^2}{b^2(2cx + b^2)^2} + \frac{c^4[b^2x(2cx + b^2) - 2a^2cy^2]^2}{a^6b^4(2cx + b^2)^2} = 1,$$

ou

$$a^6b^2c^4y^2 + c^4[b^2x(2cx + b^2) - 2a^2cy^2]^2 = a^6b^4(2cx + b^2)^2.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport à Ox. En ordonnant l'équation par rapport à y, on reconnaît qu'elle est bicarrée, ce qui permettrait de la discuter et de construire la courbe. On voit immédiatement que cette courbe admet un point double sur Ox ayant pour abscisse $-\frac{b^2}{2c}$.

Mais la construction de la courbe sera beaucoup plus simple en se servant d'équations paramétriques.

Revenons aux équations (1) et résolvons-les par rapport à x et y, nous obtenons

$$x = -\frac{a^2(ac\cos\varphi + 2b^2\sin^2\varphi)}{c(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi(b^2c + 2a^3\cos\varphi)}{c(4a^2\sin^2\varphi - c^2)};$$

ce sont les coordonnées du centre en fonction du paramètre φ.

Transportons l'origine des coordonnées au point double $\left(x = -\frac{b^2}{2c},\ y = 0\right)$, il suffit de remplacer x par $x - \frac{b^2}{2c}$; la première équation s'écrit alors

$$x = -\frac{a^2(ac\cos\varphi + 2b^2\sin^2\varphi)}{c(4a^2\sin^2\varphi - c^2)} + \frac{b^2}{2c} = -\frac{2a^3\cos\varphi + b^2c}{2(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}.$$

Par suite, les équations paramétriques du lieu sont

$$x = -\frac{2a^3\cos\varphi + b^2c}{2(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi(2a^3\cos\varphi + b^2c)}{c(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}.$$

Nous aurons toute la courbe en faisant varier φ dans un intervalle quelconque dont l'étendue soit égale à 2π. Si nous changeons φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change de signe ; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox. Si nous choisissons comme intervalle de variation de φ l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, nous pouvons le décomposer en deux, $(-\pi, 0)$ et $(0, +\pi)$ qui nous donneront deux branches de courbes symétriques par rapport à Ox.

Il suffira donc de faire varier φ dans l'intervalle $(0, \pi)$, de construire la branche de courbe correspondante, puis de tracer la symétrique de cette branche par rapport à Ox.

x et y sont discontinus pour les valeurs de φ qui annulent le dénominateur $4a^2\sin^2\varphi - c^2 = 0$.

Dans l'intervalle $(0, \pi)$ $\sin\varphi$ est positif et prend la valeur $\frac{c}{2a}$ pour deux valeurs de φ supplémentaires, l'une aigue que nous appellerons α, l'autre obtuse $\pi - \alpha$.

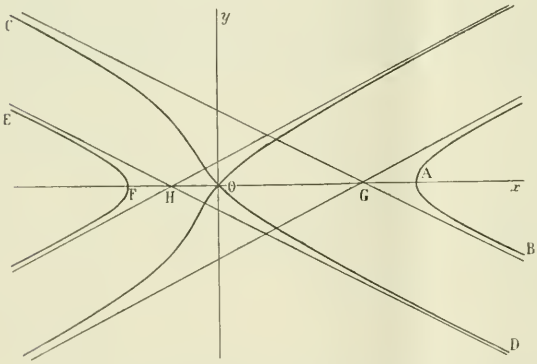
D'autre part, x et y s'annulent pour une valeur de φ comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π et dont le cosinus est égal à $-\frac{b^2c}{2a^3}$. Soit β cette valeur ; nous avons

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{c^2}{4a^2} - \frac{b^4c^2}{4a^6} = \frac{4a^6 - a^4c^2 - b^4c^2}{4a^6} > 0,$$

et par suite $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi - \alpha < \pi$.

Nous pouvons alors dresser le tableau suivant qui donne les signes et les valeurs remarquables de x et y :

φ	0		α			β		$\pi - \alpha$			π
x	$\frac{2a^3 + b^2c}{2c^2}$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	$-\frac{2a^3 - b^2c}{2c^2}$
y	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0



Nous en déduisons les branches de courbe AB, COD et EF. Comme la courbe est symétrique par rapport à Ox les tangentes aux points A et F sont ou bien parallèles à Oy, ou bien portées sur Ox. Cette dernière hypothèse est impossible, car si la tangente au point A était Ox, le point A serait un point de rebroussement ; l'axe des x rencontrerait la courbe en trois points confondus en A, en deux points confondus au point O, et cela est évidemment impossible puisque la courbe est du quatrième degré. Donc les tangentes en A et F sont parallèles à Oy.

Cherchons maintenant les asymptotes. Considérons d'abord les branches AB et OC correspondant aux valeurs de φ voisines de α.

Nous avons $\frac{y}{x} = -\frac{2b\sin\varphi}{c}$; pour $\varphi = \alpha$ $\lim. \frac{y}{x} = -\frac{2b\sin\alpha}{c} = -\frac{b}{a}$.

La direction asymptotique a pour coefficient angulaire $-\frac{b}{a}$.

D'autre part

$$y + \frac{b}{a}x = \frac{b\sin\varphi(2a^3\cos\varphi + b^2c)}{c(4a^2\sin^2\varphi - c^2)} - \frac{b(2a^3\cos\varphi + b^2c)}{2a(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}$$

$$= \frac{b(2a^3\cos\varphi + b^2c)}{2ac(4a^2\sin^2\varphi - c^2)}(2a\sin\varphi - c) = \frac{b(2a^3\cos\varphi + b^2c)}{2ac(2a\sin\varphi + c)}.$$

Pour $\varphi = \alpha$, on a

$$\lim.\left(y + \frac{b}{a}x\right) = \frac{b(2a^3\cos\alpha + b^2c)}{2ac(2a\sin\alpha + c)} = \frac{(a^2\sqrt{4a^2 - c^2} + b^2c)b}{4ac^2}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{b(a^2\sqrt{4a^2 - c^2} + b^2c)}{4ac^2};$$

cette droite rencontre Ox en un point G situé entre les points O et A. Un calcul analogue montre que l'asymptote aux branches OD et FE qui correspondent aux valeurs de φ voisines de $\pi - \alpha$ a pour équation

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{b(-a^2\sqrt{4a^2 - c^2} + b^2c)}{4ac^2};$$

cette droite rencontre Ox en un point H situé entre O et F.

Il n'y a plus qu'à achever par symétrie par rapport à Ox.

G. FOUCRY, à Roanne.

Bonnes solutions par MM. Bros ; Malplat, 140e d'infanterie ; L. Simon, à Châlons.

ÉCOLE CENTRALE (1908)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie (M. Gérard.)

4308. — Reste de la division d'un nombre entier par 25, par 9.

4309. — Preuve par 9 de la multiplication.

4310. — La suite des nombres premiers est illimitée.

4311. — Démontrer que si un nombre premier divise un produit de deux facteurs, il divise au moins l'un d'eux.

4312. — Si on divise deux nombres par leur p. g. c. d., les quotients obtenus sont premiers entre eux. — Réciproque.

4313. — Démontrer que le produit de deux nombres premiers avec un troisième est premier avec ce troisième.

4314. — Si a est premier avec b, il est premier avec b^2.

4315. — Tout multiple commun à a et à b est multiple de leur p. p. m. c.

4316. — Si on multiplie deux nombres par un troisième, leur p. p. m. c. est multiplié par ce nombre.

4317. — Calculer à $\frac{1}{10}$ près $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{11}}$.

4318. — Calculer $\sqrt{\frac{5}{9}}$ à $\frac{1}{1000}$ près.

4319. — Limite supérieure de l'erreur commise sur le produit $\pi\sqrt{2}$ en prenant $\pi = 3{,}14$, $\sqrt{2} = 1{,}41$.

4320. — Calculer à $\frac{1}{10}$ près $\frac{1}{\pi}$, $\pi\sqrt{2}$, π^2, e^2, $\frac{\pi}{e}$.

4321. — Démontrer que

$$2^{\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{5}+\frac{4}{3}}, \qquad a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}, \qquad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{4}{15}}, \qquad \sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{5}, \qquad \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}.$$

4322. — Effectuer le produit $a^{\frac{p}{q}} \times b^{\frac{m}{n}}$; démontrer que $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

4323. — Résoudre et discuter les systèmes

$$\left|\begin{array}{r} x + 2y + mz = 1 \\ 2x + my + z = 2 \\ mx + y + 2z = 7, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = m \\ a^2x + b^2y + c^2z = m^2, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{r} ax + 3y + z = b \\ 2x + ay + 2z = c \\ x + az = d, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{r} ax + by + cz = a^2 \\ bx + cy + az = ab \\ cx + ay + bz = b^2. \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{r} \lambda x + y - 2z = a \\ x - 2y + \lambda z = b \\ -2x + \lambda y + z = c, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{r} x + y + z = \alpha \\ ax + by + cz = \beta \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \end{array}\right.$$

4324. — Trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme et la somme de leurs carrés.

4325 — Développement de $(x-a)^{11}$. — Démontrer que les coefficients sauf le premier et le dernier sont divisibles par 11.

4326. — Somme des carrés, des cubes des n premiers nombres impairs.

4327. — Développement de $(a+b+c)^3$.

4328. — Somme des termes d'une progression géométrique. — Appliquer à

$$e^{ix}+e^{2ix}+e^{3ix}+\ldots+e^{nix}.$$

4329. — Calculer la somme des n premiers termes de la série

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots.$$

Étudier la convergence de la série

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

obtenue en prenant la dérivée de chaque terme. — Calculer la somme de cette série.

4330. — Étudier les séries

$$u_n=\frac{3n+1}{8n+5},\qquad u_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n},\qquad u_n=\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{2n},$$

$$u_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2},\qquad u_n=\frac{1}{n.4^n},\qquad u_n=\frac{1}{n.5^n},$$

$$u_n=\frac{3n+1}{n!}\ \text{(somme de la série)},\qquad u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n},$$

$$u_n=\frac{1}{n^2},\qquad u_n=\frac{1}{n^3},\qquad u_n=\frac{2}{n^2-1},$$

$$u_n=\sin\frac{1}{n(n+1)},\qquad u_n=\operatorname{arc\,cos}\frac{n}{n+1},\qquad u_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3n+4},\qquad u_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n^2+1},$$

$$u_n=\frac{\sin nx}{n^2},\qquad u_n=\frac{\sin^n x}{n!},\qquad u_n=\frac{(-1)^n}{n+1},\qquad \cdots+\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}+\cdots.$$

$$u_n=\frac{x^n}{n^2+1}\ \text{(évaluer la somme à } \frac{1}{10}\text{ près pour } x=-1),\qquad u_n=\frac{nx^n}{n^2+1},\qquad u_n=\frac{n^2x^n}{n^4-1},$$

$$u_n=\frac{x^{2n}}{\sqrt{n}},\qquad u_n=\frac{x^n}{\sqrt{n^3+1}},\qquad u_n=\frac{(n-1)x^n}{\sqrt{n^3+1}},\qquad u_n=\frac{(n^2+1)x^n}{\sqrt{1+n^5}}.$$

4331. — Calculer à $\frac{1}{10}$ près la somme des termes de la série $u_n=\frac{n}{4^n}$.

4332. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près e, e^{-2}.

4333. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près la somme des termes de la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots+\frac{1}{n.2^n}+\cdots$$

4334. — $\sqrt[n]{2}$ tend vers 1 quand n augmente indéfiniment. Déterminer m de façon que

$$2^{\frac{1}{m}}<1+\frac{1}{1\,000}.$$

4335. — Démontrer que si $0<a<1$, a^x tend vers 0 quand x augmente indéfiniment.

4336. — Déterminer p de façon que pour $n>p$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1}{1\,000}.$$

4337. — Démontrer que $\mathrm{L}x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.

4338. — Montrer que $\mathrm{L}\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\mathrm{L}x$.

4339. — Calcul des logarithmes vulgaires en partant des logarithmes népériens.

4340. — Dérivées des fonctions suivantes

$$y=(x^3-x)^3,\qquad y=\sqrt[10]{x},$$

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right),\qquad y=\cos 2x,\qquad y=\sin 3x,$$

$$y=e^{\sin x},\qquad y=e^{\sin 2x},\qquad y=e^{\mathrm{L}(x^2+1)},$$

$$y=\mathrm{L}\sin e^{3x^2+4},\qquad y=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2},$$

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2},\qquad y=\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2},$$

$$y=\operatorname{arc\,tg}(2^{\sin^2 x}),\qquad y=e^{\frac{x\sqrt{3}}{2}}.\cos\frac{x}{2}.$$

4341. — Dérivée seconde d'un produit de deux facteurs. — Application à $y = \sin 3x . e^{4x}$.

4342. — Dérivées successives de $y = xe^x$. — Variation.

4343. — Dérivées successives de $y = \dfrac{1}{a^2 - b^2x^2}$, $y = \dfrac{4}{x^2 - 4}$, $y = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$.

4344. — Dérivée d'une fonction composée. — Application à $y = u^v . \sin v$, $y = u^{\sin v}$.

4345. — Trouver les deux premières dérivées de la fonction $y = f(u, v)$: $u = \sin x$, $v = \operatorname{tg} x$.

4346. — Dérivées de $y = x^x$, $y = \sin x^{\operatorname{tg} x}$, $y = (\sin x)^{\operatorname{tg}^3 x}$, $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{tg}^2 3x}$, $y = (\operatorname{tg} 2x^3)^{\sin \mathrm{L} x}$, $y = \operatorname{tg}(\sin x^{\cos x})$, $y = (\sin x)^{\mathrm{L}(x^2+4)}$, $y = [\mathrm{L}(x^2 + 5)]^{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

4347. — Dérivée d'une fonction implicite. — Application à $x^y = e$, $\sin y = x$, $e^{2y} - x^2 - 1 = 0$.

4348. — Dérivée seconde de y définie par l'équation $f(x, y) = 0$. — Application à $y^2 - 2px = 0$.

4349. — Étudier les variations des fonctions

$$y = p^x(x^2 - 2x + 2) - 2, \qquad y = \frac{e^x - 1}{x}, \qquad y = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi), \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{x},$$

$$y = \sin x . \sin 3x, \qquad y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) . \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

$$y = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{cotg} x, \qquad y = 5 \sin^2 x + 3 \sin x . \cos x + \cos^2 x,$$

$$y = \mathrm{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

4350. — Maximum de $y = \sin x(1 - \cos x)$ $(0 < x < \pi)$,

$$y = \sin^2 x . \sin 2x, \qquad y = \operatorname{tg} x . \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = \operatorname{cotg} x . \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

4351. — Maximum du produit des sinus des angles d'un triangle isocèle

$$u = \sin x . \sin y . \sin z.$$

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1908 (*Suite*).

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Physique et Chimie.

I. — **1749.** Dans un tube de porcelaine rempli de coke et porté au rouge on fait passer un courant d'air chaud chargé de vapeur d'eau.

On recueille dans un eudiomètre 200 centimètres cubes du mélange gazeux ainsi obtenu. Après agitation avec un excès de potasse, le volume du gaz est réduit à 192 centimètres cubes. On expulse la potasse, on rince la chambre eudiométrique, on y introduit la quantité de gaz tonnant nécessaire pour rendre la combustion complète et on fait jaillir dans le mélange une étincelle électrique : le volume s'abaisse à 157 centimètres cubes. Une nouvelle agitation avec de la potasse amène enfin ce volume à 135 centimètres cubes. Une addition d'acide pyrogallique au liquide, qui brunit, prouve d'ailleurs que le mélange final contient encore de l'oxygène.

Sachant que toutes les mesures de volume sont effectuées sur des gaz saturés de vapeur d'eau et ramenées à la même pression et à la même température, l'on dira :

1° Quels sont les gaz qui constituent le mélange analysé, supposé sec ;

2° Quelle est la composition centésimale, en volumes, de ce mélange ;

3° Quelle est la valeur, approchée à un centième près par excès, de sa densité δ par rapport à l'air.

On supposera que les gaz étudiés obéissent rigoureusement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac. On admettra que l'air utilisé est composé uniquement d'oxygène et d'azote en proportions normales, et l'on adoptera pour les poids moléculaires de l'azote atmosphérique et des autres éléments chimiques les valeurs usuelles en nombres entiers.

II. — **1750.** On a préparé une eau savonneuse de masse spécifique μ.

On commence par mesurer sa hauteur d'ascension h dans un tube capillaire de diamètre $2r$.

On plonge ensuite un instant dans ce liquide le tube de dégagement d'un gaz de densité δ ; après avoir arrêté le courant gazeux, on attend que la bulle formée soit en équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère ambiante, où règne la pression p_a ; on mesure alors son diamètre $2R$.

1° Exposer très brièvement quels sont les phénomènes capillaires mis en jeu par ces expériences, et montrer comment on peut les expliquer par l'existence d'une tension superficielle A, dont on donnera la définition.

2° Donner les relations qui lient les grandeurs littérales précitées, l'accélération g de la pesanteur et la pression p qui règne à l'intérieur de la bulle, et justifier les formules employées par l'étude de l'équilibre du liquide dans le tube de diamètre très petit $2r$:

a) Ecrire la condition d'équilibre du très petit volume de liquide compris entre le ménisque que, conformément à l'expérience, l'on supposera de forme sensiblement sphérique, et le plan de section droite qui lui est tangent en son sommet ;

b) en déduire la hauteur h de la colonne soulevée ;

c) en admettant, sans démonstration, la légitimité de l'extension de la formule trouvée au paragraphe *a*, au cas d'une surface libre sphérique de courbure finie, et en supposant égales les tensions superficielles du liquide au contact de l'air et du gaz gonflant la bulle, établir l'équation qui détermine p.

3° Calculer d'après les données numériques ci-dessous, la valeur de la différence $p - p_a$, qui sera exprimée successivement en C. G. S. et en fractions de kilogrammes par centimètre carré ; donner également la valeur de la tension superficielle en C. G. S. et en milligrammes par millimètre.

Par une légère secousse, on détache la bulle du tube maintenu vertical de manière à l'abandonner dans l'atmosphère sans vitesse verticale initiale : la bulle s'élève, et au bout du temps t, crève en arrivant au contact du plafond du laboratoire, élevé de H au-dessus de l'extrémité du tube.

4° Donner l'expression littérale des forces qui sollicitent la bulle d'épaisseur e plongée dans l'air de masse spécifique a ; en déduire celle de l'accélération γ qu'elles lui impriment : on négligera les variations de ces forces pendant le déplacement de la bulle et la résistance que l'air oppose à son mouvement.

5° Calculer la valeur numérique de l'accélération γ en C.G.S., et avec un seul chiffre significatif, celle de l'épaisseur e en fractions de millimètre.

Données numériques en C.G.S. :

$$\mu = 1, \qquad h = 3, \qquad 2r = 0{,}1, \qquad 2R = 10, \qquad t = 5, \qquad H = 410.$$

On donnera à δ la valeur trouvée au § 3 de 1 ; on supposera la pression atmosphérique p_a voisine de la normale et la température voisine de 15° centigrades.

Mathématiques.

I. — **1751**. Dans un triangle rectiligne ABC on désigne par :

a, b, c, les longueurs des trois côtés ;

b' la projection du vecteur CA sur le vecteur CB ;

c' la projection du vecteur BA sur le vecteur BC ;

h_a la hauteur relative au côté a.

On demande de calculer :

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ et h_a en fonction de a, b, c ; et de démontrer la relation :

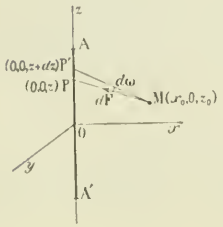
$$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

II. — **1752**. Calculer les dérivées des fonctions de x suivantes :

$$\log \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad \log\left[x+\sqrt{x^2+a}\right],$$
$$\log\left[x-\sqrt{x^2+a}\right].$$

La notation log désigne un logarithme néperien.

III. — **1753**. On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et deux points A et A' situés sur Oz de part et d'autre de O, à des distances $OA = OA' = l$.



Soit z l'ordonnée d'un point quelconque P de la droite AA'. Chaque élément infinitésimal $PP' = dz$ de cette droite AA' exerce sur tout point M de l'espace une attraction dF qui a pour valeur

$$dF = \frac{dz}{R^2} \quad \text{et est dirigée dans le sens MP.}$$

(R désigne la longueur MP).

On demande d'étudier le champ de force produit par le segment de droite AA'. Ce champ étant de révolution autour de Oz, on peut supposer que le point M se trouve dans le plan $y = 0$. Soient $(x_0, 0, z_0)$ les coordonnées de M.

1° Démontrer que les lignes de force sont des hyperboles ayant leurs foyers en A et A′, et que les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution.

On commencera par établir la formule :

$$dF = \frac{d\omega}{x_0}$$

dans laquelle $d\omega$ représente l'angle des deux droites MP et MP′.

On admettra d'ailleurs sans démonstration que les seules courbes dont la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs MA et MA′ sont les ellipses et les hyperboles ayant leurs foyers en A et A′.

2° Démontrer que l'attraction au point M a pour valeur :

$$F = \frac{k}{\sqrt{rr'}}.$$

Dans cette formule r et r' représentent les rayons vecteurs MA et MA′. k est une quantité qui reste constante sur une même surface de niveau.

3° On décompose l'attraction F suivant les deux rayons vecteurs MA et MA′. Démontrer que ces composantes restent constantes lorsque le point M se déplace sur une surface de niveau.

4° Calculer le potentiel en M. Ce potentiel est donné par la formule

$$V = \int \frac{dz}{R}.$$

Faire successivement le calcul en choisissant comme variables d'intégration :

1° $u = z + R$,
2° $u = R$,
3° $u = z$,
4° $u = \omega$,

ω désignant l'angle de Oz avec PM.

On utilisera les résultats obtenus dans les questions I et II. Vérifier l'identité des solutions et exprimer V en fonction de $r + r'$.

Calcul trigonométrique.

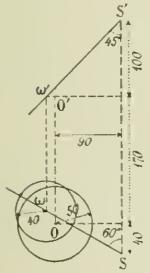
1° Résoudre le triangle ayant pour côtés :

$$a = 92.134^m, \qquad b = 27.019^m, \qquad c = 83.707^m.$$

On donnera les trois angles en grades, minutes et secondes centésimales, et la surface du triangle en hectares. On se servira de tables de logarithmes à cinq décimales.

2° Calculer la fraction $\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{3} + 1}$, à 0,001 près d'erreur absolue.

Epure de géométrie descriptive.



1754. — Sphère et cône de révolution. — La sphère de centre O, O′ a 50mm de rayon. — Le cône a son sommet S, S′ à 90mm à droite, 100mm au-dessus et 40mm en avant de O, O′.

Les projections de l'axe du cône font des angles de 45° et de 60° avec les lignes de rappel. La sphère inscrite dans le cône et dont le centre ω, ω′ est à la même cote que O, O′ a 40mm de rayon.

Représenter le solide formé par l'ensemble du cône indéfini et de la sphère.

QUESTION PROPOSÉE

1755. — On considère la fonction

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

et on demande :

1° De former l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elle satisfait, puis d'intégrer cette équation différentielle ;

2° De former le faisceau des courbes intégrales qui passent au point $x = \pi$, $y = -1$, et de trouver le lieu des points d'inflexion de ces courbes. Montrer que ceux de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$ sont sur une courbe algébrique du sixième degré.

3° Trouver les séries de la forme

$$\frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

qui satisfont à l'équation différentielle et expliquer le résultat obtenu.

E. H.

BIBLIOGRAPHIE

Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, par W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College, Cambridge. Deuxième édition française, traduite d'après la quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. — Paris, A. Hermann. — Deux volumes à 5 fr. chacun.

Je suis convaincu que la lecture de cet ouvrage sera une récréation amusante et instructive pour les lecteurs de la Revue. Aussi je pense leur être agréable et utile en signalant succinctement les questions qu'il renferme et la nature de ces questions.

Le premier volume est plus spécialement consacré à l'arithmétique, l'algèbre et la théorie des nombres. Il se compose de quatre chapitres et d'une note.

Le premier chapitre parle de l'histoire des nombres et renferme toutes sortes d'anecdotes, de remarques curieuses et de souvenirs historiques. Les premiers nombres y sont passés en revue depuis 1 jusqu'à 14 inclusivement, et le chapitre se termine par quelques opérations abrégées. Ce chapitre renferme aussi des théorèmes d'arithmétique proprement dits, tels que celui-ci : *Le nombre 10 est le seul nombre triangulaire qui soit égal à la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs.*

Le deuxième et le troisième chapitre traitent de questions diverses d'arithmétique et d'algèbre : devinettes, jeux de société, paradoxes et problèmes tirés des anciens auteurs. Ils renferment en outre des problèmes variés qui se résolvent par l'algèbre, l'analyse indéterminée et le raisonnement purement arithmétique. Voici deux exemples : *Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube* et *déterminer trois nombres entiers dont le produit surpasse la somme d'une unité.* Le troisième chapitre se termine par quelques questions d'arithmétique supérieure qui y sont envisagées au point de vue historique et au point de vue scientifique.

Le chapitre IV est consacré aux nombres de Mersenne et à l'exposé historique de la question.

La note qui termine le volume est due à M. A. Hermann et roule toute entière sur un problème de comptabilité très intéressant : l'étude des divers moyens qu'un homme qui est obligé de dépenser plus que son revenu pendant quelques années a à sa disposition pour se constituer une rente viagère qu'il se continuera ensuite auprès d'une compagnie avec le capital restant. On ne saurait trop recommander l'étude de cette note qui s'occupe de problèmes pratiques très utiles et dont l'application pourrait être fréquente.

Le second volume n'est pas moins intéressant que le premier. Il renferme six chapitres consacrés à la géométrie, la mécanique et des jeux de toutes sortes. Une foule de paradoxes curieux, de problèmes ingénieux y sont exposés. Le dernier chapitre renferme l'exposé historique des fameux problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle et de la quadrature du cercle ; il se termine par une notice historique très détaillée sur la résolution de l'équation du troisième degré.

Le peu que nous venons de dire suffit à donner une idée de la variété et de l'originalité des questions traitées dans ces deux volumes. Ils se lisent sans fatigue, sans grand effort et sont aussi amusants qu'instructifs. C'est le plus bel éloge que nous en puissions faire.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 4. Janvier 1909.

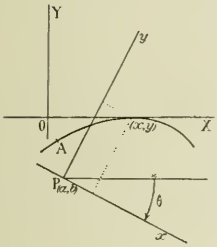
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

QUESTION DE CINÉMATIQUE

par M. **A. Durand**, professeur au lycée Saint-Louis.

Proposons-nous de déterminer la courbe qu'il faut faire rouler, sans glissement, sur une droite, pour qu'un point qui lui est invariablement lié décrive une courbe donnée.



Prenons la droite comme axe des X et un axe perpendiculaire OY. Soit G la courbe inconnue, P le point qui lui est lié ; prenons deux axes rectangulaires Px, Py liés invariablement à G.

Soient x, y les coordonnées, relativement à Px, Py, du point de contact de G avec OX ; soient X et Y ses coordonnées relatives à OX et OY. On a donc $Y = 0$.

Soient a et b les coordonnées de P relativement aux axes fixes. Le lieu de P étant connu, on a une équation entre a et b.

Soit enfin θ l'angle de Px avec OX ($-\theta$ est alors celui de OX avec Px), on a

$$(1) \qquad X = a + x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad 0 = Y = b + x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Soit s l'arc de la courbe G, compté à partir d'un point A pris sur cette courbe et fixe relativement à elle ; on aura, par définition du roulement,

$$X = s + c^{te};$$

on peut supposer cette constante nulle, en prenant pour point A celui qui, par le roulement, vient coïncider avec O. En différentiant par rapport à la variable t, on aura

$$(2) \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{da}{dt} + \cos\theta\frac{dx}{dt} - \sin\theta\frac{dy}{dt} - [x\sin\theta + y\cos\theta]\frac{d\theta}{dt};$$

or l'angle de OX avec Px est $-\theta$, donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{ds}{dt}\sin\theta.$$

En remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par ces valeurs dans la formule précédente, je vois que $\frac{ds}{dt}$ disparait ; il reste

$$0 = \frac{da}{dt} - [x\sin\theta + y\cos\theta]\frac{d\theta}{dt} = \frac{da}{dt} + b\frac{d\theta}{dt},$$

en tenant compte de la seconde formule (1). La variable t est indéterminée, car on peut *se donner* la façon dont la trajectoire de P est décrite ; on peut donc, si l'on veut, supposer $t = a$; le mouvement

de P en projection sur OX est uniforme. On a donc, par une quadrature,

$$\text{(A)} \qquad \theta = -\int_{a_0}^{a} \frac{da}{b},$$

où b désigne une fonction connue de a.

Revenons aux équations (1) :

$$\begin{aligned} X &= s = a + x\cos\theta - y\sin\theta, \\ Y &= 0 = b + x\sin\theta + y\cos\theta; \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{vmatrix}$$

projetons sur Px et Py le contour des coordonnées X et Y.

$$\text{(3)} \qquad (s-a)\cos\theta - b\sin\theta = x, \qquad -(s-a)\sin\theta - b\cos\theta = y;$$

or, en différentiant par rapport à a les deux membres de l'équation $Y = 0$ et en y remplaçant comme on l'a déjà fait $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ respectivement par $\cos\theta\frac{ds}{da}$, $-\sin\theta\frac{ds}{da}$ (puisque $a = t$), et $x\cos\theta - y\sin\theta$ par $X - a$, ou $s - a$, on a successivement

$$0 = \frac{db}{da} + x\cos\theta\frac{d\theta}{da} - y\sin\theta\frac{d\theta}{da} + \frac{dx}{da}\sin\theta + \frac{dy}{da}\cos\theta$$

et

$$\text{(B)} \qquad 0 = \frac{db}{da} + (s-a)\frac{d\theta}{da} = \frac{db}{da} - \frac{s-a}{b}.$$

Le problème est donc résolu par les formules $b = \varphi(a)$ (équation de la courbe donnée),

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\theta}{da} = -\frac{1}{b},$$

$$\text{(B)} \qquad s - a = X - a = \frac{b\,db}{da},$$

$$\text{(C)} \qquad x = -b\sin\theta + b\frac{db}{da}\cos\theta, \qquad y = -b\cos\theta - b\frac{db}{da}\sin\theta.$$

On déduit de ces formules, en ajoutant les carrés,

$$\text{(C')} \qquad x^2 + y^2 = b^2\left[1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2\right]$$

et en divisant membre à membre

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{da}{db} + \operatorname{tg}\theta}{1 - \frac{da}{db}\operatorname{tg}\theta}.$$

Si l'on pose $\frac{da}{db} = \operatorname{tg} V$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\omega$, on a les formules qui permettent d'obtenir la courbe en coordonnées polaires :

$$\rho^2 = \frac{b^2}{\sin^2 V}, \qquad \rho = \frac{b}{\sin V} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(V + \theta).$$

Les formules sont alors :

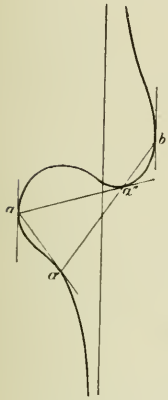
$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tg} V = \frac{da}{db}, && \theta = -\int_{a_0}^{a} \frac{da}{b}, \\ &\rho = \frac{b}{\sin V}, && \omega = V + \theta + k\pi. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que les formules déduites des coordonnées polaires, et dont la démonstration directe est facile, sont aussi celles dont l'emploi est le plus commode.

SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES,

par M. **G. Pélissier**, à Toulouse.

Soit une cubique circulaire ; on sait qu'elle admet quatre pôles d'anallagmatie qui sont les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle. Soit a un de ces points : par a on peut mener quatre tangentes à la cubique ; soient aa' aa'' deux de ces tangentes ; je dis d'abord que le point b où la droite $a'a''$, rencontre la courbe est un de ses pôles d'anallagmatie. En effet les points a', a'', b étant en ligne droite, leurs tangentiels sont en ligne droite : les tangentiels de a', a'' sont confondus en a, le tangentiel de b est donc le point d'intersection de la cubique et de la tangente en a, c'est-à-dire son point à l'infini : la tangente en b est donc parallèle à l'asymptote réelle (*fig.* 1).



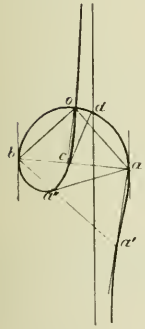
Si donc on considère les quatre tangentes menées à une cubique par un de ses pôles d'anallagmatie a, les six droites joignant les points de contact se coupent deux à deux aux trois autres pôles ; d'autre part ces points de contact sont sur un cercle de centre a et ayant pour rayon la racine carrée de la puissance d'anallagmatie ; on a donc la propriété suivante : trois pôles d'anallagmatie d'une cubique circulaire sont les sommets d'un triangle conjugué à un cercle ayant pour centre le quatrième, autrement dit, chaque pôle est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

Si la cubique a un point double en o (*fig.* 2), il n'y a plus que deux pôles d'anallagmatie a et b et deux tangentes aa', aa'' menées de a à la courbe, la droite $a'a''$ passe toujours par le point b. Comme

$$\overline{bo}^2 = ba'.ba'',$$

la droite ob est tangente au cercle $oa'a''$ qui a d'ailleurs pour centre le point a, et les droites oa, ob sont rectangulaires. Soit c le point de rencontre de ab et de la cubique, la relation

$$\overline{ao}^2 = ab.ac$$



montre que c est la projection de o sur ab. De plus les trois points a, b, c étant en ligne droite, leurs tangentiels sont en ligne droite. La droite joignant les tangentiels de a et b étant l'asymptote réelle de la cubique, le tangentiel d de c est sur cette asymptote. Ainsi, le point double d'une cubique circulaire et les deux pôles d'anallagmatie sont les sommets d'un triangle rectangle ; le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est sur la courbe et la tangente en ce point passe par le point d'intersection de la courbe et de son asymptote.

Si la cubique est une strophoïde, on peut, d'après cela, construire immédiatement les tangentes aa', aa'' : on sait en effet que dans ce cas les droites ob, $a'a''$ sont rectangulaires. Les points a', a'' s'obtiennent donc en coupant le cercle de centre a et de rayon ao par la parallèle à oa issue de b. La construction montre que pour un des pôles les tangentes sont réelles et que pour l'autre elles sont imaginaires.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1679. — *Trouver l'enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une ellipse qui passent par un point fixe du grand axe. Cette enveloppe est une quartique bicirculaire. Déterminer le point fixe de façon que cette courbe se décompose en deux cercles.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse et α l'abscisse du point par lequel on mène la sécante.

L'équation de cette sécante est

$$x + my - \alpha = 0,$$

et celle du cercle cherché

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + (ux + vy + w)(x + my - \alpha) = 0.$$

Ecrivons d'abord que c'est un cercle, puis que le centre du cercle est sur la droite $x + my - \alpha = 0$.

Nous aurons $\qquad u + b^2 = vm + a^2, \qquad v + mu = 0\,;$

par suite, $\qquad u(1 + m^2) = a^2 - b^2,$

$$u = \frac{c^2}{1 + m^2}, \qquad \text{puis} \qquad v = \frac{-c^2m}{1 + m^2}.$$

Le cercle a donc pour équation

$$(1 + m^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (x + my - \alpha)(c^2x - c^2my + w) = 0,$$

w étant une autre constante. Cette équation devient

$$(a^2 + b^2m^2)(x^2 + y^2) + x(w - c^2\alpha) + y(wm + c^2\alpha m) - a^2b^2(1 + m^2) - w\alpha = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$-\frac{w - c^2\alpha}{2(a^2 + b^2m^2)}, \qquad -\frac{m(w + c^2\alpha)}{2(a^2 + b^2m^2)},$$

et en écrivant que ce point est sur la droite $x + my - \alpha$, nous avons

$$w - c^2\alpha + m^2(w + c^2\alpha) + 2\alpha(a^2 + b^2m^2) = 0$$

ou enfin

$$w(1 + m^2) + \alpha(1 + m^2)(a^2 + b^2) = 0.$$

La valeur finale de w est donc une constante $\qquad w = -\alpha(a^2 + b^2),$

et la seconde corde commune au cercle et à l'ellipse est la droite

$$c^2(x - my) - \alpha(a^2 + b^2) = 0\,;$$

elle passe par un point fixe de Ox.

Dès lors, le cercle a pour équation

$$(a^2 + b^2m^2)(x^2 + y^2) - 2\alpha a^2x - 2\alpha b^2my - a^2b^2(1 + m^2) + \alpha^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Le lieu de son centre est une conique, la conique qui a pour équations paramétriques

$$x = \frac{\alpha a^2}{a^2 + b^2m^2}, \qquad y = \frac{\alpha b^2m}{a^2 + b^2m^2}.$$

L'enveloppe s'obtient en écrivant que l'équation en m a une racine double. Ceci donne

$$[a^2(x^2 + y^2) - 2\alpha a^2x - a^2b^2 + \alpha^2(a^2 + b^2)][b^2(x^2 + y^2) - a^2b^2] - \alpha^2b^4y^2 = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2 - a^2)\left(x^2 + y^2 - 2\alpha x - b^2 + \alpha^2\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) - \frac{\alpha^2b^2y^2}{a^2} = 0.$$

C'est une quartique bicirculaire qui se décompose visiblement en deux cercles, quand α est nul.

Il est facile d'avoir les points α pour lesquels elle se décompose ; en effet posons

$$\rho = x^2 + y^2 - a^2,$$

l'équation deviendra

$$\rho\left(\rho - 2\alpha x + c^2 + \alpha^2\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) - \frac{\alpha^2b^2}{a^2}(\rho + a^2 - x^2) = 0.$$

ou

$$\rho^2 + \rho(\alpha^2 + c^2 - 2\alpha x) + \frac{\alpha^2 b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = 0.$$

Il y aura décomposition si les racines de cette équation en ρ sont rationnelles en x, c'est-à-dire si la quantité sous le radical est un carré parfait, or cette quantité est

$$(\alpha^2 + c^2 - 2\alpha x)^2 - \frac{4\alpha^2 b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

ou

$$\frac{4\alpha^2 c^2 x^2}{a^2} - 4\alpha x(\alpha^2 + c^2) + (\alpha^2 + c^2)^2 + 4\alpha^2 b^2 = 0\,;$$

c'est un carré si

$$\alpha^2(\alpha^2 + c^2)^2 - \frac{\alpha^2 c^2}{a^2}[(\alpha^2 + c^2)^2 + 4\alpha^2 b^2] = 0.$$

Cette relation donne d'abord $\alpha = 0$, qui correspond au cas de décomposition évident et

$$b^2(\alpha^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2\alpha^2 = 0,$$

qui se réduit à

$$(\alpha^2 - c^2)^2 = 0.$$

La décomposition a donc lieu aux deux foyers et à l'origine. Pour $\alpha = 0$, on a les deux cercles

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Pour $\alpha = c$, le trinome en x sous le radical devient

$$4\left[\frac{c^4x^2}{a^2} - 2c^3x + c^4 + b^2c^2\right] \qquad \text{ou} \qquad 4c^2\left(\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2\right) = 4c^2\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2;$$

les deux cercles ont donc pour équations

$$\rho = cx - c^2 \pm 2c\left(\frac{cx}{a} - a\right).$$

Il n'y a plus qu'à y remplacer ρ par $x^2 + y^2 - a^2$.

On peut aussi traiter la question en prenant le point α pour origine, c'est-à-dire en partant de l'équation

$$\frac{(x + \alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

prise pour équation de l'ellipse.

On peut aussi effectuer la décomposition en identifiant au produit des premiers membres des équations de deux cercles et s'appuyant sur la symétrie. Celle-ci oblige les deux cercles à avoir leurs centres sur Ox ou à être symétriques par rapport à Ox.

Bonnes solutions : MM. Bros ; G. Dinay, à Poitiers ; J.-D. Dufaut, à Poitiers.

Remarques géométriques. — Le lieu du centre du cercle est le lieu des milieux des cordes qui passent au point P. C'est donc le lieu de l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques formés l'un, par la sécante variable qui tourne autour du point P, l'autre, par le diamètre conjugué de cette sécante. C'est une ellipse homothétique à l'ellipse donnée et qui passe aux points O et P, qui sont d'ailleurs ses sommets.

Il est facile de voir par le calcul que le cercle variable est orthogonal à un cercle fixe et de déterminer ce cercle.

On peut le voir aussi en démontrant que les cercles du faisceau tracent une involution sur Ox et en déterminant les deux points doubles de cette involution, D et D′ ; le cercle fixe, orthogonal aux cercles du faisceau est alors le cercle décrit sur DD′ comme diamètre.

Le reste s'en suit.

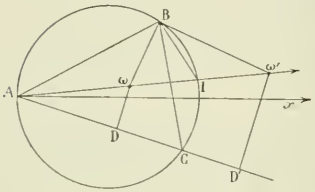
Le calcul nous a donné d'ailleurs tous les éléments de cette involution, puisque nous avons vu que la deuxième sécante commune au cercle et à l'ellipse passe aussi par un point fixe P. D'après le théorème de

Desargues, le couple MM′ des points de rencontre du cercle avec Ox est en involution avec les deux couples fixes P, P′ et A, A′, sommets de l'ellipse.

1680. — *Un triangle* ABC *est inscrit dans un cercle fixe, le sommet* A *et l'angle* A *restent fixes, les côtés de cet angle tournant autour du sommet. Trouver les lieux des centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle* BAC.

Prenons pour axe polaire le diamètre du cercle qui passe au point A et pour pôle le point A.

Soient 2α l'angle BAC et ω l'angle de la bissectrice AI avec Ax. Soient, en outre ω et ω' les centres des deux cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A et ωD, ω'D′, les rayons de ces cercles qui sont perpendiculaires à AC.



Nous avons $AD = p - a$ et $AD' = p$, en appelant $2p$ le périmètre du triangle ABC ; or

$$AC = 2R\cos(\omega - \alpha), \qquad AB = 2R\cos(\omega + \alpha),$$

et

$$BC = 2R\sin 2\alpha ;$$

donc

$$p = R[\cos(\omega - \alpha) + \cos(\omega + \alpha) + \sin 2\alpha]$$
$$= 2R\cos\alpha(\cos\omega + \sin\alpha).$$

D'autre part, en appelant ρ le rayon vecteur $A\omega$, nous avons

$$\rho = \frac{p - a}{\cos\alpha}, \qquad \rho = 2R(\cos\omega - \sin\alpha).$$

Tel est le lieu du point ω ; c'est un limaçon de Pascal.

Pour le point ω', nous avons

$$\rho = \frac{p}{\cos\alpha}, \qquad \rho = 2R(\cos\omega + \sin\alpha).$$

C'est le même limaçon.

Géométriquement, ces résultats sont évidents, car il est facile de voir que le triangle $B\omega\omega'$ est rectangle en B et a pour médiane BI. Le premier point est évident ; le second résulte de ce que les angles ωBI et BωI sont égaux ; on voit aisément que leurs mesures sont les mêmes.

On obtient donc le lieu des points ω et ω' en portant sur AI, à partir du point I et de part et d'autre, deux longueurs Iω et Iω' égales entre elles et égales à IB : or

$$IB = 2R\sin\alpha,$$

IB est constant et l'on voit bien que le lieu des points ω et ω' est un même limaçon de Pascal, ayant le point A pour point double.

G. D. et J. D., à Poitiers.

Bonnes solutions : MM. G. Foucay, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; M. Constandaki ; J. D. Dufaut, à Poitiers ; R. Bouvaist ; Bros ; L. Simon, à Châlons ; Guillerme ; L. Montaut ; G. Lach, à Denain ; Groscolas ; Rebouillat.

MÉCANIQUE

1682. — *A chaque position* M *d'un point dont le mouvement est rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires* ox, oy, oz, *on fait correspondre l'extrémité* G *du moment, pris par rapport au point* o, *du vecteur vitesse du point* M.

1° *Le point* G *est animé, sur* oz, *d'un mouvement vibratoire simple déterminé. Le point* M *décrit une droite donnée du plan des* xy. *Déterminer et discuter le mouvement du point* M *sur cette droite.*

2° *Le point* G *a sur* oz *un mouvement uniforme de vitesse* v. *Sa cote est* $Z = vt$. *Le point* M *a un mouvement uniforme de vitesse* v_1 *dans le plan des* xy. *Trouver sa trajectoire.*

3° *Le point* G *a pour mouvement*

$$X = A(t), \quad Y = B(t), \quad Z = C(t).$$

Trouver les équations du mouvement du point M. *Interpréter les cas d'exception trouvés.*

4° *A chaque point* G *on fait correspondre un point* μ *obtenu en partant de* G *comme* G *a été obtenu en partant de* M. *Connaissant les équations du mouvement du point* M, *trouver celles du point* μ.

1°. Quand le point G reste sur oz, le point M décrit une courbe du plan des xy. Supposons que cette courbe soit la droite $y = p$.

La cote du point G étant $Z = a_1 \cos \omega t + b_1$, on peut écrire, en appelant v la vitesse du point M,

$$pv = a_1 \cos \omega t + b_1.$$

Or

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Par suite,

$$x = \frac{a_1}{p\omega} \sin \omega t + \frac{b_1}{p} t + C$$

ou bien, en changeant de notation,

$$(1) \qquad x = a \sin \omega t + bt + x_0.$$

C'est un mouvement rectiligne dont le diagramme est facile à tracer, car ce mouvement rectiligne résulte de la composition d'un mouvement vibratoire et d'un mouvement uniforme.

Ce mouvement se réduit à un mouvement vibratoire si b et par suite b_1 sont nuls ; c'est dire que le centre de la vibration du point G sur oz est le point o.

La discussion du mouvement du point M d'après les constantes peut se faire sur la formule (1). Des remarques directes peuvent la faciliter en partant du mouvement de G : Lorsque le point G traverse sur oz le plan des xy, le point M a un mouvement qui change de sens sur la droite $y = p$. Lorsque le mouvement de G change de sens sur oz, la vitesse du point M passe par un maximum ou par un minimum.

2°. La cote du point G est $Z = vt$. Nous voulons trouver la trajectoire du point M sachant qu'elle est décrite d'un mouvement uniforme de vitesse v_1. Appelons p, à l'instant t, la distance de l'origine à la tangente à la trajectoire du point M.

On a

$$pv_1 = vt, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{v}{v_1};$$

mais

$$\frac{ds}{dt} = v_1.$$

On obtient donc, par division,

$$\frac{dp}{ds} = \frac{v}{v_1^2}.$$

C'est une équation différentielle qui ne contient plus que les éléments géométriques de la trajectoire.

Considérons cette trajectoire comme enveloppe de la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

et cherchons à déterminer p comme fonction de α. Le point de contact s'obtiendra en adjoignant à

l'équation précédente,

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - p'_2 = 0.$$

D'où on tire

$$x = p\cos\alpha - p'_2\sin\alpha, \qquad y = p\sin\alpha + p'_2\cos\alpha,$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = -(p + p''_{2^2})\sin\alpha, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = (p + p''_{2^2})\cos\alpha.$$

Par suite

$$\frac{ds}{d\alpha} = p + p''_{2^2},$$

et, en remplaçant ds par sa valeur dans l'équation différentielle $\frac{dp}{ds} = \frac{v}{v_1^2}$, on obtient

$$\frac{v_1^2}{v}p'_2 = p + p''_{2^2}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre, dont on sait écrire l'intégrale générale. Le problème est donc résolu.

3°. On donne le mouvement du point G, $X = A(t)$, $Y = B(t)$, $Z = C(t)$. Soient x, y, z les fonctions de t qui donnent les coordonnées du point M. On a

$$yz' - zy' = A(t), \qquad zx' - xz' = B(t), \qquad xy' - yx' = C(t).$$

De ces égalités, on tire

$$Ax + By + Cz = 0, \qquad Ax' + By' + Cz' = 0.$$

Différentions la première ; nous aurons

$$Ax' + By' + Cz' + A'x + B'y + C'z = 0.$$

On peut donc écrire

$$(2) \qquad Ax + By + Cz = 0, \qquad A'x + B'y + C'z = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{BC' - CB'} = \frac{y}{CA' - AC'} = \frac{z}{AB' - BA'} = \lambda.$$

Il reste à calculer λ en fonction de t. Pour cela, écrivons

$$y = \lambda(CA' - AC'), \qquad y' = \lambda'(CA' - AC') + \lambda(CA'' - AC''),$$

$$z = \lambda(AB' - BA'), \qquad z' = \lambda'(AB' - BA') + \lambda(AB'' - BA'').$$

Exprimons maintenant que $yz' - zy' = A$; nous aurons

$$(3) \qquad \lambda^2[(CA' - AC')(AB'' - BA'') - (AB' - BA')(CA'' - AC'')] = A.$$

Mais, il résulte d'identités connues sur les déterminants ou d'un calcul direct immédiat que le coefficient de λ^2 dans le premier membre est

$$A\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = A\Delta.$$

On a donc $\lambda^2 = \frac{1}{\Delta}$ en supposant $A \neq 0$.

Le mouvement du point M est déterminé. Il y en a deux possibles.

Reprenons ce calcul pour trouver les cas d'exception. Nous n'avons pu, des équations (2), tirer des quantités proportionnelles à x, y, z qu'en supposant les trois binomes $BC' - CB'$, $CA' - AC'$, $AB' - BA'$ non tous trois nuls.

Leur annulation identique signifierait que

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C},$$

c'est-à-dire que la tangente au lieu du point G passerait constamment par le point o. Ce lieu serait donc une droite passant par o. Examinons ce cas. Supposons que le point G décrive oz d'un mouvement $Z = C(t)$. Le mouvement du point M n'est plus déterminé. On peut en dire seulement qu'il se fait : 1° dans le plan des xy ; 2° de telle manière qu'on ait $xy' - yx' = C(t)$.

On peut choisir arbitrairement, par exemple, la projection du mouvement du point M sur l'un des axes ox et oy.

Particularisons; supposons que le point G reste fixe, sur oz par exemple. On peut dire que le mouvement de M se fait dans le plan des xy suivant la loi des aires.

Plus loin, pour déterminer λ, nous avons supposé

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dire que ce déterminant est identiquement nul, c'est dire que le plan osculateur de la courbe lieu du point G passe constamment par l'origine ou encore que cette courbe est plane, son plan passant par o. Si oG décrit un plan, le plan passe par o et une tangente à la courbe lieu de M passe par une droite fixe. Donc le mouvement de M se fait dans un plan passant par o et il est alors nécessaire que G se meuve sur une droite passant par o, cas qui a été examiné.

Enfin, supposer que $\Delta = 0$, c'est supposer que le point G décrit une courbe plane dans un plan passant par o, nous venons d'analyser ce cas.

4°. Partons du point $M(x, y, z)$. Nous obtenons le point $G(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$, puis le point $\mu(x_1, y_1, z_1)$ donné par

$$x_1 = (zx' - xz')(xy'' - yx'') - (xy' - yx')(zx'' - xz''),$$

ce qui s'écrit encore

$$x_1 = x \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Il y a là des résultats à obtenir directement. D'abord, si le déterminant $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$ est identiquement nul, le point μ est toujours en o; c'est évident, car l'annulation de ce déterminant exprime que le mouvement de M se fait dans un plan passant par o. Donc le mouvement de G se fait sur une droite passant par o.

Ensuite, le point μ est sur oM. Ceci résulte de ce que oG, étant perpendiculaire au plan tangent en M au cône décrit par oM, décrit le cône supplémentaire du cône décrit par oM. Donc $o\mu$ est perpendiculaire à oG et décrit le cône supplémentaire du cône lieu de oG, c'est-à-dire que $o\mu$ est confondue avec oM. C'est une conséquence immédiate de la réciprocité de la définition de deux cônes supplémentaires.

Bonne solution de M. Bros.

CONCOURS DE 1908 (*Suite.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

(Places d'élèves-ingénieurs réservées aux conducteurs.)

Algèbre et analyse.

1756. — 1° Former l'équation générale du troisième degré dont l'équation dérivée admette pour racines 0 et 1.

2° L'équation demandée peut se mettre sous la forme

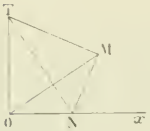
(1) $$2x^3 - 3x^2 + a = 0,$$

a désignant une constante arbitraire. Indiquer, au moyen du théorème de Rolle, comment varie avec a le nombre des racines réelles de l'équation (1).

3° Quelles sont les racines de l'équation (1) lorsque a prend les valeurs au passage desquelles le nombre des racines réelles de cette équation se modifie ?

4° Si l'on fait $a = 0,7$, on reconnaît que l'équation (1) a une racine comprise entre 0,6 et 0,7. Calculer cette racine à 0,001 près par la méthode de Newton appliquée une seule fois en partant de ces deux nombres 0,6 et 0,7.

1757. — Calculer l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $y = \cos^2 x$.



1758. — Trouver par l'analyse la courbe plane telle que si l'on considère le quadrilatère MTON ayant pour côtés la tangente MT, la normale MN, l'axe polaire ONx et la perpendiculaire OT à cet axe, les diagonales de ce quadrilatère soient perpendiculaires l'une sur l'autre.

(*Durée : 4 heures.*)

Géométrie et mécanique.

I. — Un câble métallique de longueur $l = 600$ mètres, et de poids spécifique $p = 7,7$ est fixé par ses deux bouts en des points dont la distance horizontale $a = 400$ mètres et la distance verticale $b = 300$ mètres.

Déterminer : 1° le maximum R de l'effort d'extension que subit ce câble par millimètre carré de section ; 2° le degré d'approximation qu'on peut obtenir pour R, en supposant que le dernier chiffre de chacune des données ci-dessus est déterminé à une demi-unité près.

II. — Une caisse fermée de forme cubique et de matière homogène, suspendue à l'une de ses arêtes de longueur $a = 2^{\text{m}},60$ placée horizontalement, exécute de petites oscillations dont la durée (aller ou retour) est $T = 2$ secondes.

Déterminer : 1° l'épaisseur uniforme e de la boîte ; 2° avec quelle approximation doit être supposée faite la mesure de la valeur ci-dessus de T pour que e puisse être connu à un demi-centimètre près.

(*Durée : 4 heures.*)

Géométrie descriptive.

1759. — Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (qui ne seront pas passés à l'encre), les points p,p' et S,S' sont définis par le croquis ci-joint.

On considère le conoïde droit à plan directeur horizontal ayant : 1° pour directrice rectiligne la verticale du point S,S' ; 2° pour noyau la sphère (S) de centre p,p' ayant un rayon de 6 centimètres.

Ce conoïde étant limité d'une part à cette directrice rectiligne, de l'autre à ce noyau sphérique (supposé enlevé), on en retire toute la partie intérieure au cône de sommet S,S' circonscrit à la sphère (S).

On demande de représenter la partie restante de ce conoïde.

Les lignes de contour seront dessinées en noir (trait plein pour les parties vues, ponctué pour les parties cachées), les lignes de construction en rouge.

On indiquera la construction d'un point courant et de la tangente en ce point pour la ligne d'intersection du cône et du conoïde.

(*Durée : 3 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1760. — Soit l'équation

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \cdots + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(x+\theta h).$$

Démontrer que la valeur limite de θ pour $h = 0$ est racine de l'équation $(1-\theta)^{n-p} = \frac{p}{n}$. Examiner le cas où $p = n$.

W. Mérigot, à Paris.

1761. — On considère une strophoïde quelconque S.

1° Démontrer que les cercles bitangents à cette courbe se partagent en deux familles et que les cordes des contacts passent par deux points fixes.

2° Les points de contact de deux cercles d'une même famille sont sur un même cercle ;

3° A tout cercle de l'une des familles correspond un cercle et un seul de l'autre qui lui est tangent en un point de S.

4° Montrer que les tangentes aux deux autres points de contact se coupent sur S et que la droite qui les unit enveloppe une parabole.

5° La droite qui joint le point double de S au troisième point de rencontre de S avec la corde des contacts est perpendiculaire à cette droite.

G. Pélissier.

1762. — Un ellipsoïde en verre, de révolution autour de son axe, a pour indice $n = \frac{3}{2}$, pour grand axe $2a$ et pour excentricité $\frac{e}{a} = \frac{2}{3}$. On le coupe par une sphère ayant son centre à l'un des foyers et dont le rayon égale $\frac{10}{9}a$. On forme une lentille-ménisque. Déterminer les points nodaux et les foyers principaux de cette lentille ; comparer les distances calculées à l'épaisseur e de la lentille. Quel serait le diamètre de l'image d'un astre dont le diamètre apparent serait $\frac{1}{100}$ de radian ?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1677. — *On considère un cercle de centre* O, *de rayon* R *et un diamètre fixe* AB *de ce cercle ; par* A *on mène une corde variable* AM.

1° *Trouver l'enveloppe du cercle décrit sur* AM *comme diamètre.*

2° *Sur* AB *on prend* BN = BM ; *trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* MAN.

3° *Lieu du point de rencontre de* MN *avec le rayon perpendiculaire à* AM.

4° *Lieu du milieu de* MN. *Construire ce lieu et trouver la surface qu'il entoure.*

1. Prenons comme axe des x le diamètre AB et la tangente au cercle au point A ; l'équation du cercle est alors $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, et si nous désignons par φ l'angle de AB avec la corde variable AM, celle-ci a pour équation $y = x \operatorname{tg} \varphi$, et les coordonnées du point M sont

$$x = 2R\cos^2\varphi, \qquad y = 2R\sin\varphi\cos\varphi.$$

L'équation du cercle décrit sur AM comme diamètre est donc

$$x(x - 2R\cos^2\varphi) + y(y - 2R\sin\varphi\cos\varphi) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2Rx\cos^2\varphi - 2Ry\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - Rx - Rx\cos 2\varphi - Ry\sin 2\varphi = 0.$$

On en déduit immédiatement que l'enveloppe de ce cercle a pour équation

$$(x^2 + y^2 - Rx)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ou, en passant aux coordonnées polaires,

$$\rho = R(1 + \cos\omega).$$

Cette équation représente une cardioïde ayant le point A pour point de rebroussement et le point B pour sommet.

2. On a $BM = 2R\sin\varphi$; par suite, les deux points N situés sur AB et tels que l'on ait BN = BM ont pour abscisses $2R \pm 2R\sin\varphi$, ou $2R(1 - \varepsilon\sin\varphi)$ en posant $\varepsilon = \pm 1$.

Un cercle quelconque passant par les points A et M a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2Rx + \lambda(x\sin\varphi - y\cos\varphi) = 0.$$

Ce cercle rencontre Ox à l'origine, puis en un autre point dont l'abscisse est $x = 2R - \lambda \sin\varphi$; écrivons que cette abscisse est égale à celle du point N, $2R(1 - \varepsilon \sin\varphi)$, nous obtenons $\lambda = 2R\varepsilon$. Par suite, l'équation du cercle circonscrit au triangle AMN est

$$x^2 + y^2 - 2Rx + 2R\varepsilon(x \sin\varphi - y \cos\varphi) = 0;$$

et sous cette forme, on reconnaît que l'enveloppe de ce cercle a pour équation

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho = 2R(1 + \cos\omega).$$

Cette équation représente encore une cardioïde qui a pour point de rebroussement le point A, et pour sommet le symétrique de A par rapport à B. Cette cardioïde est homothétique de la précédente, le centre d'homothétie étant le point A et le rapport d'homothétie étant égal à 2.

3. L'équation de MN est

$$\frac{y}{x - 2R(1 - \varepsilon \sin\varphi)} = \frac{2R \sin\varphi \cos\varphi}{2R \cos^2\varphi - 2R(1 - \varepsilon \sin\varphi)},$$

ou, en remplaçant dans le second membre $\cos^2\varphi$ par $1 - \sin^2\varphi$, et en divisant haut et bas par $2R \sin\varphi$,

$$\frac{y}{x - 2R(1 - \varepsilon \sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi}{\varepsilon - \sin\varphi}$$

ou

(1) $$(x - 2R)\cos\varphi + y \sin\varphi + \varepsilon(2R \sin\varphi \cos\varphi - y) = 0.$$

D'autre part l'équation du rayon perpendiculaire à AM est

(2) $$\frac{y}{x - R} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Nous aurons donc l'équation du lieu en éliminant φ entre ces deux équations.

Transportons d'abord l'origine au point O ; ces équations deviennent

(3) $$(x - R)\cos\varphi + y \sin\varphi + \varepsilon(2R \sin\varphi \cos\varphi - y) = 0, \qquad \frac{y}{x} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

et la seconde nous montre que $\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega + k\pi$, ω désignant l'angle polaire du point du lieu. Nous aurons donc l'équation polaire du lieu en remplaçant dans la première équation (3), x par $\rho\cos\omega$, y par $\rho\sin\omega$ et φ par $\frac{\pi}{2} + \omega + k\pi$. On obtient ainsi $\rho = -2R\cos\omega \pm R$, et en prenant successivement les deux signes, on a deux équations qui représentent la même courbe.

Le lieu est défini par l'équation

$$\rho = R(1 - 2\cos\omega)$$

qui représente un limaçon de Pascal, aisé à construire.

4. Les coordonnées du milieu de MN sont

$$x = R\cos^2\varphi + R(1 - \varepsilon \sin\varphi), \qquad y = R \sin\varphi \cos\varphi,$$

ou, en transportant l'origine des coordonnées au point B($x = 2R$, $y = 0$),

(4) $$x = -R \sin\varphi(\varepsilon + \sin\varphi), \qquad y = R \sin\varphi \cos\varphi.$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant φ entre ces deux équations.

Prenons d'abord $\varepsilon = +1$, et divisons membre à membre ; nous avons

$$\frac{y}{x} = -\frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} = \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

et par suite $\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} = \omega + k\pi$, ou $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\omega + 2k\pi$, ω désignant l'angle polaire du point (x, y).

Remplaçons alors φ par cette valeur et y par $\rho \sin \omega$ dans la deuxième relation (4), nous obtenons l'équation polaire du lieu

$$\rho = -2R \cos \omega \cos 2\omega.$$

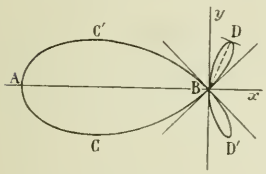
On serait conduit à la même équation en prenant $\varepsilon = -1$.

Pour construire la courbe correspondante, il faut faire varier ω dans un intervalle dont l'étendue soit égale à π, car en changeant ω en $\pi + \omega$, ρ change de signe, et aux deux valeurs ω et $\pi + \omega$ correspond le même point de la courbe. D'autre part, si l'on change ω en $-\omega$, ρ ne change pas ; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe polaire. Il suffira de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et d'achever par symétrie.

En prenant la dérivée de ρ par rapport à ω, on trouve

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 2R \sin \omega (5 \cos^2 \omega - \sin^2 \omega) ;$$

cette dérivée s'annule dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour $\operatorname{tg} \omega = \sqrt{5}$; soit α l'angle correspondant. On a le tableau de variation suivant :



ω	0	croît	$\frac{\pi}{4}$	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$-2R$	croît	0	croît	*max.*	décroît	0

d'où l'on déduit la forme de la courbe.

L'aire comprise entre AB et l'arc ACB est égale à l'intégrale $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\omega$, et l'aire de la boucle BDB est égale à $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\omega$.

Calculons l'intégrale indéfinie

$$I = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = 2R^2 \int \cos^2 \omega \cos^2 2\omega \, d\omega.$$

Or, on a

$$\cos \omega \cos 2\omega = \frac{1}{2}(\cos 3\omega + \cos \omega)$$

et
$$\cos^2 \omega \cos^2 2\omega = \frac{1}{4}\left[\cos^2 3\omega + \cos^2 \omega + 2 \cos \omega \cos 3\omega\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cos 6\omega + 1}{2} + \frac{\cos 2\omega + 1}{2} + \cos 4\omega + \cos 2\omega\right]$$

ou
$$\cos^2 \omega \cos^2 2\omega = \frac{1}{4}\left[\frac{\cos 6\omega}{2} + \cos 4\omega + \frac{3 \cos 2\omega}{2} + 1\right].$$

On en déduit

$$I = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin 6\omega}{12} + \frac{\sin 4\omega}{4} + \frac{3 \sin 2\omega}{4} + \omega\right],$$

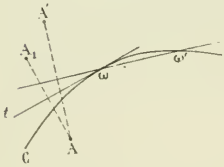
et
$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\omega = \frac{R^2}{24}(3\pi + 8), \qquad \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\omega = \frac{R^2}{24}(3\pi - 8).$$

Par suite l'aire de la boucle ACBC'A est $\frac{R^2}{12}(3\pi + 8)$ et celle de chacune des boucles BDB et BD'B est $\frac{R^2}{24}(3\pi - 8)$.

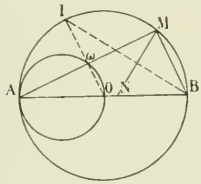
L'aire totale limitée par la courbe est donc $\frac{\pi R^2}{2}$.

E.-N. BARISIEN.

Remarques géométriques. — Considérons un cercle variable passant par un point fixe A et dont le centre ω décrit une courbe C, et proposons-nous de déterminer l'enveloppe de ce cercle. Soient ω et ω' deux positions voisines du centre sur la courbe; les deux cercles correspondants se rencontrent d'abord au point A, puis en un second point A' symétrique de A par rapport à $\omega\omega'$. Quand le point ω' se rapproche indéfiniment du point ω, $\omega\omega'$ a pour limite la tangente ωt à la courbe C au point ω, et A' a pour limite le point A_1 symétrique de A par rapport à cette tangente. Or, le point A_1 est le point où le cercle ω touche son enveloppe. On en conclut que l'enveloppe des cercles considérés est homothétique de la podaire du point A par rapport a la courbe C, A étant le centre d'homothétie et 2 le rapport d'homothétie.



1. Cela posé, le cercle décrit sur AM comme diamètre a pour centre le point ω, milieu de AM, et ce centre décrit le cercle C, de diamètre AO. Donc l'enveloppe du cercle décrit sur AM comme diamètre est homothétique de la podaire de A par rapport au cercle C; cette enveloppe est donc la podaire de A par rapport au cercle O. C'est une cardioïde qui a le point A pour point de rebroussement et le point B pour sommet.



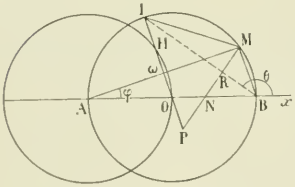
2. Le centre du cercle circonscrit au triangle AMN est le point commun à $O\omega$ et à la perpendiculaire menée à MN en son milieu. Cette perpendiculaire passe par le point B et est bissectrice de l'angle MBN puisque BM = BN. Donc elle rencontre le cercle O au point I milieu de l'arc AM. Par suite, le centre du cercle circonscrit au triangle AMN est le point I. On en conclut que l'enveloppe de ce cercle est homothétique de la podaire du point A par rapport au cercle O; c'est une cardioïde qui a le point A pour point de rebroussement et le point symétrique de A par rapport à B pour sommet.

3. Soit P le point de rencontre de MN et de $O\omega$; il est aisé de voir que P et I sont symétriques par rapport à AM, car on a

$$\widehat{IM\omega} = \widehat{MBI} \text{ (même mesure)}$$

et

$$\widehat{\omega MP} = \widehat{MBI}. \text{ (côtés perpendiculaires)}$$



Construisons le cercle (γ), qui a pour centre le point A et pour rayon AO = R, et soit H le point où ce cercle rencontre PI. Nous avons HP = OI = R, par suite le lieu du point P est un limaçon de Pascal, conchoïde du cercle (γ par rapport au point O.

4. Soit R le milieu de MN; cherchons l'équation du lieu du point R en coordonnées polaires. Posons BR = r, $\widehat{RBx} = \theta$. Nous avons

$$r = BR = -BN\cos\theta = -BM\cos\theta.$$

Mais $BM = 2R\sin\varphi$, et $\varphi + 2(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2}$; donc $\varphi = 2\theta - \frac{3\pi}{2}$, et $\sin\varphi = \cos 2\theta$.

L'équation du lieu est donc $r = -2R\cos\theta\cos 2\theta$.

H. JANOIS, à Nantes.

Bonnes solutions par MM. G. Fouchy et M. Constandaki.

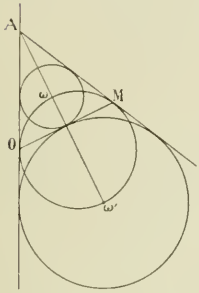
1684. — *Sur un cercle, on considère un point fixe* O *et un point variable* M. *La tangente en* M *rencontre la tangente en* O *au point* A.

1° *Lieu du centre du cercle inscrit au triangle* OAM.

2° *Construire l'enveloppe de ces cercles.*

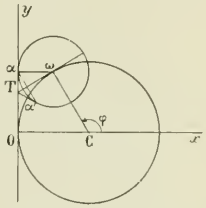
3° *Arc, rayon de courbure de cette courbe. Montrer que la développée est une épicycloïde à deux rebroussements.*

1° Les bissectrices de l'angle AOM sont les deux droites $O\omega$, $O\omega'$.



ω est le centre du cercle inscrit au triangle AOM, ω' est le centre du cercle exinscrit dans l'angle A ; le lieu de ω et ω' est donc le cercle donné.

2° Cherchons l'enveloppe des cercles ω et ω'.



Sur ω les points caractéristiques sont le point α et son symétrique α' par rapport à la tangente ωT.

$\alpha' T$ est la tangente à l'enveloppe, cette courbe est ainsi définie par points et par tangentes.

Prenons OC pour axe des x et OA pour axe des y.

Soit φ l'angle de $C\omega$ avec Ox. Les coordonnées de ω sont $x = R(1 + \cos\varphi)$, $y = R\sin\varphi$; l'équation du cercle est donc

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2R(1 + \cos\varphi)x - 2R\sin\varphi\, y + R^2\sin^2\varphi = 0.$$

Dérivons par rapport à φ :

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + R\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

c'est l'équation de la droite $\alpha\alpha'$,

d'où

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi + R\sin\varphi.$$

Portons dans (1), il vient

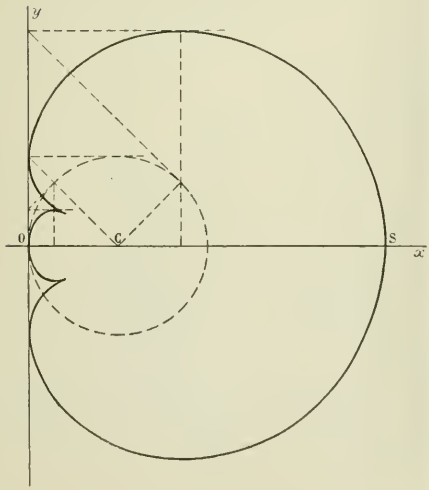
$$x^2(1 + \mathrm{tg}^2\varphi) - 2R(1 + \cos\varphi)x = 0,$$

$x = 0$ donne le point α.

Les coordonnées de α' sont

$$x = 2R\cos^2\varphi(1 + \cos\varphi), \qquad y = R\sin 2\varphi(1 + \cos\varphi) + R\sin\varphi.$$

En introduisant $\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, on voit que l'enveloppe est du sixième ordre.



$$\begin{cases} x' = -R\sin 2\varphi(2 + 3\cos\varphi), \\ y' = 2R\cos 2\varphi(1 + \cos\varphi) + R\cos\varphi(1 - 2\sin^2\varphi) \\ \qquad\qquad = R\cos 2\varphi(2 + 3\cos\varphi). \end{cases}$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox, il suffit de faire varier φ de 0 à π.

Soit α l'angle compris entre 0 et π tel que $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

On a le tableau de variation :

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		α		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'	0	$-$			$-$ 0	$+$	0	$-$			$-$ 0
y'		$+$	0		$-$	$-$	0	$+$	0		$-$
x	4R	↘	$R\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	0	↗	$\frac{8R}{27}$	↘	$R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	0
y	0	↗	$R(1 + \sqrt{2})$	↘	R	↘	$\frac{5R\sqrt{5}}{27}$	↗	$R\sqrt{2} - 1$	↘	0

A la valeur α correspond un point de rebroussement, la courbe a la forme ci-contre

3° $$s'^2 = R^2(2 + 3\cos\varphi)^2.$$

d'où $$s = R(2\varphi + 3\sin\varphi + c^{te}).$$

Prenons le point S pour origine des arcs, on a

$$s = R(2\varphi + 3\sin\varphi);$$

pour $\varphi = 2\pi$, $L = 4\pi R$. La longueur de la courbe est égale à deux fois celle du cercle C.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{-1}{\operatorname{tg}2\varphi}, \qquad \text{donc} \qquad d\alpha = 2d\varphi, \qquad \rho = \frac{ds}{d\alpha} = R\left(1 + \frac{3}{2}\cos\varphi\right).$$

ρ est nul au point de rebroussement.

La développée est l'enveloppe de la droite $\alpha'\omega$, mais $\widehat{R\omega C} = \widehat{C\omega\alpha'}$, donc $\omega\alpha'$ est le rayon réfléchi du rayon $R\omega$ sur le miroir sphérique C.

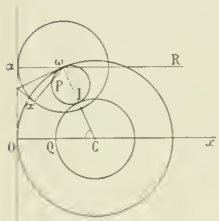
La développée est la caustique principale de ce miroir, c'est une épicycloïde à deux rebroussements.

Soit I le milieu de ωC, considérons le cercle de diamètre ωI et le cercle de centre C et de rayon CI.

Comme $\widehat{C\omega\alpha'} = \widehat{\omega CO}$, on a arc IP = arc IQ.

P engendre une épicycloïde à deux rebroussements, et $\omega\alpha'$ est tangente à cette épicycloïde.

Les coordonnées du centre de courbure sont



$$X = x - \frac{dy}{d\alpha} = 2R\cos^2\varphi(1 + \cos\varphi) - \frac{R}{2}(2\cos^2\varphi - 1)(2 + 3\cos\varphi)$$

$$= -R\cos^3\varphi + R + \frac{3R}{2}\cos\varphi,$$

$$X - R = \frac{3R}{4}\cos\varphi - \frac{R}{4}\cos 3\varphi,$$

$$Y = y + \frac{dx}{d\alpha} = R\sin\varphi - \frac{R}{2}\sin 2\varphi\cos\varphi = \frac{3R}{4}\sin\varphi - \frac{R}{4}(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)$$

$$= \frac{3R}{4}\sin\varphi - \frac{R}{4}\sin 3\varphi.$$

La développée est bien une épicycloïde à deux rebroussements.

PIGLOWSKI, lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. P. Wahl, lycée Janson; Groscolas; G. Foucry; L. Montaut; H. Janois, à Nantes; L. Simon, à Châlons; Bros; R. Bouvaist.

ÉCOLE CENTRALE (1908)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

4352. — Primitives des fonctions

$$y' = \frac{u'}{a^2 \mp u^2}, \quad y' = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad y' = \frac{3x + 5}{2x^2 + 4x + 3}, \quad y' = \frac{1}{x^2 + 4x + 5},$$

$$y' = \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}, \quad y' = \frac{1}{x^3 + 2x}, \quad y' = \frac{x}{x^4 - 1}, \quad y' = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x},$$

$$y' = \frac{1}{x^2(x - 1)^2}, \quad y' = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}, \quad y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}, \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$y' = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 12x + 20}}, \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}, \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x + \sin x + 1}},$$

$$y' = \cos 2x, \quad y' = \sin x - \sin 2x, \quad y' = \sin 3x.\sin 4x, \quad y' = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right),$$

$$y' = \sin^2 4x, \quad y' = \sin x.\sin 2x.\sin 3x, \quad y' = \sin^2 x.\cos 2x, \quad y' = \cos^3 x,$$

$$y' = \sin^3 4x, \quad y' = \sin^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \quad y' = \sin^4 x, \quad y' = \sin^5 x, \quad y' = \cos^5 2x, \quad y' = \operatorname{tg} mx,$$

$$y' = \operatorname{tg} mu.u', \quad y' = \operatorname{tg}^2 mu.u', \quad y' = \operatorname{cotg} 2x, \quad y' = \operatorname{tg}^4 x, \quad y' = \frac{\cos^3 x}{\sin x}, \quad y' = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x},$$

4353. — Limite de $n^{\frac{1}{n}}$ pour n infini. — Déterminer n pour que $n^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{1\,000}$.

4354. — Limites pour n infini de $\sqrt[n]{n^2}$, $\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n-1}}$, $(3n+4)^{\frac{1}{n^2+1}}$.

4355. — Limite pour $x = a$ de $\frac{\sin x - \sin a}{x^2 - 3ax + 2a^2}$, $\frac{\mathrm{L}x - \mathrm{L}a}{\sin(x-a)}$.

4356. — Limite pour $x = 0$ de

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \quad \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{x^2}, \quad \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\frac{2^{\sin x} - 1}{4^x - 3^x}, \quad \frac{\mathrm{L}(1+\sin 2x)}{1-\cos^3 x}, \quad \frac{\sin^2 2x.\mathrm{tg}^3 x}{\mathrm{L}(1+x^{10})}.$$

4357. — Limite pour $x = \frac{\pi}{4}$ de $\frac{4x-\pi}{\sin x - \cos x}$, $\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\, x - 1}$.

4358. — Limite pour $x = \frac{\pi}{3}$ de $\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$.

4359. — Limite pour $x = 0$ de $\mathrm{cotg}\, x - \frac{1}{x\cos x}$, $\mathrm{L}(1 - \sin 2x) - \sin 2x$, $x^{\sin x}$, $(\sin 2x)^{\mathrm{tg}\, 6x}$, $(\sin 2x)^{\frac{1}{4x}}$.

4360. — Limite de $x^{\frac{1}{x}}$ pour x infini.

4361. — Limite pour n infini de

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n}, \quad \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^{2n+9}, \quad \left(\frac{n+1}{-2n+1}\right)^{3n}, \quad \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}, \quad \left(\cos\frac{x}{2^n}\right)^{2^{n+4}},$$

$$\left(1 + \sin\frac{x}{n}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{a.2^{\frac{1}{n}} + b.3^{\frac{1}{n}}}{a+b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \mathrm{L}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+4}.$$

4362. — Limite de $(\cos x + \sin x)^{\mathrm{cotg}\, x}$ pour $x = 0$; de $(\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

4363. — x étant l'infiniment petit principal, ordre infinitésimal et partie principale de $1 - \cos x$, $x - \sin x$.

4364. — Qu'appelle-t-on infiniment petits équivalents ? — Exemples : $\mathrm{L}(1+x)$ et $\sin x$; $\mathrm{L}(1+\sin x)$ et $\mathrm{tg}\, x$.

4365. — Module d'un produit $(a+bi)(a'+b'i)$.

4366. — Calculer le quotient $\frac{\cos a + i\sin a}{\cos b + i\sin b - i}$.

4367. — Mettre $a + bi$ sous la forme $re^{\theta i}$.

4368. — Signification de $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

4369. — Montrer que $e^{ia} \times e^{-ia} = 1$.

4370. — Somme des termes de $1 + e^{ia} + e^{2ia} + \ldots + e^{(n-1)ia}$.

4371. — Calculer $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-2}$, $(\sin a + i\cos a)^3$, $(\cos a + i\sin a)^{-3}$.

4372. — Calculer $\sqrt{3+4i}$, $\sqrt{i-\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{1+i}$, $\sqrt[3]{-1-i}$,
$\sqrt[3]{-8+8i}$, $\sqrt[3]{3+i\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[4]{i+\sqrt{3}}$.

4373. — Résoudre les équations $e^{i\theta} = 1$, $z^5 = 1$, $z^6 = 1$, $z^8 = 1$.

4374. — Résoudre les équations

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = i, \qquad \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^3 = \cos a + i \sin a.$$

4375. — Reste de la division par $x^2 + 1$ de $(\cos a + x\sin a)(\cos b + x\sin b)$.

4376. — Reste de la division par $x^2 + 1$ de
$(\cos a + x\sin a)(\cos b + x\sin b)(\cos c + x\sin c)$.

4377. — Reste de la division de $x^{10} + 1$ par $x^2 + 2$.

4378. — Nombre des racines d'une équation algébrique rationnelle et de degré m ; une équation peut-elle avoir toutes ses racines égales ?

4379. — Etant donnée l'équation $(x^3 + px)^2 - q^2 = 0$, condition pour qu'elle ait une racine double.

4380. — Condition pour que l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine triple.

4381. — Déterminer m pour que l'équation $x^4 - 2x^3 + 2x + m = 0$ ait une racine triple.

4382. — Déterminer m de façon que les racines de l'équation

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - m = 0$$

soient en progression arithmétique.

4383. — On donne l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x + m = 0$; déterminer m de façon que l'une des racines soit égale à la somme des deux autres.

4384. — Condition pour que les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ soient en progression géométrique.

4385. — Condition pour que la somme de deux racines de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

soit égale à la somme des deux autres.

4386. — Déterminer m de façon que deux des racines de l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 8x + m = 0$$

vérifient la relation $ab = a + b$.

4387. — Condition pour que les deux équations $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + p'x + q' = 0$ aient une racine commune. — Déterminer m de façon que les deux équations

$$x^2 - 3x + m = 0,$$
$$2x^2 - 8x + m + 4 = 0$$

aient une racine commune.

4388. — Calculer la somme des carrés des racines de l'équation $4x^3 - 3x + \sin a = 0$.

4389. — a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, calculer

$$(3q - pa)(3q - pb)(3q - pc), \qquad (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2),$$
$$(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + (c^2 - a^2)(c^2 - b^2),$$
$$a^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + c^2a^2,$$
$$\frac{1}{3a^2 + p} + \frac{1}{3b^2 + p} + \frac{1}{3c^2 + p},$$
$$a(3b^2 + p)(3c^2 + p) + b(3c^2 + p)(3a^2 + p) + c(3a^2 + p)(3b^2 + p),$$
$$\frac{a^2}{3a^2 + p} + \frac{b^2}{3b^2 + p} + \frac{c^2}{3c^2 + p}.$$

4390. — a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, former l'équation qui admet comme racines $3a^2$, $3b^2$, $3c^2$.

4391. — a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, former l'équation qui admet pour racines $a + b$, $b + c$ et $c + a$.

4392. — Résoudre les équations

$$x^4 + x^3 + \lambda x^2 + x + 1 = 0,$$
$$2x^4 - x^3 + \lambda x^2 - x + 2 = 0.$$

4393. — On donne l'équation $x^3 - 6x + 1 = 0$. — Combien cette équation a-t-elle de racines comprises entre 0 et 4 ?

4394. — Combien l'équation $x^3 - 3x + m(1 - 3x^2) = 0$ a-t-elle de racines entre 1 et 4 ?

4395. — Nombre de racines réelles de l'équation

$$\frac{1 + 2x}{x - 2} + \frac{1 - 3x}{x + 3} + \frac{1 + x}{x - 1} + 8 = 0.$$

4396. — Condition pour que l'équation $x^3 + 12x^2 + m = 0$ ait ses trois racines réelles. — Même question pour $2x^3 - 6x^2 + m = 0$.

4397. — Démontrer que si une équation a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations.

4398. — Appliquer le théorème de Descartes à l'équation $x^5 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

4399. — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$\frac{x^5}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1} + 1 = 0.$$

4400. — Étudier les équations

$$x^4 - 6x + m = 0, \qquad x^4 - 6x^2 + 8x + \lambda = 0,$$
$$\frac{1}{x^2} + \frac{x}{(x - 3)^2} - m = 0, \qquad x^4 - 4ax + b = 0,$$
$$x^5 - 5ax + b = 0 \text{ (condition pour qu'on ait le plus grand nombre possible de racines réelles).}$$

4401. — Appliquer les méthodes d'approximation à la recherche des racines des équations

$$x^2 - 150 = 0, \qquad x^2 - 500 = 0, \qquad x^3 - 4x + 1 = 0.$$

4402. — Racines de l'équation $x^3 - 6x^2 + 8x + 15 = 0$.

4403. — Résoudre les inégalités $x^3 > 3x - 2$, $x^4 - a^4 > 4a^3(x - a)$.

4404. — Décomposer en fractions simples réelles les fractions rationnelles

$$\frac{1}{x^3 + 2x - 3}, \qquad \frac{1}{x^4 + 1}, \qquad \frac{x}{x^4 + 1}, \qquad \frac{1}{x^4 + px^2 + q}.$$

4405. — Montrer que $\operatorname{tg} a = \operatorname{cotg} a - 2 \operatorname{cotg} 2a$. — Limite pour n infini de

$$y = -2 \operatorname{cotg} 2a + \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{a}{2^n}.$$

4406. — Évaluer le produit $\sin a \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(a + \frac{2\pi}{3}\right)$.

4407. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. — Appliquer au cas de $a = 135°$.

4408. — Calculer les sommes

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cdots + \cos(2n-1)a,$$
$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots + \sin na.$$

4409. — Démontrer que $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$.

4410. — On donne une circonférence de rayon $R = 2^m$; trouver une limite supérieure de la différence entre un arc de un degré et la corde qui le sous-tend.

4411. — Résoudre les équations

$$\sin x + \cos x = 1, \qquad \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \text{ (maximum et minimum de } \sin x + \sqrt{3}\cos x).$$
$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0, \qquad \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0,$$
$$\cos x - \sin x = \sin x \cos x, \qquad \sin x(\sin x + \cos x) = a,$$
$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0, \qquad 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = m,$$
$$\sin^2 x + (4 - m)\sin x + 3 - m = 0 \text{ (discuter)},$$
$$\cos 3x = m\cos^3 x, \qquad \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} 2x = m, \qquad \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = m.$$

4412. — Résoudre un triangle connaissant b, c, A.

4413. — Calculer les côtés d'un triangle connaissant les trois angles et le périmètre.

4414. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés b, c et sachant que le troisième a est égal à la hauteur h correspondante.

4415. — Résoudre un triangle connaissant :

1° a, A, r;	4° a, A, $b - c = d$;
2° a, A, m;	5° a, A, $bc = p^2$;
3° a, A, h;	6° A, $B - C = \alpha$, $bc = k^2$.

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski.)

4416. — Construire les longueurs $x = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 - b^2}}$, $x = \sqrt{\frac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3}}$.

4417. — Équation générale des droites perpendiculaires à la droite $ax + by = 0$.

4418. — Quelle est la propriété commune aux droites représentées par l'équation $D + \lambda D' = 0$. Étudier les différentes positions de cette droite quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Qu'arrive-t-il dans le cas où $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

4419. — Que représente l'équation $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$?

4420. — Quels sont les points du plan qui vérifient le système

$$x^2 - y^2 > 0, \qquad x + 2y - 1 = 0 \text{ ?}$$

4421. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 - 4x + y - 2 = 0$?

4422. — Équation d'un cercle passant par trois points donnés. — Équation du cercle circonscrit au triangle dont les côtés ont pour équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

4423. — Lieu des points du plan dont la somme des puissances par rapport à deux cercles est constante.

4424. — Tangentes communes aux deux cercles $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2R'x = 0$.

4425. — Tangentes menées d'un point (α, β) à la courbe $y = x^3$. Nombre des solutions.

4426. — Équation aux coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener d'un point à une conique.

4427. — Mener d'un point $P(x_0, y_0)$ les tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; lieu du point P pour que les tangentes soient également inclinées sur la droite $x + y = 0$.

4428. — Lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

4429. — Équation de la normale en un point d'une courbe plane. — Application à $y = \frac{a^3}{x^2}$.

4430. — Normale à la parabole $y^2 - 2px = 0$, parallèle à une direction donnée.

4431. — Rayon de courbure en un point d'une courbe $y = f(x)$. — Quelle est la courbe dont le rayon de courbure est constant ?

4432. — Rayon de courbure de la courbe $x^2 + y^2 - y = 0$.

4433. — Concavité dans la courbe $y = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$.

4434. — Construire les courbes suivantes :

$$y = \frac{x^3}{x - 1}, \qquad y = \frac{x^3 + 1}{x - 1} \text{ (courbe asymptote)}, \qquad y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}, \qquad x = \frac{y - 1}{y^2 - 2},$$

$$y = \frac{\sin x}{1 + 2\cos x}, \qquad x = y^3 \pm \frac{1}{\sqrt{y}}, \qquad x = 3y \pm \sqrt{1 - 2y}, \qquad x = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + 2},$$

$$y = \frac{x + \sqrt[3]{x^3 - 1}}{x - 1}, \qquad y = \frac{x + \sqrt[3]{x^3 - 1}}{x + 1}, \qquad y = x \pm \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}.$$

4435. — Asymptotes de la courbe $x(x - 2y + 1) + 1 = 0$.

4436. — Asymptotes de la courbe $(y^2 - x^2)(x - 2y) + x + 3y = 0$.

4437. — Construire la courbe $x^3 + y^3 + x^2 - 2y^2 = 0$. — Tangentes à l'origine.

4438. — Construire la courbe $(x + a)(x^2 + y^2) + 2ay^2 = 0$.

4439. — Interpréter les inégalités

$$(2x^2 + 2y^2 - x + y)(x + y) > 0,$$

$$\frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y - 1} > 0, \qquad \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y + 1} - 1 > 0.$$

4440. — Réduction de l'équation d'une conique en axes rectangulaires. Ex. :

$$2x^2 + 3y^2 + 4xy - x + 2y = 0, \qquad x^2 + 2y^2 - 4xy + 3x - y = 0.$$

4441. — Réduction à la forme $y^2 = 2px + qx^2$.

4442. — Axe et sommet dans la parabole $x^2 + y^2 - 2xy + 3x = 0$.

4443. — Axes de la conique $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x - y + 1 = 0$.

4444. — Angle ou anomalie excentrique dans l'ellipse. Exprimer les coordonnées d'un point de l'ellipse en fonction de l'angle excentrique. Tangente en ce point.

4445. — Relation entre les segments interceptés sur une droite par deux coniques homothétiques et concentriques.

4446. — Intersection de deux coniques. — Cas où les deux coniques ont les mêmes directions asymptotiques.

4447. — Construire les courbes :

$$x = \frac{1 - 2t}{1 - t}, \qquad y = \frac{1 - t}{1 + t};$$

$$x = \frac{t}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t^2}{t + 1};$$

$$x = \frac{2t}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{t^2}{1 - t};$$

$$x = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t^2 + 2}{t - 1};$$

$$x = \frac{t^3}{t + 2}, \qquad y = \frac{t^2}{t + 1};$$

$$x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t^3}{t^2 + 1}.$$

4448. — Sous-tangente et sous-normale en coordonnées polaires. Appliquer à la courbe $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\omega}$. — En déduire une construction de la tangente.

4449. — Construire les courbes

$$\rho = a\sin^2\omega, \qquad \rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\omega + \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{1 - \operatorname{tg}\omega}{\cos\omega + \sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin\omega + 2\cos\omega}{\cos 2\omega}.$$

4450. — Calculer les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point A_1 obtenu en faisant tourner d'un angle α un point $A(x, y, z)$ autour de la droite $x = y$, $z = 0$.

4451. — On donne le plan $P \equiv 2x + 3y - z + 1 = 0$ et le point $A(1, 3, 0)$. — Trouver le point B symétrique de A par rapport au plan P.

4452. — On donne la droite D et le plan P

$$D \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases} \qquad P \equiv x + 2y + z = 0.$$

Trouver la projection de la droite D sur le plan P.

4453. — Angle des deux droites

$$D \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + z - 4 = 0; \end{cases} \qquad D' \begin{cases} -x + 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

4454. — Équations générales des droites perpendiculaires à la droite $P = 0$, $Q = 0$.

4455. — Équation générale des plans faisant un angle donné α avec le plan $ax + by + cz = 0$ et un angle donné β avec l'axe Oz.

4456. — Mener par la droite

$$2x - y - z = 0, \qquad 3x + y - 4 = 0$$

un plan faisant un angle θ avec la droite

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

4457. — Mener par la droite

$$(D) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

un plan faisant le même angle avec deux droites données

$$(D') \quad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}, \qquad (D'') \quad \frac{x}{a''} = \frac{y}{b''} = \frac{z}{c''}.$$

4458. — On donne la droite (D) : $2x - y + z = 0$, $x + y - 1 = 0$, et le plan $P \equiv 3x + 2y - z = 0$; mener par la droite D un plan faisant avec le plan P un angle donné.

4459. — Mener par une droite donnée

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

un plan faisant le plus petit angle possible avec un plan donné.

4460. — Distance d'un point $(1, -1, 2)$ à la droite

$$2x + y - 1 = 0, \qquad x + z - 2 = 0.$$

4461. — Distance de la droite $x = 2z + 1$, $y = 3z - 2$ à l'axe Oz, les axes étant rectangulaires.

4462. — Distance des deux droites

$$D \begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = 3z + 2; \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = -z + 3, \\ y = 4z - 1. \end{cases}$$

4463. — Perpendiculaire commune aux deux droites

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ -x - y + 2z - 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

4464. — Que représente l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 2y = 0$? — Déterminer le centre de la section par le plan $x + y - z = 0$.

4465. — Mener à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ un plan tangent parallèle au plan $2x + y - z = 0$.

4466. — Puissance d'un point par rapport à une sphère. — La sphère est la seule surface du second degré pour laquelle le produit $PA \times PB$ reste constant quelle que soit la sécante PAB.

4467. — Equation d'un cône de sommet $(0, 0, 1)$ dont la directrice a pour équation

$$\begin{cases} xy - x - y = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

4468. — Cône de sommet $(1, 2, 0)$ dont la directrice est la ligne D

$$\begin{cases} xz - y = 0, \\ yz - x = 0. \end{cases}$$

4469. — Surface engendrée par une droite s'appuyant sur deux droites données et perpendiculaire à l'une d'elles.

4470. — On donne la droite fixe $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$; former l'équation de la surface engendrée par la rotation de Oz autour de cette droite.

4471. — Surface engendrée par la droite $x = 1$, $y = 2$, en tournant autour de la droite $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$.

4472. — Equation de la surface de révolution engendrée par la courbe

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \qquad z = 0$$

en tournant autour de la droite $x = y = z$.

4473. — Déterminer les axes du cône $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy - 3yz = 0$.

4474. — Directions principales de la quadrique

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 2yz - 3x + y + 1 = 0.$$

4475. — Mener au cône $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx = 0$ un plan tangent parallèle à la droite

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}.$$

4476. — Mener à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z = 0$ un plan tangent parallèle au plan $x + y + z = 0$.

4477. — On donne la quadrique $2x^2 - y^2 + z^2 - 5x + 2y = 0$. Mener à cette surface un plan tangent parallèle au plan $2x + y - z = 0$.

4478. — Equation d'un cône de sommet donné, circonscrit à un paraboloïde elliptique.

4479. — Equation d'un cylindre de direction donnée circonscrit à un ellipsoïde. — Condition pour que le cylindre soit de révolution.

4480. — Equation du cylindre circonscrit à la quadrique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

parallèlement à la direction p, q, r.

4481. — Par la droite $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$, mener un plan tangent à la surface $2x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$.

4482. — Mener par la droite $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ un plan tangent à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

4483. — Mener à la surface $x^2+2y^2-z^2-1=0$ un plan tangent passant par le point $(1, -1, 2)$ et faisant avec Oz un angle donné.

4484. — Mener à un paraboloïde hyperbolique un plan tangent parallèle à une direction donnée.

4485. — Mener par un point donné les normales à la surface $xy = z$.

4486. — Combien peut-on mener de normales par un point à la quadrique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$? Le point étant pris dans un plan principal, discuter le nombre de solutions.

4487. — Déterminer les asymptotes de la section de la quadrique $x^2-y^2-2z=0$ par le plan $2x+y-z-1=0$.

4488. — Que représente l'équation $x^2+y^2-2z^2-1=0$? Déterminer les asymptotes de la section faite dans cette quadrique par le plan $x+y+z-1=0$.

4489. — Condition entre α, β, γ pour que le plan $\alpha x+\beta y+\gamma z+h=0$ coupe le paraboloïde $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$ suivant une hyperbole équilatère.

4490. — Propriété d'un plan passant par une génératrice d'un hyperboloïde à une nappe.

4491. — Que représentent les équations

$$x^2+y^2-z^2+xy=0\,; \qquad z=x-y=\sqrt{x^2-2y} \text{ (génératrices rectilignes)};$$
$$z=2x+y-\sqrt{3x^2+y^2+xy+1}\,; \qquad x^2+y^2-2z^2+4yz-2xz=0\ ?$$

Contour apparent sur le plan xOy, les projetantes étant parallèles à Oz, puis sur le plan xOz, les projetantes étant parallèles à Oy.

4492. — Que représente l'équation

$$x^2-y^2+z^2+4yz+2xz+2x+3y+z-1=0\ ?$$

Cône asymptote.

4493. — Comment reconnaît-on que l'équation générale du second degré représente un cylindre ? Appliquer à l'équation

$$-x^2+y^2-2z^2+2xy+4xz+x+y=0.$$

4494. — Etudier les mouvements rectilignes définis par les équations suivantes :

$x=6t-t^2,$	$x=a.\cos^2\omega t,$
$x=\frac{at-bt^3}{3},$	$x=a.\cos^2\omega t+b\sin^2\omega t,$
$x=a.\sin 2\pi t,$	$x=a.\sin^3\omega t.$

4495. — Diagramme des espaces et des vitesses dans le mouvement défini par l'équation $x=a.\cos\omega t$.

4496. — Trouver la loi d'un mouvement sachant que

$v=k\left(x+\frac{1}{x}\right),$	$v^2=g(x-a),\quad g>0$
$v^2=x^2-a^2,$	$v^2=k(a-x).$

4497. — Composition de deux mouvements vibratoires simples de même période

$$x_1=a.\cos(\omega t+\alpha), \qquad x_2=b\cos(\omega t+\beta).$$

4498. — Composition de trois mouvements vibratoires simples de même période

$$x_1=a_1.\cos(\omega t+\alpha_1), \qquad x_2=a_2.\cos(\omega t+\alpha_2), \qquad x_3=a_3.\cos(\omega t+\alpha_3).$$

4499. — Définition de la vitesse aréolaire. — Qu'est-ce qu'un mouvement où la vitesse aréolaire est nulle ?

4500. — Dans un plan, un mobile se meut avec une vitesse constante et une vitesse aréolaire constante. Quelle est sa trajectoire ?

4501 — Hodographe. — Démontrer que si l'hodographe est une droite, la trajectoire est plane. — Existe-t-il des mouvements dans lesquels l'hodographe coïncide avec la trajectoire ?

4502. — Composantes suivant trois axes rectangulaires de l'accélération totale, de l'accélération normale et de l'accélération tangentielle.

4503. — Mouvements dans lesquels l'accélération a une direction constante. — Cas où l'accélération a en outre une valeur constante.

4504. — Mouvement dans lequel l'accélération normale est nulle.

4505. — Etudier les mouvements suivants :

$$x=a\cos 2t, \qquad y=b\cos 2t\,; \qquad x=a\sin\omega t, \qquad y=b\sin\omega t \text{ (vitesse aréolaire)};$$
$$x=a\cos^2\omega t, \qquad y=b\sin^2\omega t, \qquad x=at+bt^2, \qquad y=a't+b't^2\,;$$
$$x=a\cos 2\pi t, \qquad y=b\cos(2\pi t+\alpha), \qquad x=a\cos\omega t, \qquad y=b\cos(\omega t+\alpha)\,;$$
$$x=at, \qquad y=bt, \qquad z=ct+\frac{1}{2}\gamma t^2\,;$$
$$x=at+\frac{1}{2}a't^2, \qquad y=bt+\frac{1}{2}b't^2, \qquad z=ct+\frac{1}{2}c't^2\,;$$
$$x=a\cos 2\pi t, \qquad y=a\sin 2\pi t, \qquad z=kt$$

(Construire le vecteur vitesse et le vecteur accélération.)

$$x=a\cos\omega t, \qquad y=a\sin\omega t, \qquad z=b\sin 2\omega t\,;$$
$$x=a\,\mathrm{ch}(\omega t+\alpha), \qquad y=b\,\mathrm{ch}(\omega t+\beta), \qquad z=c\,\mathrm{ch}(\omega t+\gamma)$$

4506. — Un point M tourne avec une vitesse angulaire ω autour de OI, bissectrice de xOy. — Calculer les composantes de la vitesse du mobile, suivant les trois axes de coordonnées.

4507. — Étudier le mouvement de rotation d'un point de l'espace tournant autour de la droite $x = z$, $y = 0$ avec une vitesse angulaire constante $\omega = 3$. — Déterminer les coordonnées d'un point à un moment donné et les composantes de la vitesse de ce point.

4508 — On considère un point M (x,y,z) soumis à deux forces attractives MF, MF' émanant des points fixes A et A et proportionnelles aux distances MA, MA'. — Déterminer la résultante.

4509. — On a constaté que le mouvement d'un mobile dans un plan a pour trajectoire la courbe d'équation

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$$

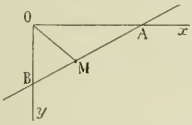
et que de plus la vitesse aréolaire est constante. Quelle est la loi de la force ?

4510. — Dans un mouvement sur l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, la vitesse aréolaire par rapport à l'origine est constante ; en déduire la loi de la force qui produit le mouvement.

4511. — Mouvement d'un point soumis à deux forces centrales, l'une attractive, l'autre répulsive, proportionnelles à la distance.

4512. — Trajectoire d'un mobile soumis à une force centrale répulsive et inversement proportionnelle au carré de la distance.

4513. — Mouvement d'un point soumis à une force attractive émanant d'un centre et inversement proportionnelle à la distance.

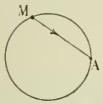


4514. — Deux points M et M sur une droite XX sont soumis à deux forces égales en valeur absolue et qui les attirent l'un vers l'autre. — Étudier le mouvement.

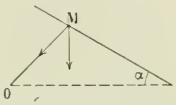
4515. — Surfaces de niveau dans un champ de forces créé par deux forces centrales constantes.

4516. — Travail d'une force constante et constamment tangente à la trajectoire du point mobile.

4517. — Dans un plan vertical, on donne une droite AB et un point O : on suppose qu'un mobile pesant partout de O décrive sans frottement la droite OM. A quel moment atteindra-t-il le point M ? Comment faut-il choisir le point M pour que le temps soit minimum ?



4518. — Mouvement sur un plan incliné d'un point matériel pesant soumis à une force attractive proportionnelle à sa distance à un point fixe O.



4519. — Étudier le mouvement d'un point matériel M non pesant, mobile sur un cercle sans frottement, ce point étant attiré proportionnellement à la distance par un point fixe A, sur le cercle.

4520. — Mouvement d'un point pesant sur une parabole, sans frottement.

4521. — Mouvement d'un point pesant lancé sur un plan horizontal rugueux.

4522. — Mouvement sur un plan horizontal rugueux d'un point matériel pesant soumis à une force horizontale constante.

4523. — Équilibre et mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné rugueux.

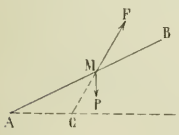
4524. — Déterminer la tension du fil dans un pendule simple.

4525. — On suppose un pendule simple oscillant ; au moment où le fil passe par la verticale, il se casse ; quel sera le mouvement nouveau ?

4526. — Calculer l'accélération pour une latitude donnée, d'un point invariablement fixé à la surface de la terre, en ne considérant que le mouvement de rotation de la terre sur elle-même.

4527. — Équilibre d'un point mobile pesant sur une courbe donnée.

4528. — Dans un plan vertical, on a un fil tendu AB ; un anneau pesant M, de poids P, est repoussé par le point C par une force constante F. — Équilibre de l'anneau en supposant qu'il n'y a pas de frottement.



4529. — Moment d'un vecteur (x, y, z, X, Y, Z) par rapport à la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

4530. — Relation entre les moments d'un système de vecteurs par rapport à deux axes parallèles.

4531. — On donne un système de vecteurs et un point O dans l'espace. Lieu des axes passant par O pour lesquels le moment du système de vecteurs est égal à un vecteur OG.

4532. — Dans la réduction à deux vecteurs, peut-on se donner arbitrairement l'un des deux vecteurs ?

4533. — Construire un couple équivalent à un couple donné et dont les vecteurs soient parallèles à une droite donnée ; dans quel cas le problème est-il possible ?

4534. — Conditions d'équilibre du treuil ; l'axe étant horizontal, déterminer les pressions sur l'axe.

4535 — Équilibre de la poulie fixe avec frottement en supposant les cordons rectangulaires, l'un (puissance) horizontal et l'autre (résistance) vertical ; la poulie étant sur le point de se mouvoir sous l'action de la puissance.

Géométrie et Géométrie descriptive. (M. Arnal.)

4536. — Rapport anharmonique de quatre points.

4537. — Mener une droite parallèle à une droite donnée en s'appuyant sur deux droites données.

4538. — Droite s'appuyant sur trois droites données.

4539. — Trouver les points d'une droite dont le rapport de la cote à l'éloignement soit égal à $\frac{m}{n}$. — Trouver les points d'un cône de révolution tels que le rapport de la cote à l'éloignement soit égal à $\frac{m}{n}$.

4540. — Lieu des points d'un plan, donné par ses traces, pour lesquels la cote et l'éloignement ont une somme donnée λ.

4541. — On donne la ligne de plus grande pente d'un plan ; trouver les traces du plan. — Trouver les points du plan tels que la somme de la cote et de l'éloignement soit égale à l.

4542. — Appuyer sur deux droites données dont les projections horizontales sont parallèles un segment horizontal de longueur l.

4543. — Trouver sur une droite un point également éloigné de deux points donnés.

4544. — Trouver dans un plan donné une droite dont chaque point soit équidistant des traces d'un plan donné.

4545. — Trouver sur une droite donnée un point à une distance donnée d'un plan donné par son échelle de pente.

4546. — Plus courte distance entre deux droites, l'une dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical.

4547. — Etant données les deux projections d'une droite, les projections horizontales d'une seconde droite et de leur perpendiculaire commune, trouver les projections verticales de cette seconde droite et de la perpendiculaire commune.

4548. — Amener par un changement de plan les traces horizontales de deux plans à être parallèles.

(*A suivre.*)

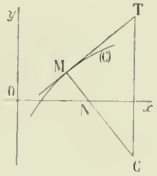
QUESTIONS PROPOSÉES

1763. — Dans un triangle on donne le périmètre $2p$, le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A, r, et la surface S. Calculer le côté a et former l'équation du second degré qui donne les deux autres côtés b et c. Discuter.

Application numérique : $p = 3$, $r = \sqrt{3}$, $S = \sqrt{3}$.

E. H.

1764. — On considère une courbe (C) rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point M de cette courbe et la normale en M, qui rencontre l'axe des x au point N ; on considère en outre le centre de courbure C et la parallèle CT à Oy, qui rencontre la tangente en T.



1° Déterminer les courbes (C) de façon que l'on ait toujours

$$2ON = CT.$$

2° Trouver les lieux des points de contact des tangentes menées par le point O aux courbes (C).

3° Ces lieux constituent une famille de courbes à un paramètre, dont on demande les trajectoires orthogonales.

Bouligand, à Nantes.

1765. — On considère un cercle de diamètre AB et de centre O, un point M mobile sur le cercle, et la projection P de ce point sur AB. Le point I étant le symétrique de P par rapport au rayon MO, on demande :

1° Le lieu du point I ;

2° L'enveloppe de la droite MI et le lieu du pôle de cette droite par rapport au cercle O ;

3° Le lieu du point de rencontre Q de la droite IP et du rayon OM, ainsi que l'enveloppe de IP. Construire ces courbes.

G. Bouligand.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 5. Février 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

par **M. L. Leau**, professeur au lycée Michelet.

Les racines d'une équation algébrique entière sont fonctions continues des coefficients de cette équation.

Pour préciser cet énoncé, désignons par

$$F(x) \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

l'équation envisagée, et supposons que les coefficients a_k soient des fonctions continues de n variables $t_1, t_2, \ldots t_n$, qui prennent pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ de ces variables, les valeurs finies $a_0, a'_1, \ldots a'_m$; supposons en outre que dans ce cas l'équation admette une racine multiple d'ordre p, x' ; il s'agit de démontrer que, lorsque les variables t tendent vers les valeurs α, simultanément, p racines de l'équation $F(x) = 0$ tendent vers le nombre x'.

A mon sens, la méthode de Cauchy, fondée sur la variation de l'argument de la fonction, et que Briot et Bouquet ont exposée dans leur théorie des fonctions elliptiques, est l'instrument qui convient le mieux, tant par sa simplicité que par sa précision, dans l'étude de ce théorème et des théorèmes analogues. Malheureusement, il semble difficile de la placer dans un cours de Mathématiques spéciales.

Les démonstrations données dans les livres destinés aux élèves de cette classe, sont insuffisantes. L'une des meilleures, celle de M. Niewenglowski, n'est pas rigoureuse.

L'objet de cette note est de préciser les termes employés et de perfectionner cette méthode.

M. Niewenglowski étudie directement le cas des racines infinies, et démontre le théorème suivant, auquel le théorème général peut se ramener sans difficulté.

Lorsque les coefficients de l'équation $F(x) = 0$ *tendent simultanément vers des limites finies, les* p *premiers vers* 0, *et* a_p *vers une limite non nulle* a'_p, *il y a exactement* p *racines de l'équation qui sont infiniment grandes.*

Dans la démonstration que j'ai citée, on ne prouve pas, avec netteté, qu'il existe p racines dont les modules sont supérieurs à un nombre positif arbitrairement choisi, lorsque les modules des différences $t - \alpha$ sont plus petits qu'un certain nombre positif bien déterminé, et que, en même temps, les modules des $m - p$ autres racines restent plus petits qu'un nombre positif fixe R.

C'est cependant là ce qu'il est indispensable d'établir pour préciser le sens que l'on doit attribuer aux expressions racines infiniment grandes et racines finies, et pour démontrer rigoureusement le théorème.

Ecrivons ainsi l'équation

$$\frac{a_p + a_{p+1}x^{-1} + \cdots + a_mx^{-(m-p)}}{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x} = -1.$$

Avec cette forme, nous allons montrer qu'on peut fixer un nombre positif, R, et construire un nombre infiniment grand, u, tels qu'il n'y ait aucune racine dont le module soit compris entre R et $|u|$.

Désignons par b un nombre positif fixe moindre que $|a'_p|$ et supposons que tous les modules des quantités $t - \alpha$ soient assez petits pour que $|a_p|$ soit supérieur à un nombre positif fixe b' compris entre b et $|a'_p|$; nous savons qu'on peut trouver un nombre positif ε, assez petit, pour que $\left|\frac{1}{x}\right|$ étant plus petit que ε, le module de $a_{p-1}x^{-1} + a_{p+2}x^{-2} + \cdots + a_m x^{-(m-p)}$ soit moindre que $b' - b$. Nous serons assurés alors qu'en prenant $R = \frac{1}{\varepsilon}$, et $|x| > R$, le module du numérateur est supérieur à b. Il est facile maintenant de rendre le module du dénominateur plus petit que b.

Il suffit de rendre le module de chaque terme moindre que $\frac{b}{p}$, c'est-à-dire de prendre

$$|x| < \sqrt{\frac{b}{p|a_0|}}, \qquad \sqrt[p-1]{\frac{b}{p|a_1|}}, \qquad \ldots \qquad \frac{b}{p|a_{p-1}|}.$$

Or tous ces nombres sont des infiniment grands ; désignons par u celui qui a le plus petit module, nous pourrons prendre les différences $t - \alpha$ assez petites pour que, toutes les conditions précédentes étant réalisées, on ait en plus $|u| > R$. Nous voyons alors que, pour toute valeur de x dont le module est compris entre R et $|u|$, l'égalité posée est impossible, puisque le second membre est égal à -1 et que le premier a un module supérieur à 1. Il n'y a donc aucune racine comprise dans la couronne correspondante, et les racines de l'équation $F(x) = 0$ se partagent en deux groupes, celles dont les modules sont plus petits que R, et celles dont les modules sont supérieurs à $|u|$.

Ainsi se trouvent précisés les sens exacts qu'il faut attribuer aux expressions : racines qui restent finies et racines infiniment grandes. Ainsi se trouve fixée en outre une limite supérieure des modules des différences $t - \alpha$ pour lesquelles les modules des racines infiniment grandes seront plus grands qu'un nombre positif choisi arbitrairement, A : il suffira de rendre $|u| > A$.

SUR UNE APPLICATION DES IMAGINAIRES A LA GÉOMÉTRIE

par M. **Ch. Michel**, professeur au lycée Saint-Louis.

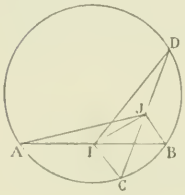
Dans un précédent article (*Revue*, mars 1906), j'ai montré que le rapport anharmonique de quatre points A, B, C, D d'un cercle peut, grâce à une convention de signes, se mettre sous la forme

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

CA, CB, DA, DB désignant les mesures algébriques des cordes du cercle. J'ai montré aussi que, si on rapporte la figure à deux axes de coordonnées directement rectangulaires quelconques, ce rapport anharmonique est égal à celui des affixes des quatre points.

Je vais appliquer ces résultats à l'étude d'une figure de géométrie particulière que l'on rencontre dans divers problèmes.

Soient un cercle et deux cordes conjuguées AB et CD, c'est-à-dire telles que l'une passe par le pôle de l'autre par rapport au cercle. Les points A et B sont, sur le cercle, conjugués harmoniques par rapport aux deux points C et D, et inversement. On a, en grandeur et en signe,



$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Cela posé, prenons deux axes directement rectangulaires ayant pour origine le milieu I de la corde AB et désignons par a, b, c, d les affixes des quatre points A, B, C, D. Il est clair qu'on a

$$a = -b.$$

En outre, le rapport anharmonique des quatre nombres a, b, c, d est égal à -1. Par suite, eu égard à la relation précédente, on a

$$\frac{c-a}{c+a} = -\frac{d-a}{d+a},$$

d'où l'on tire la relation

$$cd = a^2.$$

Ce résultat s'interprète immédiatement. Le produit des modules de c et de d est égal au carré du module de a et la somme des arguments de c et de d est égale au double de l'argument de a. Géométriquement, cela veut dire que : 1° AB est bissectrice intérieure des deux demi-droites IC et ID ; 2°

$$\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID.$$

Réciproquement, soit un segment AB ; par le milieu I de ce segment, menons deux demi-droites symétriques par rapport à AB et prenons respectivement sur ces demi-droites deux points C et D tels que l'on ait $IC.ID = \overline{IA}^2 = \overline{IB}^2$. En rapportant la figure à deux axes de coordonnées directement rectangulaires issus de I et en désignant par a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D, on a $a = -b$ et $cd = a^2$, ce qui exprime que le rapport anharmonique des quatre nombres a, b, c, d est égal à -1. Comme il est réel, il s'ensuit que les quatre points A, B, C, D sont situés sur un même cercle ; les cordes AB et CD sont d'ailleurs conjuguées par rapport à ce cercle.

Mais alors, CD est bissectrice intérieure des demi-droites qui vont du milieu J de CD aux points A et B et $\overline{JC}^2 = \overline{JD}^2 = JA.JB$.

Ainsi, on a le théorème suivant :

Si deux segments AB *et* CD, *ayant respectivement pour milieux* I *et* J, *sont tels que* AB *soit bissectrice intérieure des demi-droites* IC *et* ID *et que l'on ait* $\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = IC.ID$, *inversement,* CD *est bissectrice intérieure des demi-droites* JA *et* JB *et l'on a* $\overline{JC}^2 = \overline{JD}^2 = JA.JB$. *Les quatre points* A, B, C, D *sont sur un cercle et les cordes* AB *et* CD *sont conjuguées par rapport à ce cercle.*

On peut déduire ce théorème de ce fait que la relation $cd = a^2$ peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{c+d}{2} - a\right)\left(\frac{c+d}{2} + a\right) = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2.$$

Or, les imaginaires $\frac{c+d}{2} - a$, $\frac{c+d}{2} + a$, $\frac{c-d}{2}$ sont représentées par des vecteurs issus de l'origine des coordonnées et équipollents respectivement aux vecteurs AJ, BJ, DJ.

Théorème. — *Étant données deux cordes* AB *et* CD *d'un cercle, conjuguées par rapport à ce cercle, si* I *et* J *sont respectivement les milieux de ces cordes, on a*

$$JA + JB = IC + ID.$$

En effet, on a

$$JA = \text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} - a\right), \qquad JB = \text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} + a\right),$$

d'où

$$JA + JB = \text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} - a\right) + \text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} + a\right).$$

Il s'agit de montrer que l'on a

$$\text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} - a\right) + \text{mod.}\left(\frac{c+d}{2} + a\right) = \text{mod. } c + \text{mod. } d.$$

Or, a est une racine carrée de cd que nous représenterons par $\sqrt{cd}$ et c'est aussi le produit d'une racine carrée de c que nous représenterons par $\sqrt{c}$ et d'une racine carrée de d que nous représente-

rons par $\sqrt{d}$. Dès lors, on a

$$\frac{c+d}{2} - a = \frac{1}{2}(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2, \qquad \frac{c+d}{2} + a = \frac{1}{2}(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2.$$

La relation à établir s'écrit donc

$$\frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 + \frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = \text{mod.}\,c + \text{mod.}\,d.$$

Posons

$$\sqrt{c} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \sqrt{d} = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha').$$

r et r' étant les modules. On a

$$\begin{aligned}\text{mod.}\,(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 &= (r\cos\alpha - r'\cos\alpha')^2 + (r\sin\alpha - r'\sin\alpha')^2\\ &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\alpha - \alpha'),\\ \text{mod.}\,(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 &= (r\cos\alpha + r'\cos\alpha')^2 + (r\sin\alpha + r'\sin\alpha')^2\\ &= r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\alpha - \alpha').\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 + \frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = r^2 + r'^2 = \text{mod.}\,c + \text{mod.}\,d.$$

ce qu'il fallait démontrer.

C'est un résultat qui s'établit du reste facilement par la géométrie. Dans le triangle JAB, JI est médiane, et l'on a

$$\overline{JA}^2 + \overline{JB}^2 = 2(\overline{IJ}^2 + \overline{IA}^2);$$

par suite

$$\overline{JA}^2 + \overline{JB}^2 + 2JA\,JB = (JA + JB)^2 = 2\left(\overline{IJ}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} + \frac{\overline{CD}^2}{4}\right);$$

or, par symétrie, on trouve la même valeur pour $(IC + ID)^2$.

Théorème. — *On a les égalités*

$$\text{val. abs.}\,(JA - JB) = AB\cos\frac{\widehat{CID}}{2} \quad \textit{et} \quad \text{val. abs.}\,(ID - IC) = CD\cos\frac{\widehat{AJB}}{2}.$$

En effet,

$$JA - JB = \frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 - \frac{1}{2}\,\text{mod.}\,(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = -2rr'\cos(\alpha - \alpha').$$

Or, $r^2 = IC$, $r'^2 = ID$; donc $r^2r'^2 = IC.ID = \overline{IA}^2 = \overline{IB}^2$, donc $rr' = \frac{AB}{2}$. D'autre part, $\alpha' - \alpha$ est la moitié de la différence entre l'argument de d et l'argument de c; c'est donc égal à l'angle $\frac{CID}{2}$, en grandeur et en signe, à un multiple de π près. On a par suite

$$\text{val. abs.}\,(JA - JB) = AB\cos\frac{\widehat{CID}}{2}.$$

De même,

$$\text{val. abs.}\,(IC - ID) = CD\cos\frac{\widehat{AJB}}{2}.$$

Applications. — 1° Supposons que, les points A et B restant fixes, le point J décrive une ellipse ayant pour foyers A et B. Alors la droite CD reste normale à cette ellipse au point variable J. D'autre part, on a

$$IC + ID = JA + JB = \text{const.} = 2\alpha,$$

2α étant la longueur du grand axe de l'ellipse, et

$$IC.ID = \overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \gamma^2$$

γ étant la demi-distance focale de l'ellipse. On en déduit que IC et ID sont constants. Les points C et D décrivent deux cercles ayant pour centre le point I. Les rayons de ces deux cercles sont racines de l'équation

$$\rho^2 - 2\alpha\rho + \gamma^2 = 0,$$

d'où

$$\rho = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \alpha \pm \beta,$$

β étant le demi-petit axe de l'ellipse. On retombe sur des résultats qu'on rencontre dans la construction, due à Chasles, des axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués en grandeur et en position.

2° Supposons que, les points A et B restant fixes, le point J décrive une hyperbole ayant pour foyers A et B. Alors la droite CD reste tangente à cette hyperbole au point variable J. D'autre part, on a

$$\text{val. abs. } (JA - JB) = AB \cos \frac{\widehat{CID}}{2} = \text{const.}$$

Donc l'angle CID est constant, autrement dit, les points C et D décrivent deux droites fixes partant de I. D'ailleurs on a

$$\cos \frac{\widehat{CID}}{2} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

α désignant le demi-axe focal de l'hyperbole et γ désignant la demi-distance focale. Cela montre que les droites décrites par les points C et D sont les asymptotes de l'hyperbole.

L'aire du triangle variable CID est égale à

$$\frac{1}{2} IC.ID \sin \widehat{CID}.$$

On reconnaît que cette aire est constante et égale à $\alpha\beta$, β désignant le demi-axe non transverse.

3° Supposons que, les droites IC et ID restant fixes, la droite CD varie de manière que l'aire du triangle CID soit constante. Il s'ensuit que IC et ID ont un produit constant. Donc, les points A et B, situés sur la bissectrice intérieure des demi-droites IC et ID, sont fixes. D'ailleurs, on a

$$\text{val. abs. } (JA - JB) = AB \cos \frac{\widehat{CID}}{2} = \text{const.}$$

Donc le milieu J de CD décrit une hyperbole ayant pour foyers A et B et la droite CD est tangente en J à cette hyperbole. Ainsi, *l'enveloppe des droites qui déterminent avec deux droites fixes un triangle d'aire constante est une hyperbole asymptote à ces deux droites.*

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1681. — *On considère toutes les hypocycloïdes à trois rebroussements trois fois tangentes à une ellipse donnée.*

1° *Déterminer ces hypocycloïdes et montrer qu'elles se partagent en deux familles. Toutes les hypocycloïdes d'une même famille sont égales entre elles et ont leurs centres sur une même circonférence.*

2° *Les triangles formés par les trois tangentes communes sont inscrits dans une même circonférence.*

3° *Les normales aux trois points de contact sont concourantes et leur point de concours décrit une circonférence.*

4° *Trouver, pour une des deux familles, l'enveloppe des tangentes de rebroussement des hypocycloïdes de la famille.*

5° *Démontrer que le mouvement épicycloïdal des courbes d'une des deux familles admet pour base et pour roulette deux cercles.*

1° Soit

$$(E) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation de l'ellipse donnée, rapportée à ses axes.

Une hypocycloïde à trois rebroussements, de centre x_0, y_0, est l'enveloppe des droites dont l'équation est de la forme

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = R\cos(3\varphi + \varphi_0),$$

où φ est un angle variable.

La grandeur de la courbe est déterminée par la valeur de R. Son orientation est déterminée par la valeur de φ_0.

Posons $$x + iy = \xi, \qquad x - iy = \eta.$$

L'équation tangentielle de l'ellipse dans ce système de coordonnées est

$$(E') \qquad c^2(u^2 + v^2) + 2(a^2 + b^2)uv = w^2.$$

L'équation de la tangente à l'hypocycloïde est

$$\xi + t\eta = \xi_0 + t\eta_0 + \lambda t^2 + \frac{\mu}{t},$$

où $$t = e^{i\varphi}, \qquad \lambda = Re^{i\varphi_0}, \qquad \mu = Re^{-i\varphi_0}.$$

Les coordonnées de la tangente mobile peuvent donc être prises égales à

$$u = t, \qquad v = t^2, \qquad w = -(\lambda t^3 + \eta_0 t^2 + \xi_0 t + \mu).$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (E'). Nous obtenons une équation du sixième degré qui fournit les six tangentes communes à l'hypocycloïde et à l'ellipse.

Cette équation doit avoir trois racines doubles. Son premier membre doit donc être un carré de la forme

$$(t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2.$$

L'identification conduit aux relations suivantes :

$$(\Gamma) \qquad \lambda^2 = \frac{\lambda\eta_0}{\alpha} = \frac{\eta_0^2 + 2\lambda\xi_0 - c^2}{\alpha^2 + 2\beta} = \frac{\xi_0\eta_0 + \lambda\mu - (a^2 + b^2)}{\alpha\beta + \gamma} = \frac{\xi_0^2 + 2\mu\eta_0 - c^2}{\beta^2 + 2\alpha\gamma} = \frac{\mu\xi_0}{\beta\gamma} = \frac{\mu^2}{\gamma^2}.$$

La comparaison des deux premiers termes et des deux derniers donne

$$\alpha\lambda - \eta_0 = \beta\mu - \gamma\xi_0 = 0;$$

la comparaison du premier et du dernier terme donne $\gamma\lambda \pm \mu = 0$.

Examinons d'abord la solution correspondant au signe $-$.

Elle donne

$$\alpha = \frac{\eta_0}{\lambda}, \qquad \beta = \frac{\xi_0}{\lambda}, \qquad \gamma = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (Γ) : nous obtenons, après suppression du facteur λ^2,

$$0 = \frac{c^2}{\eta_0^2 + 2\lambda\xi_0} = \frac{a^2 + b^2}{\xi_0\eta_0 + \lambda\mu} = \frac{c^2}{\xi_0^2 + 2\mu\eta_0},$$

équations dépourvues de solutions finies, et qu'à ce titre nous rejetons.

La solution qui correspond au signe $+$ donne

$$(\Gamma') \qquad \alpha = \frac{\eta_0}{\lambda}, \qquad \beta = \frac{-\xi_0}{\lambda}, \qquad \gamma = -\frac{\mu}{\lambda},$$

d'où, en substituant dans les équations (Γ),

$$1 = \frac{\eta_0^2 + 2\lambda\xi_0 - c^2}{\eta_0^2 - 2\lambda\xi_0} = \frac{\xi_0\eta_0 + \lambda\mu - (a^2 + b^2)}{-(\xi_0\eta_0 + \lambda\mu)} = \frac{\xi_0^2 + 2\mu\eta_0 - c^2}{\xi_0^2 - 2\mu\eta_0},$$

ou encore

$$(\Gamma'') \qquad \lambda = \frac{c^2}{4\xi_0}, \qquad \mu = \frac{c^2}{4\eta_0}, \qquad 2(\xi_0\eta_0 + \lambda\mu) = a^2 + b^2.$$

L'élimination de λ, μ entre ces trois équations est immédiate, et donne pour lieu du centre (ξ, η)

$$16\xi^2\eta^2 - 8(a^2 + b^2)\xi\eta + c^4 = 0.$$

Soit
$$\xi\eta = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Notre équation s'écrit

$$16\rho^4 - 8(a^2 + b^2)\rho^2 + c^4 = 0,$$

ou
$$[4\rho^2 - (a + b)^2][4\rho^2 - (a - b)^2] = 0.$$

Elle se décompose donc en deux autres :

$$(C_1) \qquad \rho = \frac{a + b}{2},$$

$$(C_2) \qquad \rho = \frac{a - b}{2},$$

équations de deux cercles de centre O.

Nous voyons ainsi que les courbes proposées se partagent en deux familles. Les unes ont leur centre sur le cercle (C_1) et les autres sur le cercle (C_2).

La grandeur de la courbe est déterminée par

$$R^2 = \lambda\mu = \frac{c^4}{16\xi\eta} = \frac{c^4}{16\rho^2} \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{c^2}{4\rho};$$

pour la première famille

$$R_1 = \frac{c^2}{2(a + b)} = \frac{a - b}{2};$$

pour la deuxième

$$R_2 = \frac{c^2}{2(a - b)} = \frac{a + b}{2}.$$

Les courbes d'une même famille sont donc bien de grandeur invariable.

2° Considérons par exemple la première famille, où

$$\xi_0\eta_0 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

Cette équation et les équations (Γ'') permettent de poser

$$(\xi_0, \eta_0, \lambda, \mu) \qquad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{a + b}{2}\,\theta, \\ \eta_0 = \dfrac{a + b}{2}\,\dfrac{1}{\theta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{c^2}{2(a + b)\theta} = \dfrac{a - b}{2\theta}, \\ \mu = \dfrac{c^2\theta}{2(a + b)} = \dfrac{a - b}{2}\,\theta \end{cases}$$

Les équations (Γ') donnent alors

$$\alpha = \frac{\eta}{\lambda} = \frac{a + b}{a - b}, \qquad \beta = \frac{-\xi}{\lambda} = -\frac{a + b}{a - b}\theta^2, \qquad \gamma = -\frac{\mu}{\lambda} = -\theta^2.$$

L'équation aux t des tangentes communes,

$$t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0,$$

devient alors

$$(t) \qquad t^3 + \frac{a + b}{a - b}\,t^2 - \theta^2\,\frac{a + b}{a - b}\,t - \theta^2 = 0.$$

Soient t, t', t'' ses trois racines.

$$t + t' + t'' = S = -\frac{a + b}{a - b}, \qquad tt' + tt'' + t't'' = T = -\frac{a + b}{a - b}\,\theta^2, \qquad tt't'' = P = \theta^2.$$

Cherchons le point de rencontre des deux tangentes t' et t''. Ce point est donné par les équations

$$\xi + t'\eta = \xi_0 + t'\eta_0 + \lambda t'^2 + \frac{\mu}{t'}, \qquad \xi + t''\eta = \xi_0 + t''\eta_0 + \lambda t''^2 + \frac{\mu}{t''},$$

d'où

$$(\xi,\ \eta)\quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + \mu\dfrac{t'+t''}{t't''} - \lambda t't'' = \xi_0 + \mu\left(\dfrac{T}{P} - \dfrac{1}{t}\right) - \lambda\dfrac{P}{t}, \\ \eta = \eta_0 + \lambda(t'+t'') - \dfrac{\mu}{t't''} = \eta_0 + \lambda(S-t) - \mu\dfrac{t}{P}. \end{cases}$$

L'équation (t),

$$t^3 - St^2 + Tt - P = 0,$$

donne, en divisant par Pt,

$$\frac{T}{P} - \frac{1}{t} = \frac{St - t^2}{P},$$

d'où, en substituant dans les équations (ξ, η), en tenant compte des équations $(\xi_0, \eta_0, \lambda, \mu)$ et toutes réductions faites,

$$\xi = (b-a)\frac{\theta}{t}, \qquad \eta = (b-a)\frac{t}{\theta},$$

d'où l'on déduit

$$\xi\eta = x^2 + y^2 = (a-b)^2.$$

Donc les sommets du triangle formé par les trois tangentes aux points de contact sont sur un cercle fixe de centre O et de rayon $(a-b)$.

Nous allons profiter des équations précédentes pour établir une autre propriété.

Soient G, H, ω le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points du triangle en question,

$$\overline{OH} = 2\overline{O\omega} = 3\overline{OG}.$$

Cherchons G, d'après les valeurs trouvées ci-dessus pour ξ, η,

$$3\xi_G = (b-a)\theta\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''}\right) = (b-a)\theta\frac{T}{P} = (a+b)\theta,$$

$$3\eta_G = (b-a)\frac{1}{\theta}(t+t'+t'') = (b-a)\frac{S}{\theta} = \frac{a+b}{\theta},$$

d'où l'on déduit que les points G, H, ω décrivent chacun un cercle de centre O. Mais ce n'est pas là la propriété que nous avons en vue.

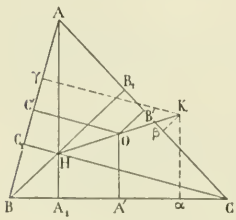
Des valeurs trouvées pour ξ_G, η_G, on déduit

$$\xi_\omega = \frac{3}{2}\xi_G = \frac{a+b}{2}\theta = \xi_0, \qquad \eta_\omega = \frac{3}{2}\eta_G = \frac{a+b}{2\theta} = \eta_0.$$

Ainsi dans chacun des triangles considérés le centre du cercle des neuf points coïncide avec celui de l'hypocycloïde correspondante, ou encore :

Chacune des hypocycloïdes considérées est l'enveloppe des droites de Simson du triangle correspondant, c'est-à-dire l'hypocycloïde minimum inscrite à ce triangle.

3° Nous allons déduire de là que les trois normales aux points de contact sont concourantes.



Soient en effet ABC le triangle considéré, A', B', C' les milieux des côtés, A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs. Les points de contact avec les côtés de l'hypocycloïde, enveloppe des droites de Simson, sont les symétriques α, β, γ de A_1, B_1, C_1 respectivement par rapport à A', B', C'. Les normales aux côtés en ces points sont manifestement concourantes au point K, symétrique de H par rapport à O.

Nous ne nous arrêterons pas à la vérification par le calcul de cette propriété.

On déduit de ce qui précède

$$\xi_K = -\xi_H = -3\xi_G = -(a+b)\theta, \qquad \eta_K = -\eta_H = -3\eta_G = -\frac{a+b}{\theta},$$

d'où
$$\overline{OK} = \xi_K \eta_K = (a+b)^2.$$

Le point K décrit donc un cercle de centre O et de rayon $(a+b)$, ainsi qu'il était annoncé.

4° *Enveloppe des tangentes de rebroussement.* — La tangente

$$\xi - \xi_0 + t(\eta - \eta_0) = \lambda t^2 + \frac{\mu}{t}$$

sera de rebroussement si elle passe au centre ξ_0, η_0, d'où $\lambda t^3 + \mu = 0$, ou, d'après les valeurs trouvées pour λ et μ,

$$t^3 + \theta^2 = 0.$$

Son équation devient

$$\xi + t\eta = \xi_0 + t\eta_0 = \frac{a+b}{2}\theta + t\frac{a+b}{2\theta}.$$

La relation $t^3 + \theta^2 = 0$ permet de poser

$$t = \frac{-1}{m^2}, \qquad \theta = \frac{-1}{m^3};$$

l'équation de la droite considérée devient ainsi

$$-\xi m - \frac{\eta}{m} = \frac{a+b}{2}\left(\frac{1}{m^2} - m^2\right),$$

ou, en posant
$$m = e^{i\varphi},$$

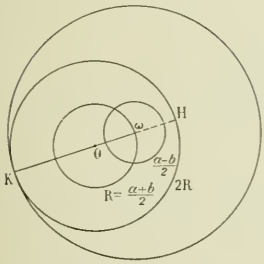
$$-\xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi} = \frac{a+b}{2}\left(e^{-2i\varphi} - e^{+2i\varphi}\right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = a+b,$$

équation d'après laquelle l'enveloppe est celle des droites qui joignent les projections sur les axes d'un point du cercle de centre O et de rayon $a+b$. C'est *une hypocycloïde à quatre rebroussements, projection d'une développée d'ellipse.*

5° *Base et roulette.* — Le point K est le point de concours des normales à l'hypocycloïde de grandeur constante aux points où celle-ci touche son enveloppe. Ce point K est donc le centre instantané de rotation de la figure.



Il décrit dans la figure fixe, ainsi que nous l'avons vu, le cercle de centre O et de rayon $(a+b)$. Puisque ω est le milieu de OH et que O est le milieu de HK, on a

$$\omega K = 3\omega O = 3\,\frac{a+b}{2}.$$

Donc dans la figure mobile le lieu du point K est un cercle de centre ω et de rayon $3\,\frac{a+b}{2}$.

Posons $\frac{a+b}{2} = R$. Il résulte de là que la base étant le cercle de rayon 2R, la roulette est un cercle de rayon 3R qui reste constamment tangent intérieurement au précédent.

L'épicycloïde ainsi définie peut être représentée par les coordonnées d'un de ses points sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} x = R(3\cos t - \cos 3t), \\ y = R(3\sin t - \sin 3t), \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \xi = R(3t - t^3), \\ \eta = R\,\dfrac{3 - t^2}{t^3}. \end{array}\right.$$

ou par l'équation de ses tangentes

$$\xi - \eta t^2 = 4R(l - t^3).$$

Ces équations montrent que la courbe est du sixième ordre et de la quatrième classe.

L'équation de la tangente peut encore se mettre, après une rotation d'axes, sous la forme suivante :

$$x \cos \omega + y \sin \omega = 2(a + b) \cos \frac{\omega}{2}.$$

C'est l'enveloppe des droites qui joignent sur un cercle les points d'arguments φ', φ'' satisfaisant à la relation

$$\varphi'' = 3\varphi'.$$

Remarque. — Sur les hypocycloïdes semblables et concentriques aux proposées.

Soit $\mathcal{H}_0 = f(u, v, w, \xi_0, \eta_0, \lambda, \mu) = 0$ l'équation tangentielle de l'une des hypocycloïdes de la question. Faisons-la tourner autour de son centre et prenons ensuite l'homothétique de la nouvelle courbe obtenue par rapport à ce centre dans un rapport quelconque. La courbe obtenue ainsi sera une nouvelle hypocycloïde à trois rebroussements, semblable à la première et « orientée » par rapport à celle-ci. Pour en obtenir l'équation, il suffira de remplacer l'angle φ_0 par un autre angle φ'_0 et le module R par un autre module R′, tels que

$$\varphi'_0 = \varphi_0 + \theta, \qquad R' = mR,$$

m étant le rapport de similitude et θ définissant l'orientation relative des deux courbes.

λ et μ se trouveront donc remplacés par deux paramètres λ' et μ' tels que

$$\lambda' = R'e^{i\varphi'_0} = mRe^{i(\varphi_0+\theta)} = me^{i\theta}\lambda,$$

$$\mu' = R'e^{-i\varphi'_0} = mRe^{-i(\varphi_0+\theta)} = me^{-i\theta}\mu;$$

posons

$$H = \frac{1}{m} e^{-i\theta}, \qquad K = \frac{1}{m} e^{i\theta},$$

l'équation de la nouvelle courbe devient

$$f(u, v, w, \xi_0, \eta_0, H\lambda, K\mu) = 0.$$

Nous allons étudier cette nouvelle courbe, et à cet effet, expliciter l'équation $f = 0$.

Les équations

$$\frac{u}{t} = \frac{v}{t^2} = \frac{-w}{\lambda t^3 + \eta_0 t^2 + \xi_0 t + \mu}$$

donnent par élimination de t l'équation $f = 0$ sous la forme

$$\mu u^3 + \lambda v^3 + uv(\xi_0 u + \eta_0 v + w) = 0.$$

L'équation de la nouvelle hypocycloïde, que nous désignerons par $\mathcal{H}'$ sera donc, d'après ce qui précède,

$$\mathcal{H}' = K\mu u^3 + H\lambda v^3 + uv(\xi_0 u + \eta_0 v + w) = 0.$$

Remplaçons dans cette équation λ, μ, ξ_0, η_0 par les valeurs précédemment trouvées

$$\left| \begin{array}{l} \xi_0 = p\theta, \\ \eta_0 = \dfrac{p}{\theta}, \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{q}{\theta}, \\ \mu = q\theta, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} p = \dfrac{a+b}{2}, \\ q = \dfrac{a-b}{2}; \end{array} \right.$$

l'équation $\mathcal{H}' = 0$ devient, en ordonnant par rapport à θ,

$$(Kqu + pv)u^2\theta^2 + uvw\theta + (pu + Hqv)v^2 = 0.$$

On en déduit immédiatement l'équation de l'enveloppe de la courbe $\mathcal{H}'$ après suppression du facteur $u^2v^2 = 0$, qui représente deux fois les points cycliques.

L'équation de cette enveloppe est

$$4(pu + Hqv)(Kqu + pv) = w^2,$$

équation d'une conique. Donc *la courbe $\mathcal{H}'$ reste, comme la courbe $\mathcal{H}$ trois fois tangente à une conique fixe.*

On trouve par un calcul facile que l'équation de cette conique est, en coordonnées cartésiennes,

$$(S) \qquad \frac{\left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}{a'^2} + \frac{\left(x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2}\right)^2}{b'^2} = 1$$

avec

$$a'^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(3a+b)(a-b)}{4m^2}, \qquad b'^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+3b)(a-b)}{4m^2}.$$

On en déduit que la conique enveloppe est concentrique à la proposée. Ses axes font avec les axes de la

proposée l'angle $\frac{\theta}{2}$; la longueur de ses axes ne dépend que du rapport de similitude m des deux hypocycloïdes.

Entre les axes a'^2 et b'^2 existe d'ailleurs une relation indépendante de θ et de m. On l'obtient facilement en éliminant m^2 entre les deux dernières relations, et on peut la mettre sous la forme

$$(a+3b)(a'^2-a^2)+(b+3a)(b'^2-b^2)=0.$$

Si la grandeur de l'hypocycloïde $\mathcal{H}'$ ne varie pas, la conique S reste de grandeur constante et tourne autour de son centre pendant que $\mathcal{H}'$ tourne autour du sien dans la figure mobile.

Si au contraire c'est l'orientation de $\mathcal{H}'$ qui reste invariable, celle des axes de la conique S reste également invariable, et nous allons voir que toutes ces coniques S restent inscrites à quatre droites qui forment un losange.

En effet, prenons leurs axes pour axes de coordonnées. Leur équation tangentielle sera

$$a'^2u^2+b'^2v^2=w^2$$

ou, en posant

$$\lambda=\frac{a-b}{4m^2},$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(u^2+v^2)-w^2+\lambda[(3a+b)u^2-(a+3b)v^2]=0,$$

équation des coniques d'un faisceau tangentiel. L'une de ces coniques (pour $\lambda=0$) est le cercle

$$x^2+y^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

une autre (pour λ infini) est

$$(3a+b)u^2-(a+3b)v^2=0,$$

équation d'un système de deux points à l'infini.

Les droites qui coupent l'hypocycloïde $\mathcal{H}_0$ sous un angle donné V enveloppent une hypocycloïde $\mathcal{H}_V$ semblable et concentrique. Tout ce que nous venons de dire s'applique donc à ces hypocycloïdes $\mathcal{H}_V$, et en particulier à la développée, dont les caractéristiques sont $\theta=\pi$, $m=3$.

D'une façon générale, les caractéristiques des hypocycloïdes $\mathcal{H}_V$ sont données par

$$m^2=\cos^2 V+9\sin^2 V,\qquad \operatorname{tg}(\theta+3V)=3\operatorname{tg} V.$$

Nous ne donnerons pas le détail du calcul facile qui amène à ces équations. Elles permettraient d'étudier les variations de la conique S en fonction de celles de l'hypocycloïde $\mathcal{H}_V$.

Note. — Nous énoncerons, sans les démontrer, les propriétés suivantes de la figure :

L'hypocycloïde $\mathcal{H}_0$ considérée coupe l'ellipse donnée en huit points dont six sont confondus deux à deux ; les deux derniers sont distincts ; *les valeurs de t sont constantes* et données par l'équation

$$(a+b)t^2+2(a-b)t+(a+b)=0,$$

la droite qui les joint enveloppe une courbe de la quatrième classe. Son équation peut être mise sous la forme

$$bx\cos\varphi+ay\sin\varphi-ab=\frac{c^2}{8}\cos 2\varphi-2ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

Cette courbe est homographique à une courbe parallèle à une développée d'ellipse.

En chacun des deux points considérés, la tangente à l'hypocycloïde est parallèle à une droite fixe. Les deux directions ainsi définies sont données par

$$\frac{x}{\sqrt{a}}\pm\frac{y}{\sqrt{b}}=0.$$

D'une façon générale, *le lieu des points d'une quelconque des hypocycloïdes $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}_V$ où la tangente est parallèle à une direction donnée est une conique concentrique à la proposée.*

La démonstration de ce qui précède se déduit sans difficulté des équations que nous avons obtenues.

L. BICKART.

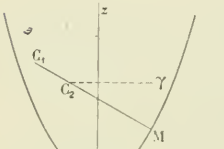
1687. — *Soit le paraboloïde* P $\quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$

1° *On prend sur lui un point* M *variable sur la parabole principale du plan des zx. Trouver les centres de courbure principaux en* M. *Trouver leurs lieux et déterminer les points communs à ces deux courbes ; on en discutera la réalité.*

2° *L'une de ces deux courbes du plan des zx est une parabole. On vérifiera qu'elle est la polaire réciproque de la parabole principale du paraboloïde* P *par rapport à sa parabole focale.*

3° *On prend sur le paraboloïde* P *un point* M *quelconque. Calculer les rayons de courbure principaux en ce point. Démontrer que les centres de courbure principaux sont les pôles du plan tangent en* M *au paraboloïde* P *par rapport aux deux paraboloïdes qui lui sont homofocaux et qui passent en* M.

1. L'une des sections normales principales en M est la parabole du plan des zx. Le centre de courbure correspondant est le centre de courbure C_1 de cette parabole.



L'autre section principale est celle parallèle à oy et passant par la normale MC_1. Pour avoir le centre de courbure en M à cette section, appliquons le théorème de Meusnier. Prenons une section passant par la tangente en M qui est parallèle à oy ; la plus simple est celle qui est parallèle au plan yoz. Cette section est une parabole égale à la parabole du plan des yz, n'en différant que par translation. Donc le centre de courbure est en γ tel que $M\gamma = q$. Le point C_2 de MC_1, dont la projection sur $M\gamma$ est en γ, est le second centre de courbure principal en M.

Cherchons les lieux des points C_1 et C_2. Le point C_1 décrit la développée de la parabole $x^2 - 2pz = 0$. Soient (x, z) les coordonnées de M. La normale en M s'écrit

$$(X - x)p + (Z - z)x = 0$$

ou, en remplaçant z par $\frac{x^2}{2p}$,

$$p(X - x) + x\left(Z - \frac{x^2}{2p}\right) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad x^3 - 2px(Z - p) - 2p^2X = 0.$$

La développée est donc

$$(1) \qquad 27pX^2 = 8(Z - p)^3.$$

Les coordonnées du point C_2 sont

$$Z = z + q, \qquad X = x\frac{p - q}{p}.$$

Son lieu est donc, en portant x et z dans la relation $x^2 - 2pz = 0$.

$$(2) \qquad pX^2 = 2(p - q)^2(Z - q).$$

Remarquons, ce qui est évident géométriquement, que si le paraboloïde est de révolution, c'est-à-dire si $p = q$, le lieu du point C_2 est l'axe de révolution.

Cherchons les points communs aux courbes (1) et (2). Il y en a 6. Ils sont deux à deux symétriques par rapport à oz. Cherchons leurs z qui sont racines de l'équation

$$\frac{8(Z - p)^3}{27} = 2(p - q)^2(Z - q) \qquad \text{ou} \qquad 4(Z - p)^3 - 27(p - q)^2(Z - q) = 0.$$

Nous allons discuter les solutions. Nous avons supposé le paraboloïde elliptique, donc p et q positifs. Toute racine de l'équation en z donnera deux points réels si elle est supérieure à p, deux points imaginaires si elle lui est inférieure.

Posons $Z = p + u$. L'équation deviendra

$$u^3 - \frac{27}{4}(p - q)^2u - \frac{27}{4}(p - q)^3 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est nul. Elle a donc une racine double qu'on obtient en la considérant comme racine de la dérivée prise par rapport à la variable d'homogénéité. Elle est donc

$$u = -\frac{3}{2}(p - q).$$

Comme la somme des trois racines en u est nulle, la racine simple est $3(p - q)$.

Les deux courbes sont donc tangentes en deux points et se coupent en deux autres points. Si $p > q$, ce sont les points à tangentes différentes qui sont réels ; si $p < q$ ce sont les points de contact.

Une remarque intéressante est que les points C_1 et C_2 peuvent être confondus soit en appartenant à la même normale — alors le point M est un ombilic — soit en appartenant à deux normales différentes. On pourrait facilement, en se plaçant à ce point de vue, rechercher de quelle sorte sont les points d'intersection que nous avons obtenus.

2. Cherchons d'abord l'équation générale des paraboloïdes homofocaux au paraboloïde donné. L'équation tangentielle de ce paraboloïde est

$$pu^2 + qv^2 - 2wr = 0.$$

L'équation cherchée est donc, en coordonnées tangentielles,

$$(p+\lambda)u^2 + (q+\lambda)v^2 + \lambda w^2 - 2wr = 0.$$

La focale du plan des zx s'obtient en faisant $\lambda = -q$. On obtient ainsi

$$(p-q)u^2 - qw^2 - 2wr = 0.$$

Il s'agit de vérifier que par rapport à cette conique directrice, les deux paraboles $x^2 - 2pz = 0$ et $px^2 = 2(p-q)^2(z-q)$ sont polaires réciproques.

Pour cela, partons d'une tangente $x = mz + \dfrac{p}{2m}$ à la première parabole. Son pôle par rapport à la parabole directrice est, en coordonnées homogènes,

$$-(p-q), \qquad -qm - \frac{p}{2m}, \qquad -m,$$

donc c'est le point $\left(x = \dfrac{p-q}{m},\ z = q + \dfrac{p}{2m^2}\right)$, dont le lieu est

$$\frac{x^2}{(p-q)^2} = \frac{2(z-q)}{p}.$$

La vérification est faite.

3. Les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde s'obtiennent par la méthode classique. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à une section normale du paraboloïde, α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale qui sont ceux de la normale et sont par suite proportionnels à $\dfrac{x}{p}$, $\dfrac{y}{q}$, -1. On a

$$\gamma = \alpha\frac{x}{p} + \beta\frac{y}{q},$$

ou, en différentiant,

$$d\gamma = \frac{x}{p}\,d\alpha + \frac{y}{q}\,d\beta + \frac{\alpha dx}{p} + \frac{\beta dy}{q}.$$

Appelons ds et $d\sigma$ les différentielles des arcs de la courbe et de son indicatrice sphérique. On aura

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} - \frac{x}{p}\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{y}{q}\frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma}\left[\frac{\alpha}{p}\frac{dx}{ds} + \frac{\beta}{q}\frac{dy}{ds}\right]$$

ou bien

$$\gamma' - \frac{x}{p}\alpha' - \frac{y}{q}\beta' = R\left[\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}\right].$$

Or

$$\frac{\alpha'}{-\dfrac{x}{p}} = \frac{\beta'}{-\dfrac{y}{q}} = \frac{\gamma'}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}}}.$$

Donc, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}}}{R} = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} = \frac{\dfrac{\alpha^2}{p} + \dfrac{\beta^2}{q}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{\dfrac{\alpha^2}{p} + \dfrac{\beta^2}{q}}{\alpha^2 + \beta^2 + \left(\dfrac{\alpha x}{p} + \dfrac{\beta y}{q}\right)^2}.$$

L'étude de la variation du rayon de courbure pour une section normale variable est donc ramenée

à la variation de la fraction rationnelle dont les termes sont du second degré, par rapport à la variable $\frac{\beta}{\alpha} = m$.

Posons
$$\frac{R}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q}}} = \mu.$$

Nous aurons à chercher le maximum et le minimum de

$$\mu = \frac{1 + m^2 + \left(\frac{x}{p} + m\frac{y}{q}\right)^2}{\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}}.$$

Ecrivons pour cela que l'équation du second degré

$$m^2\left(1 + \frac{y^2}{q^2} - \frac{\mu}{q}\right) + 2m\frac{xy}{pq} + 1 + \frac{x^2}{p^2} - \frac{\mu}{p} = 0$$

a une racine double. Nous obtenons

$$\frac{x^2y^2}{p^2q^2} - \left(\frac{x^2}{p^2} + 1 - \frac{\mu}{p}\right)\left(\frac{y^2}{q^2} + 1 - \frac{\mu}{q}\right) = 0$$

ou bien, après développement, en tenant compte de la relation $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$,

$$(3) \qquad \mu^2 - \mu(2z + p + q) + \frac{qx^2}{p} + \frac{py^2}{q} + pq = 0.$$

Les rayons de courbure principaux sont donc obtenus.

Occupons-nous maintenant des pôles du plan tangent en M par rapport aux paraboloïdes homofocaux au paraboloïde donné et passant en M.

L'équation ponctuelle des paraboloïdes

$$(p + \lambda)u^2 + (q + \lambda)v^2 + \lambda w^2 - 2wr = 0$$

s'obtient de suite par les relations

$$\frac{x}{(p + \lambda)u} = \frac{y}{(q + \lambda)v} = \frac{z}{\lambda w - r} = \frac{1}{-w} = \frac{z + \lambda}{-r}.$$

Elle est

$$(4) \qquad \frac{x^2}{p + \lambda} + \frac{y^2}{q + \lambda} - 2z - \lambda = 0.$$

Par un point du plan, il passe trois de ces paraboloïdes. Par le point M, il en passe deux en dehors du paraboloïde proposé. Le plan tangent en M à ce dernier paraboloïde a pour équation

$$\frac{Xx}{p} + \frac{Yy}{q} - Z - z = 0.$$

Le pôle de ce plan par rapport aux deux premiers paraboloïdes est donné par les équations

$$\frac{X}{(p + \lambda)\frac{x}{p}} = \frac{Y}{(q + \lambda)\frac{y}{q}} = \frac{Z}{-\lambda + z} = 1,$$

d'où on tire

$$\frac{X - x}{\frac{x}{p}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{q}} = \frac{Z - z}{-1} = \lambda,$$

λ étant l'une ou l'autre des racines non nulles de l'équation (4). Nous vérifions ainsi que ces pôles sont sur la normale en M au paraboloïde proposé, à une distance d comptée avec son signe sur la demi-

normale $\frac{x}{p}$, $\frac{y}{q}$, -1 et donnée par

$$\lambda = \frac{d}{+\sqrt{\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+1}}.$$

Le calcul se trouve ainsi ramené puisque nous avons trouvé

$$\mu = \frac{R}{+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}},$$

R étant compté positivement sur la demi-normale $-\frac{x}{p}$, $-\frac{y}{q}$, $+1$, à vérifier que les équations (3) et (4) en μ et λ ont leurs racines égales et de signes contraires, ce qui est presque immédiat.

Bonnes solutions : MM. L. Sire, à Lyon ; Bros, à Albi ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; H. Janois, à Nantes.

QUESTIONS PROPOSÉES

1766. — On donne la fonction $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Déterminer $\frac{d^n y}{dx^n}$ et se servir de la formule obtenue pour démontrer l'égalité

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

W. Mérigot, à Paris.

1767. On considère un cercle, deux diamètres rectangulaires fixes de ce cercle et, sur chacun d'eux, un point, A et B.

1° Trouver l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes au cercle issues des points A et B, le lieu de leurs centres et le lieu des points du plan où se coupent deux coniques orthogonales en ce point.

2° Dans le faisceau ainsi formé il y a une parabole. Enveloppe de l'axe, de la tangente au sommet et lieu du sommet quand le point B varie sur le diamètre fixe qui le porte.

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur ces paraboles et le lieu du centre du cercle passant aux pieds de ces normales.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

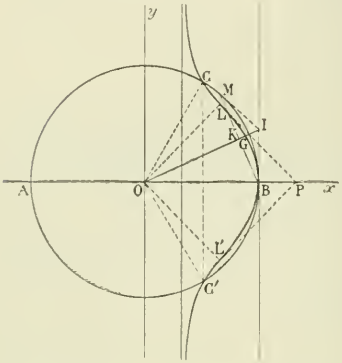
1685. — *Soit une circonférence de diamètre* AB = 2R *et la tangente en* B ; *par un point mobile sur la circonférence,* M, *on mène la tangente qui rencontre la première tangente en* I.

1° *Construire le lieu du centre de gravité du triangle* MIB.

2° *Démontrer que les droites qui joignent* O *aux points d'inflexion de la courbe forment un carré avec les tangentes en ces points.*

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe et le cercle et démontrer que l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote est égale au* $\frac{1}{3}$ *de celle du cercle.*

1° En posant $\widehat{xOI} = \omega$, et en désignant par G le centre de gravité du triangle MIB, on voit de suite que



$$\rho = OG = OK + KG = OK + \frac{KI}{3};$$

d'autre part,

$$OK = R\cos\omega, \qquad KI = OI - OK,$$

$$KI = \frac{R}{\cos\omega} - R\cos\omega;$$

donc

$$(1) \qquad \rho = \frac{R}{3}\,\frac{1 + 2\cos^2\omega}{\cos\omega}.$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires.

En coordonnées cartésiennes, ce lieu a pour équation

$$(2) \qquad 3x(x^2 + y^2) - R(3x^2 + y^2) = 0.$$

On voit donc que ce lieu est une cubique circulaire, symétrique par rapport à Ox, ayant un point double isolé à l'origine, et une asymptote parallèle à Oy ; celle-ci a pour équation $x = \frac{R}{3}$.

D'ailleurs, on a

$$y^2 = \frac{3x^2(x - R)}{R - 3x},$$

et ceci montre que x doit être compris entre $\frac{R}{3}$ et R. La forme de la courbe est dès lors évidente.

Pour achever de la placer par rapport au cercle, étudions les variations de ρ. Nous avons successivement

$$\rho = \frac{R}{3}\left(2\cos\omega + \frac{1}{\cos\omega}\right),$$

$$\rho' = \frac{R}{3}\left(-2\sin\omega + \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega}\right), \qquad \rho' = \frac{R\sin\omega(1 - 2\cos^2\omega)}{3\cos^2\omega}$$

En se bornant à étudier la portion de la courbe qui est au-dessus de Ox, c'est-à-dire en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on voit que ρ décroît depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{4}$ et ensuite que ρ croît. Le point G est donc d'abord intérieur au cercle, puis extérieur. Il est le plus près du point O pour $\omega = \frac{\pi}{4}$. Alors $\rho = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. La courbe rencontre le cercle pour $\rho = R$, c'est-à-dire

$$2\cos^2\omega - 3\cos\omega + 1 = 0,$$

ce qui donne la solution évidente $\cos\omega = 1$, puis $\cos\omega = \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{3}$.

2° Soit L le point le plus rapproché du point O, OL est la première bissectrice de l'angle des axes, la tangente en L est parallèle à la seconde bissectrice ; donc la figure formée par OL, la tangente en L et les éléments symétriques par rapport à Ox est un carré. Il nous suffit donc de montrer justement que les points d'inflexion sont L et L'.

Or la tangente en L a pour équation

$$\rho \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2R\sqrt{2}}{3};$$

en la coupant par la courbe proposée, on a

$$\frac{2\cos^2\omega + 1}{\cos\omega}(\cos\omega + \sin\omega) - 4 = 0,$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\omega = t$,

$$(t-1)^3 = 0.$$

Cette droite coupe donc la courbe en trois points confondus avec L, ce qui prouve que ce point est un point d'inflexion.

3° L'aire comprise entre la courbe et le cercle est égale à

$$-\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\rho^2 - R^2)\,d\omega;$$

celle qui est comprise entre la courbe et l'asymptote est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^2 - \frac{R^2}{9\cos^2\omega}\right) d\omega.$$

Calculons d'abord la seconde ; nous avons

$$\rho^2 - \frac{R^2}{9\cos^2\omega} = \frac{4R^2}{9}(\cos^2\omega + 1) = \frac{2R^2}{9}(3 + \cos 2\omega);$$

l'intégrale indéfinie est

$$\frac{2R^2}{9}\left(3\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right)$$

et, en prenant pour limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, nous obtenons

$$\frac{2R^2}{9} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{3},$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

La première intégrale est

$$\frac{R^2}{9}\int \frac{(2\cos^2\omega + 1)^2 - 9\cos^2\omega}{\cos^2\omega}\,d\omega, \qquad \text{ou} \qquad \frac{R^2}{9}\int (4\cos^2\omega - 5)\,d\omega + \frac{R^2}{9}\int \frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

ou

$$\frac{R^2}{9}\int (2\cos 2\omega - 3)\,d\omega + \frac{R^2}{9}\operatorname{tg}\omega,$$

finalement

$$\frac{R^2}{9}(\sin 2\omega - 3\omega) + \frac{R^2}{9}\operatorname{tg}\omega.$$

En prenant les limites 0, $\frac{\pi}{3}$, nous avons de suite

$$\frac{R^2}{9}\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\right).$$

En valeur absolue, cette aire est donc

$$\frac{R^2}{9}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; Ch. Guillerme ; Rebouillat, à Villersexel ; Bros ; L. Simon, à Châlons ; G. Foucay, à Roanne ; H. Janois, à Nantes ; H. Moussin, à Saint-Etienne ; G. Lach, à Denain ; Mozziconacci, à Nemours ; Bouillon, à Auch ; G. Dinay.

PHYSIQUE

1678. — *Un calorimètre de capacité calorifique négligeable contient une dissolution de* $m = 175$ *grammes de sel marin dans* $M = 500$ *grammes d'eau, dont la température initiale est* $t = 15°$. *On y dirige de la vapeur d'eau bouillante à* $T = 100°$ *et sous la pression normale, et on suppose le calorimètre soustrait à toute autre cause d'échange de chaleur avec le milieu ambiant.*

Expliquer d'abord sans calculs comment variera la température dans le calorimètre en supposant qu'on puisse prolonger l'expérience aussi longtemps qu'on le voudra.

Calculer ensuite la température maximum θ *qu'il sera possible d'obtenir et le poids* a *de vapeur d'eau qu'on aura alors employé.*

On admettra que la capacité calorifique de l'eau salée est la somme de la capacité calorifique de l'eau pure et de la capacité calorifique du sel dont la chaleur spécifique est $\gamma = 0{,}22$.

On prendra pour chaleur de condensation de la vapeur d'eau $\lambda = 537$.

On supposera la variation du point d'ébullition de l'eau salée proportionnelle à la variation de la proportion de sel, et de $0°{,}2$ *par gramme dissous dans* 100 *gr. d'eau.*

La condensation de la vapeur dans l'eau salée produit une élévation de température. En même temps la dilution de la dissolution détermine un abaissement du point d'ébullition. Il arrivera ainsi un moment où la température sera égale au point d'ébullition correspondant à la concentration alors réalisée ; ce sera la température maximum θ, nécessairement supérieure à $100°$.

La vapeur continuant d'arriver, elle ne peut plus se condenser toute entière, car la température deviendrait alors supérieure au point d'ébullition, ce qui n'est pas possible. Elle ne peut pas non plus traverser toute entière le liquide sans se condenser mais en passant de $100°$ à θ, car il en résulterait un abaissement de température sans changement de concentration, la température redeviendrait ainsi inférieure au point d'ébullition ce qui est incompatible avec la non-condensation. Donc la vapeur se condense partiellement, en petite quantité, la dilution augmentant et la température s'abaissant lentement de telle sorte qu'à chaque instant la vapeur non condensée soit en équilibre avec le liquide. Par exemple, au début de cette phase, la fraction x condensée est telle que la quantité de chaleur $537x$ porte de 100 à θ x d'eau et $1 - x$ de vapeur ; on trouve $x = \frac{1}{178}$. Puis la fraction condensée ira en diminuant, à mesure que la température se rapprochera indéfiniment de $100°$.

Ceci dit, calculons θ.

La capacité calorifique du sel marin est $175 \times 0{,}22 = 38{,}5$. et celle du mélange initial $500 + 38{,}5 = 538{,}5$.

Ecrivons que la chaleur de condensation du poids a de vapeur, diminuée de la chaleur nécessaire pour élever l'eau condensée de 100 à θ a porté de 15 à θ le mélange primitif :

$$537\,a - (\theta - 100)a = 538{,}5\,(\theta - 15),$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{8077{,}5 + 637\,a}{538{,}5 + a}.$$

D'autre part, après l'addition de a grammes d'eau, le point d'ébullition du mélange est devenu

$$100 + \frac{0{,}2 \times 100 \times 175}{500 + a} = 100 + \frac{3500}{500 + a}.$$

Égalons cette expression à θ et nous trouverons, pour déterminer a, l'équation du second degré

$$537\,a^2 + 219227{,}5\,a - 24771000 = 0.$$

La racine négative est à rejeter ; la racine positive est

$$a = 92,1.$$

On en déduit, à l'aide de la seconde expression de θ,

$$\theta = 100 + \frac{3500}{592,1} = 105^\circ,91.$$

P. BRIZARD.

ECOLE CENTRALE (1908)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

4549. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical de manière à l'amener dans un plan donné.

4550. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical, jusqu'à ce qu'il soit à une distance donnée d'un plan donné.

4551. — Sur une horizontale d'un plan, on prend un segment *ab* qui est le côté d'un triangle équilatéral situé dans le plan ; déterminer le troisième sommet.

4552. — On donne un plan par son échelle de pente ; deux points en dehors du plan sont deux sommets d'un triangle équilatéral ; trouver le troisième sommet de ce triangle, sachant qu'il est situé dans le plan donné.

4553. — On demande de construire un carré situé dans un plan donné, connaissant le centre du carré, ainsi que la longueur et la pente de l'une des diagonales.

4554. — On donne dans un plan le centre d'un triangle équilatéral et la longueur du côté ; ce triangle a de plus un côté horizontal. Construire le tétraèdre régulier qui a ce triangle comme base.

4555. — Construire un tétraèdre régulier dont la base est située dans un plan donné par sa ligne de pente, et dont un côté est le segment *ab* d'une horizontale du plan.

4556. — Projections d'une pyramide quadrangulaire convexe. — Trouver un plan coupant cette pyramide suivant un parallélogramme.

4557. — Représenter un cube suspendu par sa diagonale verticale et ayant quatre arêtes latérales parallèles au plan vertical.

4558. — On donne les projections d'une arête d'un cube et la direction de la projection horizontale d'une arête contigue ; déterminer les projections du cube.

4559. — On donne les projections d'une arête d'un parallélépipède rectangle, la projection horizontale d'une arête contiguë et la longueur de la troisième arête. — Construire le parallélépipède.

4560. — A, B, C étant les traces horizontales d'un trièdre trirectangle, déterminer le sommet.

4561. — On donne un trièdre SABC ; mener par un point M de l'une des arêtes un plan coupant le trièdre suivant un triangle de périmètre minimum.

4562. — Par un point d'une arête d'une pyramide triangulaire faire passer un plan coupant la pyramide suivant un triangle isocèle. — Trouver sur la pyramide le plus court chemin d'un point à un autre.

4563. — Etant donnée une face d'un dodécaèdre régulier dans le plan horizontal, trouver les projections de ce dodécaèdre.

4564. — Ombre d'un triangle horizontal sur une pyramide triangulaire reposant sur le plan horizontal.

4565. — Un point d'un plan est le centre d'un cercle de rayon donné ; déterminer les axes de chaque projection de ce cercle. Mener à la courbe une tangente de profil.

4566. — Réduire un angle à l'horizon.

4567. — Angle de deux plans donnés par leurs échelles de pente.

4568. — Connaissant les traces horizontales de deux droites, leurs projections horizontales et leur angle, trouver les projections verticales.

4569. — Mener par un point d'un plan une droite de pente donnée.

4570. — Mener par un point donné un plan également incliné sur les plans de projection.

4571. — Mener par un point donné un plan faisant le même angle avec les deux plans de projection et dont les traces fassent entre elles (dans l'espace) un angle donné.

4572. — Inscrire entre les traces d'un plan une droite de longueur donnée faisant avec le plan horizontal un angle donné.

4573. — Trouver une droite d'un plan qui fasse avec le plan vertical un angle donné et dont la distance des traces soit donnée.

4574. — Mener par un point un plan qui coupe les trois faces d'un trièdre sous le même angle.

4575. — On donne trois droites et on demande de trouver un plan faisant avec ces trois droites des angles égaux.

4576. — Mener par un point une droite faisant avec le plan horizontal un angle donné et telle que la cote de sa trace verticale soit égale à deux fois l'éloignement de sa trace horizontale.

4577. — On donne la trace horizontale d'un plan et l'angle qu'il fait avec xy : trouver la trace verticale.

4578. — Trouver sur une droite donnée les points tels que la somme du carré de la cote et du carré de l'éloignement soit égale à k^2.

4579. — Déterminer dans un plan donné par ses traces, le lieu des points tels que la somme des carrés de la cote et de l'éloignement soit égale a k^2.

4580. — Mener une droite rencontrant deux droites données et faisant avec elles deux angles donnés.

4581. — Trouver dans un plan les droites faisant avec xy un angle donné.

4582. — Mener une droite dans un plan faisant avec le plan vertical un angle donné et à une distance donnée de xy.

4583. — Déterminer une droite passant par un point donné, à une distance a d'une droite donnée et à une distance b d'un point donné.

4584. — On donne un plan par ses traces et deux verticales. — On demande de trouver une droite du plan qui soit à une distance α de la première et à une distance β de la seconde.

4585. — Déterminer une droite passant à des distances données de deux droites données et parallèle à un plan donné.

4586. — Mener par un point des plans faisant l'angle α avec un plan de bout et l'angle β avec le plan horizontal.

4587. — Trouver sur le plan vertical des points à une distance α d'un point A et à une distance β d'un autre point B.

4588 — Contours apparents d'un cône ayant pour directrice un cercle dans un plan de bout.

4589. — Contours apparents d'un cône de sommet donné ayant comme base un cercle situé dans un plan parallèle à xy.

4590. — Contours apparents d'un cône ayant pour sommet un des sommets d'un tétraèdre régulier et pour directrice la circonférence inscrite dans la face opposée.

4591. — Contours apparents d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée et qui a pour directrice un cercle situé dans un plan donné par son échelle de pente.

4592. — On donne dans le plan de deux droites parallèles un cercle par son centre et son rayon. — Contours apparents du cylindre ayant ce cercle pour directrice et ses génératrices parallèles à une direction donnée.

4593. — Contours apparents d'un cône de révolution de sommet s, s', dont l'axe est perpendiculaire à un plan parallele a la ligne de terre et dont on donne en outre une génératrice.

4594. — Contours apparents d'un cône de révolution, tangent aux deux plans de projection, connaissant la génératrice de contact avec le plan horizontal.

4595. — On donne deux cônes droits ayant comme bases deux cercles l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, et de hauteur égale au diamètre du cercle de base. Mener par un point donné une droite tangente aux deux cônes.

4596. — Mener un plan tangent parallèle à une direction donnée à un cône de révolution d'axe quelconque, dont on donne l'axe, le sommet ainsi que l'angle au sommet.

4597. — Plan tangent commun à une sphère et à un cône de révolution donné par son axe (quelconque), son sommet et son angle au sommet.

4598. — Mener par un point s, s' un plan faisant des angles donnés avec le plan $P\alpha P'$ et un plan vertical $Q\alpha Q'$. — Cas où le plan $P\alpha P'$ serait de bout.

4599. — Mener à un cône un plan tangent parallèle à un plan donné.

4600. — On donne un cercle dans le plan vertical, directrice d'un cylindre à génératrices horizontales ; puis un cercle dans le plan horizontal, directrice d'un autre cylindre dont on donne la projection horizontale des génératrices. Déterminer leur projection verticale de manière que les deux cylindres aient un plan tangent commun.

4601. — Construire un cylindre de révolution tangent au plan horizontal et à un autre cylindre de révolution donné.

4602. — On donne un cylindre de révolution d'axe quelconque et de rayon r. Placer sous ce cylindre un autre cylindre de révolution tangent au premier et au plan horizontal et dont les génératrices soient parallèles à une horizontale donnée.

4603. — Normales communes à deux cônes de sommets s, s, t, t' ayant pour bases deux cercles donnés dans un même plan de profil.

4604. — Normales communes à un cône et à un cylindre (ou à deux cylindres) dont les bases sont deux cercles donnés dans un même plan de bout ; dans un plan quelconque.

4605. — On donne dans un plan un point o, o', centre d'un cercle de rayon donné et situé dans le plan ; ce cercle est la directrice d'un cône de sommet s, s'. Ombres à 45° de ce cône.

4606. — Ombres d'un cône ayant son sommet sur xy et pour base un cercle donné dans un plan horizontal.

4607. — Dans un plan de bout, on trace un cercle, directrice d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan de bout — Ombres de ce cylindre quand il est éclairé par des rayons lumineux dont les projections font un angle de 45° avec la ligne de terre.

4608. — Ombres d'un cône de révolution dont la base est dans un plan de profil, éclairé par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée.

4609. — Ombre portée par une sphère sur le plan horizontal, le point lumineux s, s' étant dans le plan tangent horizontal supérieur à la sphère.

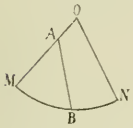
4610. — Mener par un point d'un plan de bout les tangentes à la section d'un cône quelconque par ce plan.

4611. — On considère un cube adossé aux deux plans de projection et la sphère inscrite. — Intersection du cube avec le cône de révolution ayant pour sommet S le point de contact de la sphère avec le plan horizontal, pour axe la droite SA joignant le point S à un sommet A de la face supérieure du cube, ce cône étant d'ailleurs tangent au plan horizontal.

4612. — Section d'un cône de révolution par un plan de bout. — Développement de la section. — Tangente en un point de la développée.

4613. — Points d'inflexion de la développée d'une courbe tracée sur un cylindre.

4614. — On enroule le secteur OMN de manière à former un cône de révolution à axe vertical. — On demande les projections du cône et celles de la courbe transformée de la droite AB.



4615. — Inscrire une circonférence dans un secteur circulaire. — On enroule ce secteur de façon à obtenir un cône ; on demande de représenter sur ce cône la transformée de la circonférence précédente.

4616. — On inscrit une ellipse dans un rectangle ; on enroule ce rectangle de façon à obtenir un cylindre de révolution à axe vertical. On demande les projections d'un point de la courbe transformée de l'ellipse et de la tangente en ce point.

4617. — On donne un axe vertical et un cercle de front tournant autour de cet axe ; connaissant la projection verticale d'un point de la surface, trouver l'autre projection et déterminer le plan tangent en ce point.

4618. — Etant donnée la projection verticale d'un point d'une surface de révolution à axe de front dont on donne une génératrice quelconque, trouver l'autre projection : plan tangent en ce point.

4619. — Déterminer la méridienne d'une surface de révolution à axe vertical engendrée par une ellipse située dans un plan de bout et se projetant suivant un cercle ; le pied de l'axe vertical se trouve au point du cercle le plus près du plan vertical.

4620. — Etant donnée une surface de révolution à axe vertical, trouver sur un parallèle donné, ou sur un méridien donné un point de la courbe de contact du cône circonscrit de sommet s, s' ; — ou du cylindre circonscrit parallèle à une direction donnée.

4621. — Mener par une droite donnée un plan tangent à un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

4622. — Section plane d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical. — Trouver le sommet du cône qui toucherait la surface tout le long de cette courbe plane.

4623. — On donne une sphère de centre o, o'. — Couper cette sphère par un plan tel que la section soit un cercle de rayon donné.

4624. — Faire passer par la ligne de terre un plan coupant une sphère suivant un cercle de rayon donné.

4625. — Intersection de la surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe horizontal, avec un plan donné par sa trace horizontale et faisant avec le plan horizontal un angle donné.

4626. — Points de rencontre d'une droite avec un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

4627. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

4628. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution ayant son axe de front.

4629. — Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical, dans le cas où la droite rencontre l'axe.

4630. — Intersection d'une droite et d'un tore à axe vertical.

4631. — Intersection de deux cylindres ayant comme directrices deux cercles dans le plan horizontal. — Points limites ; points à tangente horizontale ; points doubles en projection.

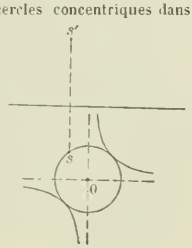
4632. — Intersection de deux cônes ayant pour bases dans le plan horizontal deux cercles concentriques et pour sommets deux points s,s', t,t' sur une même verticale.

4633. — Intersection de deux cônes ayant pour directrices deux cercles concentriques dans le plan horizontal et pour sommets les points s,s', t,t'. — Étudier la nature de la projection verticale de l'intersection.

4634. — Intersection de deux cônes ayant pour bases les deux cercles ci-dessus dans le plan horizontal et pour sommets les points s,s', t,t' dans un même plan horizontal.

4635. — On donne un cercle dans le plan horizontal. — Intersection de deux cônes ayant ce cercle pour base et dont les sommets sont les points s,s', t,t' projetés horizontalement aux extrémités du diamètre du cercle parallèle à xy.

4636. — Intersection de deux cylindres ayant même directrice dans un plan de front ; l'un a ses génératrices horizontales, l'autre a ses génératrices parallèles à une direction donnée.



4637. — Intersection de deux cônes ayant pour sommets les points s,s', t,t' et pour directrices deux cercles situés dans un même plan de bout.

4638. — Intersection du cône de révolution s,s' et du cylindre hyperbolique vertical, ayant pour directrice une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont à 45° sur xy.

4639. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'un cône ayant son sommet s,s' sur l'axe du cylindre et comme base l'hyperbole tracée dans le plan horizontal. — Forme de la projection verticale.

4640. — Intersection du cône ayant pour sommet s,s' et pour directrice le cercle O dans le plan horizontal avec le cylindre vertical ayant pour directrice l'hyperbole équilatère bitangente et concentrique au cercle.

4641. — On donne un cône de révolution à axe vertical ; dans la section principale du cône on inscrit une circonférence qui est la directrice d'un cylindre de bout. Intersection des deux surfaces.

4642. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution ayant son axe dans le même plan de front que celui du cylindre. — Étudier la projection verticale de l'intersection.

4643. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un cylindre de révolution à axe de front.

4644. — On donne un cylindre de révolution ayant son axe parallèle à xy et tangent au plan horizontal et un cône de révolution dont l'axe est horizontal et dont l'angle au sommet est donné. Intersection.

4645. — Contours apparents d'un cône de révolution tangent au plan horizontal et ayant comme axe une droite du plan vertical. — Intersection de ce cône avec un cylindre de révolution horizontal, tangent aussi au plan horizontal.

4646. — Intersection d'un cône de révolution et d'un cylindre ayant ses génératrices de front et faisant avec le plan horizontal le même angle que celles du cône.

4647. — Intersection d'un cylindre de révolution parallèle à xy et d'un cône de révolution à axe horizontal ayant son sommet sur le cylindre.

4648. — Intersection d'un cylindre circonscrit à une sphère et parallèle à xy avec un autre cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée et qui a pour directrice la section de la sphère par le plan déterminé par son centre et la ligne de terre.

4649. — Ombre d'un cercle situé dans un plan horizontal sur un cône de révolution à axe vertical, les rayons lumineux étant parallèles à une direction donnée.

4650. — Intersection de deux cylindres ayant leurs bases (circulaires) dans deux plans de bout.

4651. — On considère deux cônes ; l'un de sommet s, s' a pour directrice dans le plan de bout PzQ' une courbe projetée horizontalement suivant un cercle, l'autre de sommet t, t' a pour directrice dans le plan de bout PzR' une courbe projetée horizontalement suivant un autre cercle. — Intersection des deux cônes.

4652. — On donne un plan par sa trace P et son angle α avec le plan horizontal, et dans ce plan un cercle tangent à P ; on donne un second plan par sa trace Q et son angle β avec le plan horizontal, et dans ce plan une courbe qui se projette suivant un cercle. — Intersection de deux cylindres ayant ces deux courbes pour directrices et leurs génératrices parallèles à deux directions données.

4653. — On donne comme base d'un cône un cercle de centre o, o' dans le plan vertical, le sommet étant un point s, s' du plan horizontal dans le plan de profil du point o, o' ; un second cône a pour base un cercle de centre c, c' du plan horizontal et pour sommet un point t, t' du plan vertical, les points c, c', t, t' étant également dans le plan de profil du point o, o'. — Intersection de ces deux cônes.

4654. — On donne un plan R, R' parallèle à xy, et ab, $a'b'$ une droite de ce plan. On considère le cylindre ayant comme directrice dans le plan vertical un cercle O' tangent à R' au point a' et au-dessous de R' et ab, $a'b'$ comme génératrice; puis dans un plan de profil P, P', un cercle tangent au plan RR' ; ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à xy. — Intersection des deux cylindres.

4655. — Le tétraèdre SABC reposant par sa base sur le plan horizontal, intersection du cône ayant pour sommet B et pour directrice le cercle inscrit dans la face SAC, avec le cône ayant pour sommet C et pour directrice le cercle circonscrit à la face SAB.

4656. — Intersection d'un cône ayant pour sommet le sommet A d'un tétraèdre SABC et pour directrice la circonférence inscrite dans la face SBC avec un cylindre de révolution d'axe SC et de rayon r.

4657. — On donne un tétraèdre SABC reposant sur le plan du tableau par sa base ABC. — Intersection du cône de sommet A ayant comme directrice le cercle circonscrit à la face SBC avec le cylindre de révolution d'axe SC passant par A.

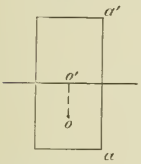
4658. — On considère un cube, adossé par deux de ses faces aux deux plans de projection, et deux cônes, l'un de sommet s, s' ayant pour directrice le cercle inscrit dans la face de gauche, l'autre de sommet t, t' ayant pour directrice le cercle inscrit dans la face opposée. — Intersection de ces deux cônes.

4659. — On considère un cube, adossé par deux de ses faces aux deux plans de projection, et deux cylindres, l'un a pour axe la droite joignant les centres des faces horizontales du cube et pour base la circonférence inscrite dans la face inférieure, l'autre a comme axe la droite joignant les centres des faces de profil et comme base le cercle circonscrit à l'une des faces de profil. — Intersection de ces deux cylindres.

4660. — On considère un cube adossé aux deux plans de projection ; le point s, s' situé sur l'une des arêtes supérieures du cube est le sommet d'un cône ayant pour directrice le cercle inscrit dans la face opposée ; un cylindre de génératrices parallèles à xy a pour directrice le cercle inscrit dans l'une des faces de profil. Intersection du cône et du cylindre.

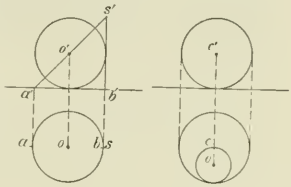
4661. — On donne un cube adossé aux deux plans de projection ; on considère un cône ayant son sommet sur la ligne de terre et comme base le cercle inscrit dans la face supérieure, d'autre part le cylindre ayant comme base le cercle inscrit dans une face de profil et ses génératrices parallèles à xy. — Intersection des deux surfaces.

4662. — On considère un cube adossé aux deux plans de projection et la sphère inscrite ; un cône de révolution a pour axe oa, $o'a'$ et est tangent au plan horizontal. — Intersection des deux surfaces.



4663. — Etant donné un cône de révolution par son axe et l'angle au sommet, déterminer : 1° ses contours apparents ; 2° son intersection avec une sphère donnée.

4664. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution ayant son axe dans le plan de front, passant par le centre de la sphère et dont l'une des génératrices de section par ce plan de front est tangente au contour apparent de la sphère.



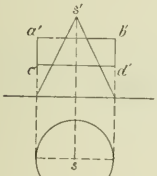
4665. — Intersection de la sphère o, o' avec le cône de sommet s, s' ayant pour directrice le contour apparent horizontal en projection de la sphère. — Vue de profil de l'intersection. Tangentes au point double.

4666. — Intersection de la sphère c, c' avec le cylindre vertical ayant comme directrice le cercle o dont le diamètre est égal au rayon de la sphère.

4667. — Ombre d'un cercle horizontal sur une sphère, les rayons lumineux venant de gauche à droite, de haut en bas et d'arrière en avant.

4668. — Ombre de l'écuelle (demi-sphère creuse).

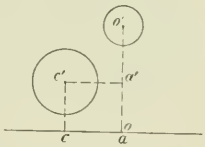
4669. — Ombres du cône de révolution de sommet s,s' et du cylindre de même axe compris entre deux plans horizontaux $a'b'$ et $c'd'$, le cylindre ayant même rayon que la trace du cône sur le plan horizontal.



4670. — Intersection de deux surfaces de révolution engendrées par la rotation de deux cercles autour de deux axes situés dans le plan horizontal et se coupant en o.

4671. — Intersection de deux tores engendrés l'un par le cercle c' tournant autour de la verticale oa, $o'a'$, l'autre par le cercle o' autour de l'horizontale ca, $c'a'$; les deux axes sont dans le même plan de front et $o'a = a'c'$.

4672. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre ayant pour base une ellipse donnée dans le plan d'équateur de la sphère.



4673. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône ayant son sommet sur l'axe du tore, la directrice étant la section du tore par le plan de profil qui passe par le centre du cercle méridien.

4674. — Mener à un hyperboloïde de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle : 1° à une droite donnée ; 2° à un plan donné.

4675. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical donné par une de ses génératrices principales avec une droite rencontrant cette génératrice.

4676. — Méthode de M. Rouché pour trouver l'intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution.

4677. — Couper un hyperboloïde de révolution par un plan tel que la section soit une ellipse et déterminer les sommets.

4678. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'une sphère.

4679. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et à axe vertical avec un cône ayant son sommet sur une génératrice de l'hyperboloïde et dont la base sur le plan horizontal contient la trace horizontale de cette génératrice.

4680. — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical donné par sa méridienne principale et la sphère inscrite suivant un parallèle donné. — Intersection de l'hyperboloïde avec un cylindre de front circonscrit à cette sphère.

4681. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe à axe vertical par sa méridienne principale ; on considère au-dessus du centre de l'hyperbole méridienne un cercle bitangent à cette hyperbole ayant son centre sur l'axe non transverse de l'hyperbole. Intersection de l'hyperboloïde avec la surface engendrée par ce cercle en tournant autour de l'axe transverse de l'hyperbole.

4682. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec une surface de révolution à axe de front donnée par une génératrice.

4683. — Trace horizontale de la surface engendrée par une droite horizontale s'appuyant sur deux droites données, de front. Trouver aussi la trace verticale.

4684. — Trace horizontale de la surface engendrée par une droite de profil s'appuyant sur deux droites de front.

4685. — Trace horizontale de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites données dont les projections horizontales sont parallèles et qui reste parallèle à un plan de profil.

4686. — Plan tangent en un point du paraboloïde hyperbolique.

4687. — Plan tangent à un paraboloïde hyperbolique par un point donné.

4688. — Plan tangent à un paraboloïde hyperbolique parallèle à une droite donnée.

4689. — Mener à un paraboloïde hyperbolique un plan tangent parallèle à un plan donné.

4690. — Section plane d'un paraboloïde hyperbolique.

4691. — Intersection d'un cône et d'un paraboloïde hyperbolique ayant une génératrice commune.

QUESTIONS PROPOSÉES

1768. — 1° On considère la fonction

$$y = f(x) = \frac{e^x - x}{xe^x}.$$

Calculer la dérivée n^e de cette fonction, donner sa valeur pour $x = 1$ et donner aussi le développement de $f(1 + x)$ en série.

2° Etudier les variations de la fonction y, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Montrer que de 0 à $+\infty$, l'équation $y = f(x)$ définit une fonction de y, $x = g(y)$, continue et décroissante. Trouver la dérivée et la fonction primitive de cette fonction et les exprimer à l'aide de y et de $g(y)$.

4° Même question pour l'intégrale

$$J = \int \sqrt{g(y)}^2\, dy.$$

E. H.

1769. — Le cadre d'une boussole d'inclinaison étant dans le méridien magnétique, on mesure l'inclinaison I pour laquelle on trouve $\sin I = \frac{3}{5}$. On fait osciller l'aiguille ; on trouve 10 oscillations par minute. On fait tourner le cadre d'un angle α tel que l'on ait $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. On demande la nouvelle inclinaison apparente et le nouveau nombre d'oscillations par minute.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 6. Mars 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES TRAJECTOIRES SOUS UN ANGLE CONSTANT DE CERTAINES FAMILLES DE COURBES

par M. J. **Haag**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Je me propose d'indiquer dans cette note un certain nombre de problèmes qui se ramènent à des quadratures, et dont plusieurs cas particuliers ont été déjà étudiés dans la *Revue*.

1er *Problème. — Trajectoires sous un angle donné d'une famille de courbes* (C), *se déduisant de l'une d'entre elles par des translations rectilignes parallèles.*

Prenons pour axe des x une parallèle à la direction commune de toutes les translations. Soit Γ l'une quelconque des trajectoires considérées. Si on lui fait subir une translation quelconque parallèle à Ox, il est bien clair qu'elle va demeurer dans la famille des courbes Γ.

On en conclut que si $x = f(y)$ désigne l'équation d'une courbe Γ, les autres auront pour équation générale

$$x = x_0 + f(y), \qquad (x_0 = \text{c}^{\text{te}} \text{ arbitraire}).$$

L'équation différentielle de ces courbes sera donc

$$dx = f'(y)\,dy;$$

autrement dit, *les variables seront séparées.*

2e *Problème. — Même problème en supposant que les courbes* C *se déduisent de l'une d'elles par des rotations autour d'un point fixe* O.

Un raisonnement analogue au précedent montre que les variables seront séparées dans l'équation du problème si l'on prend des coordonnées polaires de pôle O. On arrivera à une équation de la forme

$$d\omega = f(\rho)\,d\rho.$$

3e *Problème. — Même question en supposant que les courbes* C *se déduisent de l'une d'elles par une homothétie de centre fixe* O.

Si l'on prend des coordonnées polaires de pôle O, on arrivera à une équation de la forme

$$\frac{d\rho}{\rho} = f(\omega)\,d\omega,$$

qui s'intègre encore par une quadrature. On pourrait aussi prendre des coordonnées cartésiennes d'origine O. On arriverait alors à une équation homogène en x et y, qui se ramènerait à la forme

$$\frac{dx}{x} = f(t)\,dt,$$

en posant

$$\frac{y}{x} = t.$$

Ceci explique pourquoi les questions **1595** et **1635** de la *Revue* se ramenaient à des quadratures.

Remarque. — Les trois problèmes que nous venons d'indiquer rapidement sont des applications particulières d'une théorie très générale due à Sophus Lie ; c'est la théorie *des groupes de transformations*, qui permet d'intégrer par des quadratures certaines équations différentielles. Je ne veux pas entrer dans les détails de cette théorie. Je me bornerai à l'appliquer à la généralisation des trois problèmes précédents.

Supposons que les courbes C soient telles qu'elles se déduisent toutes de l'une d'elles par des transformations (T) dépendant d'un paramètre et formant ce qu'on appelle *un groupe*. Ceci veut dire que si l'on applique à une courbe C l'une quelconque des transformations (T), puis à la courbe C′ obtenue une autre transformation (T), on doit pouvoir arriver à la courbe finale C″ par une seule transformation (T).

Supposons de plus que les transformations (T) conservent les angles. Dans ce cas, *les courbes* Γ *s'obtiendront par une quadrature*. On démontre en effet que tout groupe de transformations (T) satisfaisant aux conditions précédentes peut être défini de la manière suivante :

Soit $f(z)$ une fonction quelconque de la variable complexe $z = x + yi$. Séparons la partie réelle et la partie imaginaire. Nous aurons

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

P et Q désignant deux fonctions réelles des variables réelles x et y.

Considérons alors les formules suivantes :

$$P(x, y) = P(X, Y) + a, \qquad Q(x, y) = Q(X, Y),$$

où a désigne un paramètre variable. Pour une valeur donnée de a, ces formules définissent évidemment une transformation dans le plan. Quand a varie, on obtient visiblement un groupe de transformations. Enfin, c'est une propriété connue qu'une telle transformation conserve les angles, ce qui est d'ailleurs très facile à démontrer.

Ceci étant, soit Γ_0 l'une des trajectoires des courbes C. Si l'on effectue sur elle une transformation (T) quelconque, on retombe sur une autre courbe Γ. Il en résulte que, si l'on fait le changement de variables

$$P(x, y) = u, \qquad Q(x, y) = v$$

et si $u = f(v)$ désigne l'équation de Γ_0, celle de toute courbe Γ sera de la forme

$$u + a = f(v),$$

où a désigne une constante quelconque. Par suite l'équation différentielle des courbes Γ sera de la forme

$$du = g(v)\,dv\,; \tag{1}$$

autrement dit *les variables seront séparées*.

Dans les trois problèmes traités au début de cette note, les fonctions P sont respectivement égales à x, $-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$, $\log\sqrt{x^2+y^2}$ et les fonctions Q sont y, $\log\sqrt{x^2+y^2}$, $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

Mais il faut bien remarquer que pour la détermination des courbes Γ, il n'est pas nécessaire de prendre pour variables les fonctions P et Q elles-mêmes, car l'équation (1) continue à être à variables séparées si l'on y fait le changement de variables

$$u = F(u) + G(v), \qquad v = H(v),$$

F, G, H étant des fonctions quelconques d'une seule variable.

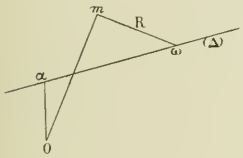
MÉCANIQUE

1688. — *On donne dans un plan deux droites* (A), (B) *et une ligne quelconque* (C).

Un point a décrit (A) *uniformément, un point c décrit* (C) *uniformément ; enfin, un point b décrit la droite* (B) *de telle façon qu'à chaque instant son accélération ait même mesure que l'accélération du point c.*

Démontrer que l'hodographe relatif au mouvement du centre de gravité du triangle abc est une cycloïde, et que l'on obtient ainsi tous les mouvements à hodographe cycloïdal.

Construisons l'hodographe qui correspond au mouvement d'un point M. Pour cela, un point O ayant été choisi comme origine et Om étant équipollent à la vitesse du point M, cette courbe est le lieu du point m.



Pour que le point m décrive une cycloïde, il faut et il suffit qu'il soit l'extrémité d'un segment ωm, de longueur constante R, se déplaçant comme suit : ω décrit une droite (Δ) et ωm tourne autour de ω de façon qu'à chaque instant la vitesse de m due à la rotation ait même mesure que la vitesse de ω.

Or, en vertu de l'équipollence

$$(Om) = \frac{1}{3}\left[(3O\alpha) + (3\alpha\omega) + (3\omega m)\right], \quad (\alpha \text{ étant un point fixe de } \Delta).$$

le point M peut être considéré comme le centre de gravité d'un triangle abc :

1° Le point a, ayant sa vitesse équipollente à $3O\alpha$, c'est-à-dire décrivant une droite quelconque (A) parallèle à $O\alpha$ avec la vitesse constante $3O\alpha$;

2° Le point b, ayant sa vitesse équipollente à $3\alpha\omega$, c'est-à-dire décrivant une droite quelconque (B) parallèle à (Δ) avec la vitesse $3\alpha\omega$;

3° Le point c, ayant sa vitesse équipollente à ωm, c'est-à-dire décrivant une courbe quelconque (C) avec la vitesse constante R.

En outre, comme la vitesse de ω et la vitesse de m dans la rotation autour de ω sont égales, les points b et c ont des accélérations qui ont même mesure algébrique.

En résumé, tous les mouvements à hodographe cycloïdal peuvent être définis comme l'indique l'énoncé.

Bonne solution : M. Groscolas, à Besançon.

1692. — *Faire voir que les formules*

$$x + \frac{d^2x}{d\theta^2} = p + a''\theta, \qquad y + \frac{d^2y}{d\theta^2} = q + b''\theta, \qquad z + \frac{d^2z}{d\theta^2} = r + c''\theta,$$

où θ désigne une fonction du temps, définissent un mouvement hélicoïdal pour des valeurs convenables des constantes de l'intégration.

Exprimer les composantes de la vitesse en fonction de la vitesse angulaire ω et de x, y, z.

Exprimer les composantes de l'accélération en fonction de ω et $\frac{d\omega}{dt}$, de x, y, z et des coordonnées X, Y, Z de la projection du mobile sur l'axe, de manière à faire apparaître les composantes de l'accélération tangentielle et celles de l'accélération centripète.

[*En faisant $\theta = \omega t$, on voit que la projection sur un axe $x'x$ d'un mouvement hélicoïdal uniforme est un mouvement périodiquement uniforme; cela est évident a priori.*]

1° Il est visible que la première équation admet la solution $x_1 = a\theta + p$, puisque la dérivée seconde de cette fonction est nulle. Si alors nous posons $x = x_1 + u$, nous voyons que la fonction u satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0,$$

dont la solution générale est

$$u = a\cos\theta + a'\sin\theta.$$

La solution générale de la première équation différentielle est donc

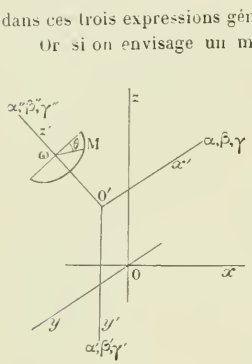
$$x = p + a \cos \theta + a' \sin \theta + a''\theta ;$$

celles des autres sont

$$y = q + b \cos \theta + b' \sin \theta + b''\theta, \qquad z = r + c \cos \theta + c' \sin \theta + c''\theta ;$$

dans ces trois expressions générales de x, y, z, a, b, c, a', b', c' sont six constantes arbitraires.

Or si on envisage un mouvement hélicoïdal quelconque autour d'un axe quelconque $O'z'$, il est facile de représenter analytiquement ce mouvement dans un système d'axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ rectangulaires et formé par $O'z'$ et deux autres axes perpendiculaires entre eux et à celui-ci. Soit M le mobile; il se meut sur un cercle ω ayant son centre sur $O'z'$ et situé dans un plan perpendiculaire pendant que celui-ci est entraîné parallèlement à lui-même, de façon que le déplacement rectiligne dans le sens $O'z'$ soit proportionnel au déplacement angulaire du rayon ωM; $O'x'$ est l'une des positions du rayon mobile ωM, choisie, $O'y'$ est perpendiculaire à $O'x'$, parallèle au plan du cercle et fait l'angle $\frac{+\pi}{2}$ avec $O'x'$, dans le sens du mouvement; les axes $O'x'y'z'$ sont alors bien définis. Soient maintenant ρ la longueur du rayon ωM, θ l'angle qu'il fait avec $O'x'$ et x', y', z' les coordonnées du point M dans le système ainsi formé;



nous aurons

$$x' = \rho \cos \theta, \qquad y' = \rho \sin \theta, \qquad z' = \frac{h}{2\pi}\theta,$$

en désignant par h le pas de l'hélice. Si p, q, r désignent les coordonnées du point O' par rapport au système primitif $Oxyz$; α, β, γ les cosinus directeurs de $O'x'$, α', β', γ' ceux de $O'y'$ et $\alpha'', \beta'', \gamma''$ ceux de $O'z'$, les coordonnées x, y, z du mobile seront

$$x = p + \rho(\alpha \cos \theta + \alpha' \sin \theta) + \alpha'' \frac{h}{2\pi}\theta,$$

$$y = q + \rho(\beta \cos \theta + \beta' \sin \theta) + \beta'' \frac{h}{2\pi}\theta,$$

$$z = r + \rho(\gamma \cos \theta + \gamma' \sin \theta) + \gamma'' \frac{h}{2\pi}\theta.$$

Ces formules peuvent être identifiées avec les premières à condition que les constantes d'intégration vérifient les relations

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \qquad a''a + b''b + c''c = 0, \qquad aa' + bb' + cc' = 0,$$

et nous trouverons ainsi

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \frac{h}{2\pi} = \sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}.$$

2° En dérivant x, y, z par rapport à t et appelant ω la vitesse angulaire de rotation, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \left[\rho(-\alpha \sin \theta + \alpha' \cos \theta) + \frac{h\alpha''}{2\pi}\right]\omega,$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[\rho(-\beta \sin \theta + \beta' \cos \theta) + \frac{h\beta''}{2\pi}\right]\omega,$$

$$\frac{dz}{dt} = \left[\rho(-\gamma \sin \theta + \gamma' \cos \theta) + \frac{h\gamma''}{2\pi}\right]\omega.$$

Or en éliminant $\frac{h\theta}{2\pi}$ entre y et z, nous obtenons

$$\beta''(z-r)-\gamma''(y-q)=\rho\cos\theta(\gamma\beta''-\beta\gamma'')+\rho\sin\theta(\gamma'\beta''-\beta'\gamma'').$$

Si alors nous supposons qu'on ait choisi le trièdre $Oxyz$ de façon que les deux trièdres aient la même orientation, nous aurons

$$\alpha=\beta'\gamma''-\gamma'\beta'', \qquad \alpha'=\beta''\gamma-\gamma''\beta$$

et, par suite,

$$\beta''(z-r)-\gamma''(y-q)=\rho(\alpha'\cos\theta-\alpha\sin\theta);$$

en définitive,

$$\frac{dx}{dt}=\left[\beta''(z-r)-\gamma''(y-q)+\frac{h\alpha''}{2\pi}\right]\omega;$$

de même

$$\frac{dy}{dt}=\left[\gamma''(x-p)-\alpha''(z-r)+\frac{h\beta''}{2\pi}\right]\omega,$$

$$\frac{dz}{dt}=\left[\alpha''(y-q)-\beta''(x-p)+\frac{h\gamma''}{2\pi}\right]\omega.$$

3° Les composantes de l'accélération sont de même

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left[\beta''(z-r)-\gamma''(y-q)+\frac{h\alpha''}{2\pi}\right]\frac{d\omega}{dt}-\omega^2\rho(\alpha\cos\theta+\alpha'\sin\theta), \quad \text{etc...}$$

Représentons alors par X, Y, Z les coordonnées du point ω, centre du cercle sur lequel se trouve le point M ; nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left[\beta''(z-r)-\gamma''(y-q)+\frac{h\alpha''}{2\pi}\right]\frac{d\omega}{dt}-\omega^2\rho\frac{x-X}{\rho}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\cdots,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\cdots,$$

et les composantes de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète sont visibles sur ces formules.

4° Pour $\theta=\omega t$, cas dans lequel le mouvement est uniforme, la valeur de x devient

$$x=a\cos\omega t+a'\sin\omega t+(A't+p);$$

elle définit un mouvement périodiquement uniforme sur Ox (*Appell, Cours de Mécanique*, p. 70). La fonction linéaire correspond à la translation dans le sens de l'axe du mouvement hélicoïdal, et la fonction périodique à la rotation.

G. F.

PHYSIQUE

1693. — *Un pendule est mobile autour d'un axe horizontal représenté par l'arête d'un couteau reposant sur un plan. Dans le prolongement de cet axe et de part et d'autre du couteau, on a fixé au pendule deux fils métalliques,* AB *et* CD, *de même nature, de même longueur et de même section d'ailleurs négligeable, qui reposent simplement sur des plans d'appui horizontaux, ce qui évite leur flexion.*

On fait osciller le pendule et on compte $p = 80$ *petites oscillations simples par minute.*

On immobilise ensuite les extrémités B *et* D *des fils en les serrant dans des pinces fixes ; on fait osciller de nouveau et on compte* $q = 90$ *petites oscillations par minute.*

On fait tourner les deux pinces de la même quantité dans le même sens autour de l'axe BD, *de manière que le pendule, dans sa nouvelle position d'équilibre, fasse avec la verticale un angle* α. *Déterminer la nouvelle durée d'une petite oscillation. Faire en particulier le calcul pour* $\alpha = 60°$.

Que trouverait-on si on avait fait tourner les deux pinces de la même quantité, mais en sens inverses ?

La première expérience nous donne, en adoptant les notations usuelles,

$$\frac{1}{p} = \pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}.$$

Dans la deuxième expérience, la torsion s'ajoute à l'action de la pesanteur et, en désignant par R le moment de torsion pour l'unité d'angle, on a

$$\frac{1}{q} = \pi\sqrt{\frac{I}{R + Mga}}.$$

Quand le pendule fait l'angle α avec la verticale, la variation du moment du poids par rapport à l'axe de rotation, pour un petit écart $d\alpha$ de la position d'équilibre, est $Mga\cos\alpha d\alpha$. La variation du moment de torsion est toujours $Rd\alpha$. Par suite, le nouveau moment statique est $R + Mga\cos\alpha$ et la nouvelle durée d'oscillation est

$$\frac{1}{n} = \pi\sqrt{\frac{I}{R + Mga\cos\alpha}}.$$

Élevons au carré ces trois équations, il vient

$$p^2 = \frac{Mga}{\pi^2 I}, \qquad q^2 = \frac{R + Mga}{\pi^2 I}, \qquad n^2 = \frac{R + Mga\cos\alpha}{\pi^2 I},$$

d'où l'on tire

$$n^2 = q^2 - p^2(1 - \cos\alpha).$$

Pour $\alpha = 60°$, $n = 70$.

Si l'on avait fait tourner les deux pinces de la même quantité, mais en sens inverse, le pendule, dans sa position d'équilibre, resterait vertical. Les petites variations du moment par rapport à l'axe, pour de petits écarts du pendule, seraient encore proportionnelles aux écarts. Les actions des deux fils s'ajouteraient comme dans la deuxième expérience et il y aurait encore 90 oscillations par minute, comme si la torsion initiale était nulle.

R. TELLIER.

QUESTIONS PROPOSÉES

1770. — On considère la courbe (C) dont les équations sont

$$x = a(\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\varphi'), \qquad y = a(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi'),$$

φ et φ' étant deux paramètres liés par la relation

$$\operatorname{sh} 2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + \alpha,$$

et a, α, deux constantes.

1° Former l'équation cartésienne de cette courbe.

2° En supposant que α varie, former l'équation différentielle des courbes (C).

3° Soient M un point quelconque de cette courbe, P le pied de l'ordonnée du point M, T et N les points de rencontre avec Ox de la tangente et de la normale en M, et T′ le symétrique de T par rapport au point P; montrer que l'on a la relation

$$ON.OT' = 4a^2.$$

4° Trouver toutes les courbes qui jouissent de cette propriété. Il y en a deux familles : la famille (C) et la famille (Γ) dont les équations sont

$$x = a(\cos\varphi + \cos\varphi'), \qquad y = a(\cos\varphi - \cos\varphi'),$$

φ et φ' étant deux paramètres liés par la relation

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + \beta,$$

et β une nouvelle constante arbitraire.

5° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (C), celles des courbes (Γ) et montrer que leur ensemble constitue toutes les coniques ayant mêmes axes en position et un même cercle orthoptique

$$x^2 + y^2 = 4a^2.$$

Albert Bayet, à Douai.

1771. — On considère une ellipse dont l'un des axes est double de l'autre. Soit MP la distance d'un point M variable de l'ellipse au petit axe. Le cercle décrit sur MP comme diamètre enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements. Solution analytique et géométrique.

E. N. Barisien.

1772. — Dans un milieu où un mouvement vibratoire se propage avec une vitesse V, la source origine de ce mouvement se déplace avec une vitesse v et l'observateur se déplace en sens inverse avec une vitesse v'. Quel sera le mouvement perçu par l'observateur ?

Application acoustique. — Avec quelle vitesse une locomotive doit-elle s'approcher d'un observateur fixe pour que la note de son sifflet paraisse élevée d'un demi-ton tempéré, c'est-à-dire d'un intervalle égal à 1,06 environ ?

Application optique. — Quelle doit être la vitesse radiale relative d'une étoile pour que la raie D de son spectre paraisse déplacée de $\frac{1}{6}$ de l'intervalle qui sépare les deux éléments de cette raie dont les longueurs d'onde sont respectivement $0^{\mu},5896$ et $0^{\mu},5890$?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1683. — *On considère l'hyperbole* $y(y - mx) + bmx + \beta y - abm = 0$, *et on demande :*

1° *les équations des asymptotes ;*

2° *l'équation générale des courbes homothétiques et celle des courbes semblables ;*

3° *la valeur de l'intégrale définie* $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ *qui représente l'aire comprise entre* Ox, *les deux ordonnées* x_1, x_2 *et la branche de courbe située entre* Ox *et l'asymptote horizontale.*

1° Il y a deux asymptotes : l'une, parallèle à Ox, est le diamètre conjugué des cordes parallèles à cet axe, $f'_x = 0$; l'autre, parallèle à la direction $y = mx$, est le diamètre conjugué de cette direction, $f'_x + mf'_y = 0$. Ces deux droites ont donc pour équations respectives

$$y - b = 0 \qquad \text{et} \qquad y - mx + b + \beta = 0;$$

elles se coupent au centre, qui a pour coordonnées

$$x = \frac{2b + \beta}{m}, \qquad y = b.$$

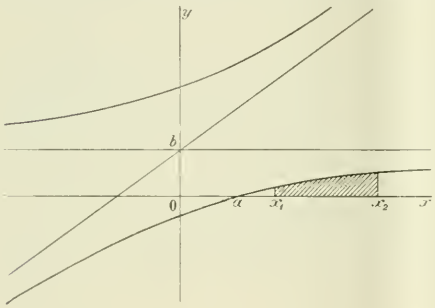
2° L'équation générale des courbes homothétiques à cette hyperbole est

$$y(y - mx) + 2ux + 2yv + w = 0,$$

u, v, w étant trois constantes arbitraires. Les courbes semblables sont toutes les hyperboles dans lesquelles les deux asymptotes font entre elles un angle dont la tangente est égale à m. Soit $y - \lambda x = 0$ la première direction asymptotique : la seconde sera $y - \frac{\lambda + m}{1 - \lambda m} x = 0$, et l'équation générale des hyperboles semblables à celle de l'énoncé sera

$$(y - \lambda x)[(1 - \lambda m)y - (\lambda + m)x] + 2ux + 2vy + w = 0.$$

3° Pour figurer la courbe, supposons par exemple, a, b et m positif, et plaçons-nous dans le cas particulier où $\beta = -2b$. L'aire demandée peut se calculer facilement en fonction de y ou de $y - b$.



On a en effet

$$x = \frac{y^2 + \beta y - abm}{m(y - b)},$$

et, si l'on pose $y - b = z$,

$$x = \frac{z^2 + (2b + \beta)z + b^2 + b\beta - abm}{mz};$$

par suite

$$dx = \frac{dz}{m} - \frac{b^2 + b\beta - abm}{mz^2} dz.$$

L'intégrale $\int y\,dx$ devient donc

$$\int (z + b)\left(\frac{1}{m} - \frac{b^2 + b\beta - abm}{mz^2}\right) dz,$$

et l'on a de suite

$$\frac{1}{m}\left[\frac{z^2}{2} + bz - (b^2 + b\beta - abm)\left(\mathrm{L}z - \frac{b}{z}\right)\right] + \mathrm{C}^{\text{te}}.$$

Il n'y a plus qu'à y remplacer z par $y - b$, puis prendre l'intégrale entre les limites y_1 et y_2 pour avoir le résultat demandé.

Maintenant si on veut le résultat en fonction de x_1 et x_2, il faudra calculer, pour x_1 et x_2 la plus petite valeur de y à chaque fois et mettre ce résultat à la place de y_1 et de y_2.

G. FOUGRY, à Roanne.

Bonnes solutions : MM. Bros ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; J. Vergots, à Lyon.

1686. — *Les sommets d'un triangle ABC décrivent une parabole P à laquelle les côtés AC et BC sont normaux en A et B. N est le pôle du côté AB et NN'N'' le triangle normal circonscrit correspondant à C.*

On demande le lieu des points d'intersection M et N du cercle O circonscrit au triangle ABC et du cercle O' circonscrit au triangle NN'N''.

Démontrer que :

1° la cubique circulaire unicursale, lieu du point M, est l'enveloppe du cercle O ;

2° la droite, lieu du point N, enveloppe le cercle O' ;

3° *l'hyperbole équilatère de 3e ordre, lieu des sommets N′ et N″ est l'enveloppe de l'hyperbole d'Apollonius relative à* C :

4° *la directrice de* P *est le lieu du point de rencontre de* NN′ *et de l'axe radical des cercles* O *et* O′ ;

5° *cet axe radical enveloppe une ellipse :*

6° *le point de concours des hauteurs du triangle* ABC *est sur le diamètre de* P *mené par* N.

1° Si NN′N″ est le triangle normal circonscrit correspondant au point C qui décrit la parabole P et si on désigne par α, β les coordonnées d'un des sommets N de ce triangle, celles du point C étant désignées par x_1, y_1, on a les relations

$$(1) \qquad x_1 = \frac{2\beta^2 - p\alpha + p^2}{p}, \qquad (2) \quad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}, \qquad y_1^2 - 2px_1 = 0.$$

En portant les valeurs de x_1 et de y_1 dans la dernière équation, on obtient

$$4\frac{\alpha^2\beta^2}{p^2} - 4\beta^2 + 2p\alpha - 2p^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha - p)(2(\alpha + p)\beta^2 + p^3) = 0.$$

Donc, lorsque le point C décrit la parabole P, un des sommets N(α, β) du triangle normal circonscrit se meut sur la perpendiculaire $x - p = 0$ à l'axe : et les deux autres N′, N″ sur l'hyperbole équilatère du troisième ordre

$$2(x + p)y^2 + p^3 = 0.$$

On sait que l'équation du cercle O circonscrit au triangle ABC est

$$x^2 + y^2 - (x_1 + p)x - \frac{y_1}{2}y = 0.$$

La relation $\alpha - p = 0$ montre que les coordonnées x_1 et y_1 du point C, tirées des relations (1) et (2), deviennent $x_1 = \dfrac{2\beta^2}{p}$ et $y_1 = -2\beta$.

Introduisant ces valeurs de x_1 et de y_1 dans l'équation du cercle O, on obtient

$$(3) \qquad (O) \qquad p(x^2 + y^2) - (2\beta^2 + p^2)x + p\beta y = 0.$$

En faisant la même substitution dans l'équation générale d'un cercle O′ circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant à un point C (x_1, y_1)

$$(2x - p)(x + x_1 - p) + 2y(y + y_1) \equiv 2(x^2 + y^2) + (2x_1 - 3p)x + 2y_1y + p(p - x_1) = 0,$$

on obtient

$$(4) \qquad (O') \qquad p(x^2 + y^2) - (4\beta^2 - 3p^2)x - 4p\beta y + p(p^2 - 2\beta^2) = 0.$$

L'équation de l'axe radical des cercles O et O′ est donc

$$(5) \qquad (8\beta^2 - p^2)x - 6p\beta y - p(2\beta^2 - p^2) = 0.$$

Les coordonnées des deux points d'intersection M et N des deux cercles O et O′ s'obtiennent en résolvant les équations simultanées (3) et (5). Le sommet N (p, β) du triangle normal circonscrit correspondant au point C se trouve à la fois sur les deux cercles : on connaît donc à l'avance les coordonnées (p, β) d'un des points d'intersection.

De l'équation (5) on tire

$$y = \frac{(8\beta^2 - p^2)x + p(p^2 - 2\beta^2)}{6p\beta}.$$

On porte cette valeur de y dans l'équation du cercle O et on obtient une équation du second degré en x, dans laquelle le coefficient de x^2 est

$$\frac{p(16\beta^2 + p^2)(4\beta^2 + p^2)}{36p^2\beta^2}$$

et le terme tout connu $\frac{p^3(p^2-2\beta^2)(p^2+4\beta^2)}{36p^2\beta^2}$. Le produit des deux racines de l'équation en x^2 est donc

$$\frac{p^2(p^2-2\beta^2)}{16\beta^2+p^2}.$$

Une des racines étant égale à p, l'autre, qui est l'abscisse du point M, est égale à

$$X = \frac{p(p^2-2\beta^2)}{16\beta^2+p^2}.$$

La valeur correspondante de y est l'ordonnée de ce point :

$$Y = \frac{4\beta(p^2-2\beta^2)}{16\beta^2+p^2}.$$

Le point d'intersection N décrit, ainsi que nous l'avons démontré, la droite $x-p=0$. Pour avoir l'équation du lieu décrit par le point d'intersection M, remarquons que des relations précédentes on déduit $\frac{Y}{X} = \frac{4\beta}{p}$. Il suffit de porter la valeur de β tirée de cette dernière relation dans l'expression trouvée pour X et on a l'équation du lieu cherché décrit par le point M :

$$[8X+p)Y^2+8(X-p)X^2 = 0.$$

Sous la forme

$$8X(X^2+Y^2)-p(8X^2-Y^2) = 0,$$

on voit que cette équation représente une cubique circulaire, symétrique par rapport à l'axe de la parabole, ayant un point double à l'origine et comprise entre les droites $X-p=0$, $8X+p=0$, cette dernière étant asymptote à la courbe. On voit également que les tangentes au point double sont représentées par l'équation $Y = \pm 2\sqrt{2}X$.

Si on considère la relation $4\beta X - pY = 0$, il est apparent que le premier membre de l'équation de cette droite est la dérivée par rapport à β de la fonction $X\beta^2 - pY\beta + f(X, Y) = 0$, c'est-à-dire de l'équation du cercle O ordonné par rapport à β :

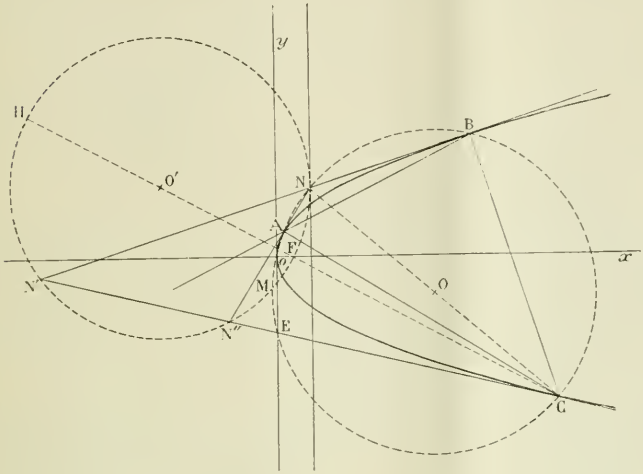
$$-2x\beta^2 + py\beta + p(x^2+y^2) = 0.$$

La cubique circulaire obtenue précédemment est donc l'enveloppe du cercle O. Ce cercle est décrit sur la droite NC comme diamètre ; car les coordonnées du point N sont (p, β), celles du point C sont $\left(\frac{2\beta^2}{p}, -2\beta\right)$ et les coordonnées du centre du cercle O sont chacune la demi-somme des coordonnées de ces deux points N et C, situés tous deux sur ce cercle. Le point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée pour chaque position du point $N(p, \beta)$ sur la droite $x-p=0$ que ce point décrit est le point de rencontre, autre que l'origine de la droite $4\beta X - pY = 0$ et du cercle O correspondant à la valeur β de l'ordonnée du point N. Cette remarque donne le tracé de la tangente en chaque point de la cubique circulaire.

2° La droite $X-p=0$ reste tangente au cercle O', quelle que soit la position du point N sur la droite $X-p=0$, car le point N situé sur le cercle O' et le centre de ce cercle ont toujours la même ordonnée β, quel que soit β. Si on cherche directement l'équation de l'enveloppe du cercle O' en exprimant que le premier membre de l'équation de ce cercle, ordonnée par rapport à β, a deux racines égales, on trouve le lieu suivant :

$$(x-p)[(2x-p)^2+4y^2] = 0.$$

Outre l'équation $x - p = 0$ de la perpendiculaire à l'axe décrite par le point N, on obtient également une équation qui représente le foyer de la parabole P, parce que tous les cercles O′ passent par ce point. (Ils sont donc tangents à un cercle de rayon nul ayant son centre au foyer F).



3° L'hyperbole d'Apollonius qui passe par les points d'incidence des normales menées du point C

$$\left(\frac{2\beta^2}{p}, -2\beta\right)$$

à la parabole P est représentée par l'équation

$$pxy + (p^2 - 2\beta^2)y + 2p^2\beta = 0.$$

Ordonnant par rapport à β, on a

$$2y\beta^2 - 2p^2\beta - p(x+p)y = 0.$$

La condition pour que l'équation en β ait ses deux racines égales donne l'équation de l'enveloppe cherchée :

$$2(x+p)y^2 + p^3 = 0,$$

qui est celle d'une hyperbole équilatère du troisième ordre, bien connue.

4° Le côté N′N″ du triangle normal circonscrit correspondant au point C $\left(\frac{2\beta^2}{p}, -2\beta\right)$ est la tangente en C représentée par l'équation

$$(6) \qquad px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0.$$

L'axe radical des cercles O et O′ est représenté par l'équation (5).

Si on cherche l'ordonnée du point de rencontre de chacune des deux droites (5) et (6) et de la directrice, on trouve que chacune des deux droites rencontre la directrice en un point dont l'ordonnée est égale à $\frac{p^2 - 4\beta^2}{4\beta}$. Pour chaque valeur différente de β, les deux droites (5) et (6) se coupent sur la directrice qui est donc le lieu de leur point de rencontre.

5° Si on ordonne par rapport à β l'équation de l'axe radical des deux cercles O et O′, cette équation devient

$$(8x - 2p)\beta^2 - 6py\beta - p^2(x - p) = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est donc l'ellipse $8x^2 + 9y^2 - 10px + 2p^2 = 0$.

Cette ellipse, rapportée à son centre et à ses axes, est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3p}{8}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

6° L'équation de la droite AB est $\beta y = p(x+p)$. Les coordonnées (x', y'), (x'', y'') des points d'intersection A et B de cette droite et de la parabole P sont

$$x' = \frac{\beta}{p}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 2p^2}), \qquad y' = \beta + \sqrt{\beta^2 - 2p^2}; \qquad x'' = \frac{\beta}{p}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p^2}), \qquad y'' = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2p^2}.$$

La hauteur du triangle ABC issue du sommet A sera représentée par l'équation

$$y - (\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p^2}) = \frac{p}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2p^2}}\left(x + p - \frac{\beta^2}{p} - \frac{\beta}{p}\sqrt{\beta^2 - 2p^2}\right);$$

en chassant les dénominateurs, on obtient l'équation

$$-\sqrt{\beta^2 - 2p^2}(y - \beta) + \beta y - 2p^2 = px + p^2 - \beta^2.$$

On obtient l'équation de la hauteur issue du sommet B en changeant le signe du radical :

$$+\sqrt{\beta^2 - 2p^2}(y - \beta) + \beta y - 2p^2 = px + p^2 - \beta^2.$$

Retranchant membre à membre, on a $y = \beta$, ordonnée du point de rencontre des hauteurs. En remplaçant y par cette valeur dans l'une ou l'autre des équations précédentes, on trouve $x = \frac{2\beta^2}{p} - 3p$. Ces coordonnées x et y vérifient bien l'équation de la troisième hauteur, qui est la perpendiculaire abaissée du sommet C sur AB et qui est représentée par l'équation

$$y + 2\beta = -\frac{\beta}{p}\left(x - \frac{2\beta^2}{p}\right).$$

Ainsi l'abscisse du point de concours des hauteurs est égale à celle du point C diminuée de $3p$, et l'ordonnée est égale à celle du sommet N du triangle NN'N''. Lorsque C se déplace sur la parabole P, ce point de concours décrit la parabole $2y^2 - px - 3p^2 = 0$, en restant toujours sur le diamètre de P qui passe par N.

Remarque. — Outre les six propositions démontrées, on peut facilement déduire de ce qui précède trois autres propriétés de la figure et une construction très simple qui permet lorsqu'on a pris sur la droite $x - p = 0$ un point N (p, β) quelconque d'obtenir immédiatement les deux autres sommets N', N'' du triangle normal circonscrit, les trois sommets A, B, C du second triangle et les centres des deux cercles circonscrits à ces triangles, ainsi que les rayons de ces cercles.

Ces trois propriétés sont les suivantes :

1° Lorsque le point N se déplace sur $x - p = 0$, la droite AB tourne autour du point fixe $(-p, 0)$. Cela résulte de l'équation $\beta y = p(x+p)$ de cette droite.

2° Le cercle O circonscrit au triangle ABC et dont les points de rencontre avec la parabole P donnent les pieds A, B, C des normales issues de C rencontre la tangente au sommet à l'origine et en un point E. Si on joint E et C, on a la tangente en C qui est le côté N'N'' du triangle normal circonscrit correspondant à C. L'équation de cette tangente est $px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0$.

3° Ce côté N'N'' quand N se déplace sur la droite $x - p = 0$ rencontre toujours en un point de la droite $x + 2p = 0$ la tangente menée en N au cercle O.

Si on se donne le point N (p, β), la construction qui détermine tous les autres éléments de la figure est la suivante :

β étant connu, on trace le diamètre de P représenté par l'équation : $y + 2\beta = 0$. Ce diamètre rencontre P au sommet C du triangle ABC. Sur NC comme diamètre on décrit le cercle O. (Cette construction a déjà été indiquée plus haut). Il suffit de joindre le point N aux deux points d'intersection A et B du cercle O et de la parabole P pour avoir les deux tangentes NA et NB à la parabole; ces deux tangentes sont les côtés NN'', NN' du triangle normal circonscrit correspondant à C. Nous avons indiqué comment on obtient le côté N'N''. Si on joint C au foyer F de la parabole P, et si on prend sur le prolongement de CF une longueur FH = CF, le cercle décrit sur FH comme diamètre est le cercle O'. Cette construction du cercle O' circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant au point C subsiste, même quand le point C n'est pas sur la parabole P.

CAMILLE MASSING.

Bonnes solutions : MM. L. SIMON, à Châlons-sur-Marne ; GROSCOLAS ; H. JANOIS ; BROS ; G. FOUCRY, à Roanne.

1689. — *On considère un cercle* (C) *tangent à* Oy *en* O *et une tangente variable à ce cercle*, AB.

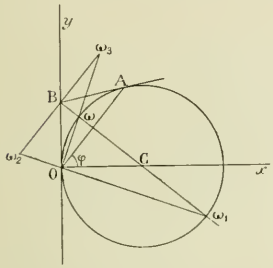
1° *Lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits dans le triangle* AOB; *construire ces lieux.*

2° *Lieu du centre et enveloppe du cercle* (Γ) *conjugué au même triangle. Lieu des points de rencontre de ce cercle avec son diamètre passant en* B.

Construire ces lieux.

3° *L'enveloppe du cercle* (Γ) *est une quartique bicirculaire. On cherchera ses anallagmaties et les cercles directeurs correspondants.*

1. Nous déterminerons les centres ω, ω_1, ω_2 et ω_3 des cercles inscrit et exinscrits dans le triangle OAB en prenant les points communs aux bissectrices de l'angle BOA et à celles de l'angle OBA.



Soit φ l'angle de Ox avec OA, l'équation de la droite OA peut s'écrire $x \sin\varphi - y\cos\varphi = 0$, et par suite l'ensemble des bissectrices de l'angle BOA a pour équation

$$x^2 - (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 = 0,$$

ou encore $x^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 = 0$, ou enfin

$$(1) \qquad x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0.$$

Soient C le centre du cercle (C) et R le rayon de ce cercle. L'une des bissectrices de l'angle OBA est la droite BC, qui a pour équation

$$(2) \qquad y = -\frac{x - \mathrm{R}}{\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Nous aurons donc le lieu des points ω et ω_1 en éliminant $\mathrm{tg}\,\varphi$ entre les équations (1) et (2). Cette élimination est fort simple, elle nous donne pour équation du lieu

$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{R}x = 0,$$

qui est précisément l'équation du cercle (C).

Donc le lieu des points ω et ω_1 est le cercle (C), ce qui est facile à apercevoir géométriquement.

L'autre bissectrice de l'angle OBA passe par le point B, qui a pour ordonnée $\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{tg}\,\varphi}$, et est parallèle à OA. Son équation est donc $y - \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{tg}\,\varphi} = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$, ou

$$x\,\mathrm{tg}^2\varphi - y\,\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{R} = 0.$$

Le lieu des points ω_2 et ω_3 s'obtiendra en remplaçant dans cette équation $\mathrm{tg}\,\varphi$ par la valeur $\dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, tirée de l'équation (1).

Nous obtenons ainsi

$$\frac{(y^2 - x^2)^2}{4xy^2} - \frac{y^2 - x^2}{2x} + \mathrm{R} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$y^4 - x^4 - 4\mathrm{R}xy^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à Ox et ayant un point triple à l'origine. Elle est donc unicursale, et pour la construire, nous la couperons par la droite $y = tx$. Nous obtenons ainsi les coordonnées d'un point de la courbe en fonction rationnelle de t,

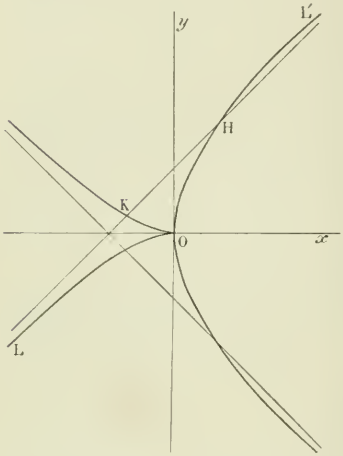
$$x = \frac{4\mathrm{R}t^2}{t^4 - 1}, \qquad y = \frac{4\mathrm{R}t^3}{t^4 - 1}.$$

A des valeurs de t égales et de signes contraires correspondent des points de la courbe symétriques par rapport à Ox : il suffira donc de faire varier t de 0 à $+\infty$. Comme $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2t(t^4 + 1)}{(t^4 - 1)^2}$ est

toujours négatif, les variations de x sont les suivantes :

t	0	croit	1		croit	$+\infty$
x	0	décroit	$-\infty$	$+\infty$	décroit	0

Nous obtenons ainsi les branches de courbe OL et OL'.



La direction asymptotique a pour coefficient angulaire 1 ; pour avoir l'asymptote, nous cherchons la limite de $y - x$, ou de $tx - x$, ou $(t-1)x$.

Nous avons

$$(t-1)x = \frac{4Rt^2}{1+t+t^2+t^3}.$$

dont la limite est R pour $t = 1$.

L'équation de l'asymptote est donc

$$Y - x = R,$$

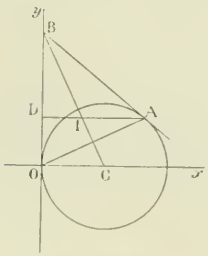
et la différence $y - Y$ entre l'ordonnée d'un point de la courbe et du point de l'asymptote qui a même abscisse est

$$y - Y = \frac{4Rt^2}{1+t+t^2+t^3} - R = -R\,\frac{(t-1)(t^2-2t-1)}{1+t+t^2+t^3}.$$

Pour $t = 1 - \varepsilon$, $y - Y < 0$, et pour $t = 1 + \varepsilon$, $y - Y > 0$. La branche OL est au-dessous de l'asymptote et la branche OL' au-dessus. De plus l'asymptote rencontre la courbe en deux points dont les t sont racines de l'équation $t^2 - 2t - 1 = 0$, $t = 1 \pm \sqrt{2}$. A la valeur $1 + \sqrt{2}$ correspond le point H sur OL', et à $1 - \sqrt{2}$ correspond le point K situé sur la branche symétrique de OL par rapport à Ox. Les droites OH et OK sont rectangulaires.

2. Le cercle (Γ) conjugué par rapport au triangle OAB a pour centre le point de concours I des hauteurs du triangle, et le rayon ρ est donné par la relation $\rho^2 = \overline{IA}\cdot\overline{ID}$. Ce cercle n'est réel que si l'angle OBA est obtus.

Le point A, intersection du cercle (C) $(x^2 + y^2 - 2Rx = 0)$ et de la droite OA $(y = x \operatorname{tg} \varphi)$ a pour ordonnée $R \sin 2\varphi$. En remplaçant y par cette valeur dans l'équation de la droite BC $(y \operatorname{tg} \varphi + x - R = 0)$, on voit que les coordonnées du point I sont $x = R \cos 2\varphi$, $y = R \sin 2\varphi$, ce qui montre que le lieu du point I est le cercle $x^2 + y^2 - Rx = 0$.



D'autre part, le rayon ρ du cercle (Γ) est défini par

$$\rho^2 = \overline{IA}.\overline{ID} = \overline{DI}\,(\overline{DI} - \overline{DA}).$$

Or $\overline{DI} = R \cos 2\varphi$, et $\overline{DA}$, abscisse du point A, est égal à $2R \cos^2\varphi$; on a donc

$$\rho^2 = -R^2 \cos 2\varphi.$$

L'équation du cercle (Γ) est donc

$$(x - R\cos 2\varphi)^2 + (y - R\sin 2\varphi)^2 + R^2 \cos 2\varphi = 0,$$

$$x^2 + y^2 + R^2 - R(2x - R)\cos 2\varphi - 2Ry \sin 2\varphi = 0.$$

On en conclut que l'enveloppe de ce cercle a pour équation

$$(x^2 + y^2 + R^2)^2 - R^2(2x - R)^2 - 4R^2y^2 = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R^2(x^2 + y^2) + 4R^3x = 0.$$

C'est l'équation d'une quartique bicirculaire, symétrique par rapport à Ox et tangente à l'origine à Oy.

Pour la construire, ordonnons l'équation par rapport à y, nous avons

$$f(y^2) \equiv y^4 + 2y^2(x^2 - R^2) + x(x^3 - 2R^2x + 4R^3) = 0,$$

et formons l'équation résolvante

$$f(u) \equiv u^2 + 2u(x^2 - R^2) + x(x^3 - 2R^2x + 4R^3) = 0.$$

Pour que cette équation ait des racines, il faut qu'on ait

$$(x^2 - R^2)^2 - x(x^3 - 2R^2x + 4R^4) > 0,$$

ou

$$x < \frac{R}{4}.$$

Pour étudier le signe de ces racines, il suffit d'appliquer le théorème de Descartes en remarquant que le terme indépendant de y, $x(x^3 - 2R^2x + 4R^3)$ peut s'écrire $x(x + 2R)(x^2 - 2Rx + 2R^2)$. On voit alors aisément que si x est plus petit que $-2R$, l'équation $f(u) = 0$ admet deux racines négatives; si x est compris entre $-2R$ et 0, elle admet une racine positive et une racine négative; enfin si x est compris entre 0 et $\frac{R}{4}$, elle a deux racines positives.

A chaque valeur positive de u correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires; nous ne considérerons que la valeur positive. Ces valeurs de y seront définies par le tableau ci-contre qui nous donne l'arc de courbe ABCO. Il n'y a plus qu'à achever par symétrie par rapport à Ox.

x	$-2R$		0		$\frac{R}{4}$
y_1	0	$+$	$R\sqrt{2}$	$+$	$\frac{R\sqrt{15}}{4}$
y_2			0	$+$	$\frac{R\sqrt{15}}{4}$

Le diamètre du cercle (Γ) qui passe par le point B est la droite BC, qui a pour équation

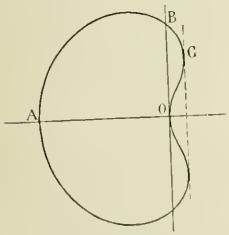
$$x - R + y \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Nous en tirons $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x - R}{y}$.

$$\cos 2\varphi = \frac{y^2 - (x - R)^2}{y^2 + (x - R)^2}, \qquad \sin 2\varphi = -\frac{2y(x - R)}{y^2 + (x - R)^2},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation du cercle (Γ), nous obtenons, toutes réductions faites,

$$(x^2 + y^2)^2 - R^2(3x^2 + y^2) + 2R^2x = 0.$$



C'est encore l'équation d'une quartique bicirculaire, qui se construit comme la précédente et qui a une forme analogue.

3. Reprenons l'équation du cercle (Γ) sous la forme

$$x^2 + y^2 + R^2 - R(2x - R)\cos 2\varphi - 2Ry \sin 2\varphi = 0$$

et différentions cette équation par rapport à φ; nous obtenons l'équation

$$(2x - R)\sin 2\varphi - y \cos 2\varphi = 0,$$

qui représente la droite joignant les deux points de contact du cercle avec son enveloppe. Or cette droite passe par le point fixe $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$, et il est aisé de vérifier que la puissance de ce point par rapport au cercle (Γ) est constante et égale à $\frac{5R^2}{4}$. Il en résulte que le cercle Γ coupe orthogonalement le cercle qui a pour centre le point $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ et pour rayon $\frac{5R^2}{4}$; c'est l'un des cercles directeurs et son centre est l'un des pôles d'anallagmatie.

Puisque la quartique est symétrique par rapport à Ox, nous aurons une deuxième série de cercles

bitangents ayant leurs centres sur Ox. L'équation générale de ces cercles est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \frac{R(\alpha - R)^2}{2\alpha} = 0.$$

Le pôle d'anallagmatie est dans ce cas rejeté à l'infini.

Les autres pôles sont situés sur l'axe de symétrie Ox. Soit a l'abscisse de l'un d'eux ; transportons l'origine en ce point, l'équation de la quartique devient

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)(a^2 - R^2) + 4a^2x^2 + 4x(R^3 - aR^2 + a^3) + a^4 - 2a^2R^2 + aR^3 = 0.$$

Faisons une inversion, le pôle étant la nouvelle origine et la puissance d'inversion étant égale à λ. Il faut remplacer x par $\frac{\lambda x}{x^2 + y^2}$ et y par $\frac{\lambda y}{x^2 + y^2}$. L'équation devient

$$(x^2 + y^2)^2(a^4 - 2a^2R^2 + aR^3) + 4\lambda x(x^2 + y^2)(R^3 - aR^2 + a^3)$$
$$+ 4a^2\lambda^2x^2 + 2\lambda^2(a^2 - R^2)(x^2 + y^2) + 4a\lambda^3x + \lambda^4 = 0.$$

Écrivons maintenant que ces deux équations représentent la même courbe, nous avons

$$a^4 - 2a^2R^2 + aR^3 = \frac{\lambda(R^3 - aR^2 + a^3)}{a} = \lambda^2 = \frac{a\lambda}{R^3 - aR^2 + a^3} = \frac{\lambda^4}{a^4 - 2a^2R^2 + 4aR^3},$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \lambda = \frac{1}{a}(R^3 - aR^2 + a^3). \qquad 2a^3 - a^2R + 2aR^2 - R^3 = 0.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire

$$(2a - R)(a^2 + R^2) = 0.$$

Elle admet la racine réelle $\frac{R}{2}$, à laquelle correspond le pôle déjà mentionné, et deux racines imaginaires $\pm Ri$.

Les deux autres pôles sont donc imaginaires.

La puissance relative à chaque pôle est donnée par la formule (3). En particulier, pour $a = \frac{R}{2}$ on a $\lambda = \frac{5R^2}{4}$.

G. GARBE, 14e régiment d'artillerie, à Bordeaux.

Bonnes solutions par MM. Bros ; R. Bouvaist ; H. Janois, à Nantes ; L. Simon, section normale à Châlons-sur-Marne ; Louis Sine, à Lyon.

MÉCANIQUE

1690. — *On considère deux axes rectangulaires, Ox et Oy : l'un, Ox, horizontal, figure le sol ; l'autre, Oy, est vertical et ascendant. On lance en O un point pesant M avec une vitesse v_0 qui fait un angle aigu et positif φ avec Ox.*

1° *Montrer que la trajectoire du point M est une parabole, que toutes les paraboles (P) qui correspondent à une même vitesse v_0 ont une même directrice, la parallèle à Ox menée par le point le plus haut que le point M puisse atteindre sous l'impulsion initiale v_0. Trouver géométriquement le foyer, le sommet et le point de rencontre avec le sol de la parabole P qui correspond à un angle donné φ.*

2° *Déterminer géométriquement les deux paraboles P qui passent en un point donné A du plan des xy,*

ainsi que l'enveloppe des paraboles P. *On fait alors varier à la fois* v_0 *et* φ ; *il y a une infinité de paraboles* (π) *qui passent au point* A. *Trouver le lieu des sommets et le lieu des foyers des paraboles* (π).

3° *Trouver le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse sur la parabole* π *du point* M *quand il arrive en* A. *En chaque point de rencontre d'une parabole* π *avec* Ox *on élève une ordonnée égale à* $\frac{v^2}{2g}$, v *étant la vitesse en ce point. Trouver le lieu de l'extrémité de cette ordonnée.*

1. Les équations différentielles du mouvement du point M sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

g désignant l'intensité de la pesanteur au lieu considéré.

Intégrons ces équations deux fois de suite en remarquant qu'à l'instant initial le mobile est en O et que les composantes de sa vitesse sont $v_0 \cos\varphi$ et $v_0 \sin\varphi$: il vient les relations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi, \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 t \cos\varphi, \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\varphi. \end{cases}$$

L'élimination de t entre les deux dernières donne l'équation cartésienne de la trajectoire, c'est-à-dire

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi} + x \operatorname{tg}\varphi.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\operatorname{tg}\varphi = m$, $h = \frac{v_0^2}{2g}$, et remarquons que h est la hauteur maximum à laquelle s'élève le mobile sous l'impulsion initiale v_0, l'équation de la trajectoire devient

$$y = -\frac{x^2(1+m^2)}{4h} + mx.$$

C'est une parabole qui tourne sa concavité vers le bas et dont l'axe est parallèle à Oy.

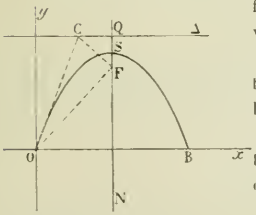
L'axe de la parabole a pour équation $x = \frac{2mh}{1+m^2}$, et la tangente au sommet, $y = \frac{m^2h}{1+m^2}$.

Le paramètre a pour valeur $\frac{2h}{1+m^2}$.

On déduit facilement de ces résultats l'équation de la directrice Δ, qui est

$$y = \frac{m^2h}{1+m^2} + \frac{h}{1+m^2} = h.$$

La directrice ne dépend donc que de l'impulsion initiale v_0. Lorsque φ est donné, on détermine facilement les éléments remarquables d'une parabole P de la façon suivante.



La vitesse initiale est tangente à la parabole en O : elle coupe la directrice en C ; le foyer F s'obtient en abaissant du point C une perpendiculaire sur la droite symétrique de Oy par rapport à OC.

Soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur la directrice, cette droite est l'axe de la parabole ; le sommet S est équidistant des points F et Q.

Le second point de rencontre avec le sol de la parabole P est le point B symétrique de O par rapport à l'axe QN.

2. Le problème revient au suivant : *Construire les foyers des paraboles qui admettent même directrice Δ et passent par deux points fixes* O *et* A.

Il suffit de tracer les cercles de centres O et A tangents à Δ. Ces deux cercles se rencontrent en général en deux points F et F′, qui achèvent de déterminer les deux paraboles P considérées.

Lorsque les cercles de centres O et A sont tangents, les deux paraboles P sont confondues ; l'enveloppe des paraboles P est donc le lieu des points A, centres des cercles tangents à la directrice Δ et aussi au cercle de centre O qui est tangent à Δ. Ce lieu est une parabole de foyer O et dont la directrice est la symétrique de Ox par rapport à Δ ; Δ est d'ailleurs la tangente au sommet de cette parabole dite *parabole de sûreté* : v_0 étant donné, le mobile M n'atteindra jamais que les points A intérieurs ou ceux situés sur la courbe.

Lorsque v_0 et φ varient à la fois, les paraboles π qui passent par le point A (α, β) dépendent de deux paramètres variables h et m, liés par la relation $\beta = -\dfrac{\alpha^2(1+m^2)}{4h} + m\alpha$: on tire de là

$$4h = \frac{\alpha^2(1+m^2)}{m\alpha - \beta}.$$

Les coordonnées du sommet d'une parabole π ont été calculées dans la première partie ; elles deviennent en remplaçant h par cette valeur

$$x = \frac{m\alpha^2}{2(m\alpha - \beta)}, \qquad y = \frac{m^2\alpha^2}{4(m\alpha - \beta)}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu des sommets en fonction du paramètre variable m.

L'équation cartésienne s'obtient sans difficulté, c'est

$$y = \frac{\beta x^2}{\alpha(2x - \alpha)} = \frac{\beta(2x+\alpha)}{4\alpha} + \frac{\alpha\beta}{4(2x-\alpha)}.$$

Elle représente une hyperbole passant par les points O et A et dont les asymptotes sont

$$2x - \alpha = 0, \qquad 2\beta x - 4\alpha y + \alpha\beta = 0.$$

Le lieu des foyers s'obtient en remarquant que ce point est sur l'axe et que son ordonnée est égale à celle du sommet diminuée de $\dfrac{h}{1+m^2}$ qui représente le demi-paramètre.

Les équations paramétriques du lieu sont donc

$$x = \frac{m\alpha^2}{2(m\alpha - \beta)}, \qquad y = \frac{\alpha^2(m^2-1)}{4(m\alpha - \beta)}.$$

Son équation cartésienne est

$$4\alpha\beta y = \frac{4\beta^2x^2 - \alpha^2(2x-\alpha)^2}{2x-\alpha} = 2x(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\alpha^3\beta^2}{2x-\alpha}.$$

Ce lieu est donc aussi une hyperbole dont les asymptotes sont

$$2x - \alpha = 0, \qquad 2x(\beta^2 - \alpha^2) - 4\alpha\beta y + \alpha(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

3. Désignons par t le temps employé par le mobile pour arriver en A : les composantes de la vitesse en A sont donc $(v_0 \cos\varphi,\ v_0 \sin\varphi - gt)$, les coordonnées x et y de l'extrémité du vecteur vitesse en A sur la parabole π sont par suite

$$x = \alpha + v_0 \cos\varphi, \qquad y = \beta + v_0 \sin\varphi - gt;$$

on a d'ailleurs

$$\alpha = v_0 t \cos\varphi, \qquad \beta = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\varphi.$$

Les deux premières équations donnent $v_0 \cos\varphi$ et $v_0 \sin\varphi$; en portant ces valeurs dans les deux dernières, on a les équations paramétriques du lieu, c'est-à-dire

$$x = \frac{\alpha}{t}(1+t), \qquad y = \frac{\beta}{t}(1+t) - \frac{gt}{2}.$$

L'équation cartésienne est

$$\alpha(y-\beta) = \beta(x-\alpha) - \frac{g\alpha^2}{x-\alpha} \qquad \text{ou bien} \qquad \alpha y = \beta x - \frac{g\alpha^2}{x-\alpha}.$$

Elle représente une hyperbole dont les asymptotes sont

$$x - \alpha = 0, \qquad \alpha y - \beta x = 0.$$

Le point A est le centre de cette courbe.

Le dernier lieu n'est autre que le lieu du point de rencontre de la directrice $y = h$ et de la parallèle $x - \frac{4mh}{1+m^2} = 0$ à l'axe menée par le point B.

Le lieu s'obtient en éliminant m et h entre les trois équations

$$y = h, \qquad x - \frac{4mh}{1+m^2} = 0, \qquad \beta = -\frac{(1+m^2)\alpha^2}{4h} + m\alpha.$$

Les équations paramétriques du lieu sont

$$x = \frac{m\alpha^2}{m\alpha - \beta}, \qquad y = \frac{\alpha^2(1+m^2)}{4(m\alpha - \beta)}.$$

L'équation cartésienne est

$$4\alpha\beta y = \frac{\beta^2 x^2 + \alpha^2(x-\alpha)^2}{x-\alpha} = x(\alpha^2+\beta^2) - \alpha(\alpha^2-\beta^2) + \frac{\alpha^2\beta^2}{x-\alpha}.$$

C'est encore une hyperbole dont les asymptotes sont

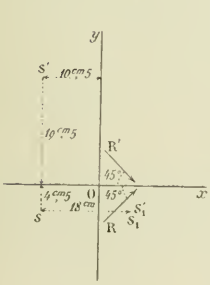
$$x - \alpha = 0, \qquad x(\alpha^2+\beta^2) - 4\alpha\beta y - \alpha(\alpha^2-\beta^2) = 0.$$

Ch. GUILLERME et BROS.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; Groscolas, à Besançon ; L. Sire, à Lyon ; R. Bouvaist ; G. Fougry, à Roanne.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1731. — *Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (qui n'auront pas été passés à l'encre), les points (s, s') et (s_1, s'_1) sont définis par le croquis ci-joint.*



On considère la sphère Σ, de 6cm de rayon, tangente à la droite (ss_1, $s's'_1$) en son milieu, et dont le centre est situé dans le plan vertical contenant cette droite et au-dessus d'elle.

On demande de représenter l'ensemble des portions des surfaces des cônes de sommets (s, s') et (s_1, s'_1) circonscrits à la sphère Σ, qui sont limitées d'une part aux cercles de contact de ces cônes et de cette sphère, de l'autre à la courbe commune à ces deux cônes, la sphère étant supposée enlevée.

La surface ainsi définie (supposée opaque bien que sans épaisseur) sera d'ailleurs représentée avec les ombres produites par des rayons lumineux parallèles à la direction (R, R') dont les projections sont inclinées à 45° sur Ox.

Les lignes de contour du solide représenté seront dessinées en noir (trait plein pour les parties vues, ponctué pour les parties cachées) ; les lignes de construction en rouge ; les lignes d'ombre en bleu (trait plein pour les parties vues, ponctué pour les parties cachées, interrompu pour les parties parasites utiles à tracer en vue de faire comprendre la construction). Les parties de surface vues dans l'ombre seront recouvertes de hachures bleues, fines et largement espacées.

On indiquera la construction d'un point courant avec la tangente en ce point pour chacune des lignes de contour.

(Ecole nationale des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1908.)

Les deux cônes étant circonscrits à une même sphère se coupent suivant deux courbes planes. Comme ils ont en commun toute la génératrice SS_1 et ont même plan tangent le long de cette génératrice, l'une des courbes planes se réduit à cette génératrice qui compte pour une droite double, en sorte qu'il ne reste qu'une seule courbe plane à déterminer. Les deux cônes admettent pour plan de symétrie le plan de front qui contient leurs sommets et leur génératrice commune ; la courbe plane cherchée admet donc ce plan comme plan de symétrie : elle est par suite dans un plan de bout qui passe par l'intersection des deux génératrices tangentes au contour apparent vertical de la sphère et qui ne coïncident pas. Si maintenant l'on remarque que la figure formée par l'ensemble des deux cônes a pour plan de symétrie le plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à la génératrice commune, on voit que la courbe plane cherchée ne peut être contenue que dans ce plan.

C'est donc l'ellipse section de chacun des deux cônes par le plan de bout $a'b'$ (1).

Les deux cercles de contact de la sphère avec chacun des cônes sont aussi dans les plans de bout menés par le point (a, a') perpendiculairement à leur axe, en sorte que le solide commun défini dans l'énoncé se projette verticalement à l'intérieur du quadrilatère $a'b'c'd'$.

Sur le plan horizontal le cône S a pour contour apparent les deux tangentes menées du point s au contour apparent de la sphère, tandis que le second cône dont le sommet se projette à l'intérieur de ce contour apparent n'a aucune génératrice de contour apparent horizontal.

La projection horizontale du solide commun limité comme l'indique l'énoncé se compose des deux ellipses, projections des cercles de contact AC et AD, qui lui servent en quelque sorte de bases, des portions de génératrices du cône S comprises entre son plan de contact et l'ellipse commune aux deux cônes et de cette ellipse elle-même.

Nous avons immédiatement les deux axes des deux premières ellipses. Ainsi pour la projection du cercle AC, il suffit de considérer son diamètre horizontal, dirigé suivant la ligne de rappel du centre qui donne le demi-grand axe ef, puis de projeter son diamètre de front en ac pour avoir les sommets de l'ellipse. Construction analogue pour le cercle de contact du second cône.

L'ellipse commune aux deux cônes étant symétrique par rapport au plan de front SS_1 a l'un de ses axes dans ce plan et par suite la projection horizontale de cet axe est l'un des axes de sa projection : c'est la droite ab. L'autre axe lui est perpendiculaire en son milieu G. Nous aurons sa longueur en construisant la corde du cercle section droite du cône passant par G et projetée verticalement au point g'. A cet effet, rabattons cette section droite sur le plan de front mené par son centre et menons dans ce rabattement la corde perpendiculaire à la charnière au point g'. Sa longueur $g'g''$ nous donne la vraie grandeur du second axe de l'ellipse projection horizontale dirigé suivant le diamètre de bout gk.

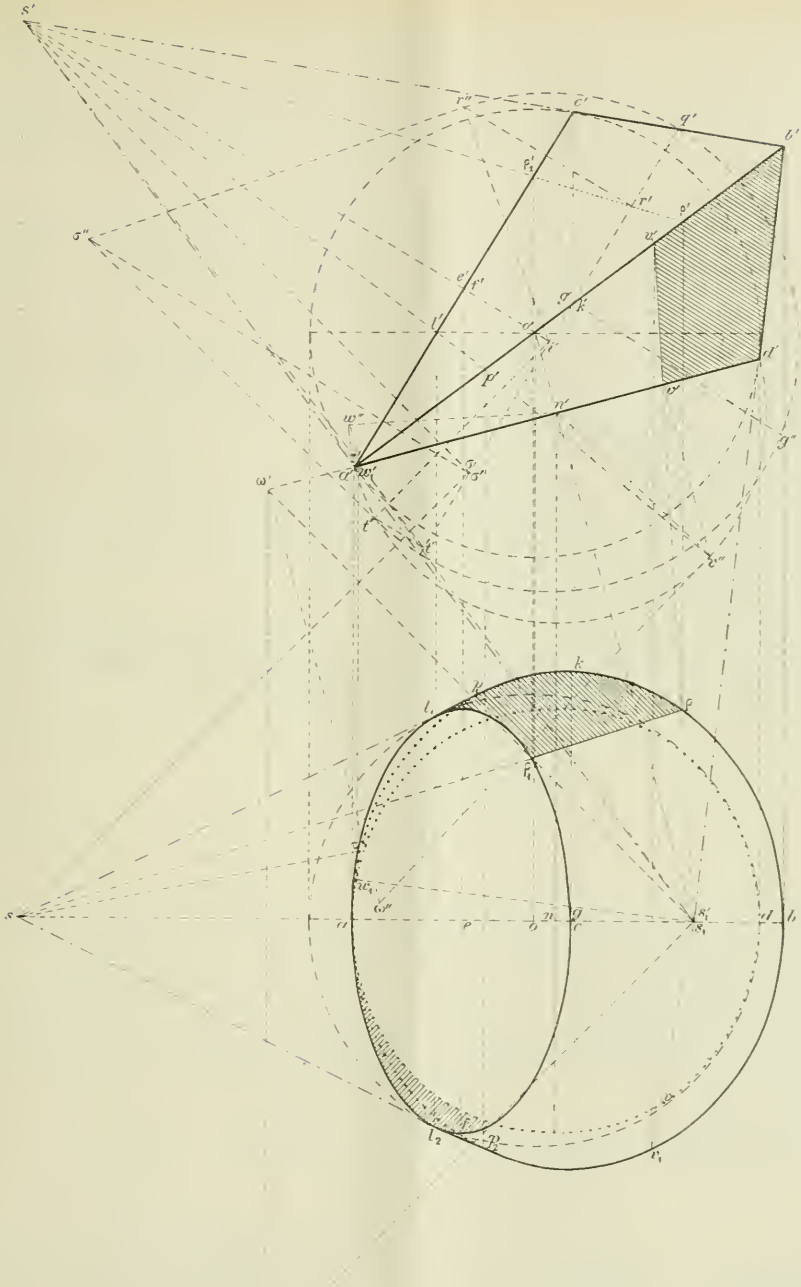
Points remarquables. — Nous devons déterminer directement les points où chacune des ellipses touche le contour apparent horizontal du cône S. Celle qui est la projection du cercle de contact AC touche le contour apparent aux points où sa tangente est dans un plan vertical tangent au cône, ou, ce qui revient au même, tangent à la sphère ; c'est donc aux points où elle traverse le plan de contour apparent horizontal de la sphère ; on a de suite la projection verticale de ces points en l' et on en déduit leurs projections horizontales l_1, l_2.

Quant à l'ellipse AB, nous pouvons déterminer les points où elle touche les génératrices de contour apparent horizontal en projetant horizontalement les points p' où ces génératrices traversent son plan.

La projection horizontale du solide commun se trouve ainsi bien déterminée. On en découvre toute l'ellipse al_1cl_2, la portion p_1kbp_2 de l'ellipse section plane commune, ces deux courbes étant reliées par les génératrices l_1p_1 et l_2p_2. Toute la troisième ellipse est cachée.

Ombre propre du solide. — Nous chercherons séparément les génératrices d'ombre propre sur chaque cône en lui menant des plans tangents parallèles à la direction des rayons lumineux. A cet effet, menons par s, s' la parallèle à cette direction et prenons sa trace σ, σ' sur un plan de base du cône, par exemple le plan de bout $i'q'$. En rabattant cette base autour de son diamètre de front, en même temps que le point Σ, nous n'avons qu'à mener de σ'' les tangentes au cercle rabattu et relever les points de contact pour avoir les génératrices de contact des plans tangents cherchés, $s'\rho'$, $s\rho$, $s'\tau'$, $s\tau$. La portion de surface éclairée est celle qui tourne sa

(1) On pourrait construire cette courbe par points en donnant à chacun des cônes la base de Monge définie par le cylindre vertical circonscrit à la sphère donnée.



Échelle : $\frac{2}{3}$

concavité vers la parallèle aux rayons lumineux menée par le sommet du cône, et qui correspond à l'arc du cercle de base qui tourne sa concavité vers le point Σ. Toute la portion de surface vue en projection verticale est donc éclairée tandis qu'en projection horizontale la portion de surface $t_1p_1\varrho\varrho_1$ est dans l'ombre.

Pour le second cône, la même construction, en lui donnant pour base le cercle AD, nous donne la trace $\omega\omega'$ de la parallèle aux rayons lumineux que nous rabattons en ω'' en même temps que le cercle AD. Les tangentes telles que $\omega''v''$ donnent les génératrices de contact $s'_1v'v'_1$, s_1v_1 et $s'_1\omega'_1$, $s_1\omega_1$, dont nous ne conservons que les portions limitées par les deux ellipses ad et ab. Ici la partie éclairée est celle qui tourne sa convexité vers la parallèle à la direction opposée à celle des rayons lumineux $s_1\omega$, $s'_1\omega'$, en sorte que sur la projection verticale on en découvre ce qui se projette à l'intérieur du triangle $a'v'v'_1$, tandis que la portion $v'd'b'v'_1$ est dans l'ombre. En projection horizontale toute la surface conique S_1 est cachée.

Les portions de surface qui se projettent verticalement entre le point a' et les deux fragments de génératrice d'ombre qui en sont très voisins sur les deux cônes sont éclairées mais cachées toutes deux.

Tout ce qui précède s'applique à la surface convexe qui limite le solide commun ; mais si l'on suppose le solide creux et ouvert par ses deux bases, on découvre une partie de la surface concave intérieure au solide et la région de cette surface qui est dans l'ombre correspond à la surface convexe éclairée et réciproquement. On a ainsi la représentation figurée sur l'épure.

Il y a lieu de remarquer que l'ombre propre du solide ne comporte aucune autre région provenant de l'ombre portée par l'un des cônes sur l'autre. En effet, il n'y a que le cône supérieur S qui pourrait porter une ombre sur l'autre. Or, chacun des plans tangents qui détermine la séparation de l'espace éclairé de celui qui est dans l'ombre coupe le cône inférieur S_1 suivant une courbe tangente à la base AB, mais située par rapport à cette base de l'autre côté que le sommet S_1 puisque cette courbe passe par le point S qui est sur la même nappe de la surface conique et par suite n'entame pas notre solide.

D'autre part le cylindre d'ombre formé par les rayons lumineux qui s'appuient sur l'ellipse AB, ayant même base plane que le cône S_1, le coupe suivant une seconde courbe plane, qui traverse l'ellipse aux points où les deux surfaces ont le même plan tangent, c'est-à-dire aux points V_1 et W_1, pieds des génératrices d'ombre propre. Comme le sommet S_1 est extérieur au cylindre, puisque la parallèle aux génératrices perce le plan de base à l'extérieur de l'ellipse AB, il en est de même de chacune des génératrices SV_1 et SW_1, et par suite la courbe d'ombre portée par la base AB est située dans la région de l'ombre propre du cône S_1.

PHYSIQUE

1691. — *Une horloge dont le balancier, qui est homogène, est formé d'une matière dont la densité est* 4,5 *et le coefficient de dilatation linéaire* 0,000 018, *a été réglée à* 0° *et à la pression* 760^{mm}. *La température peut varier entre* — 10° *et* + 30°, *la pression entre* 730 *et* 780. *Dans quelles limites peut varier l'avance ou le retard de l'horloge ?*

On supposera l'air toujours sec et on pourra laisser de côté les quantités pratiquement négligeables.

Qu'y aurait-il de changé si le balancier n'était pas homogène, par exemple si, tout en ayant son centre de gravité à une certaine distance de l'axe de suspension, il avait une forme extérieure symétrique par rapport à cet axe ?

Etudions d'abord la variation de la durée d'oscillation t du balancier.

Si g' désigne la gravité apparente, on a d'abord

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Désignons par g la gravité réelle, par a et μ les masses spécifiques de l'air et de la matière du pendule, par α et λ les coefficients de dilatation de l'air et du pendule, par p la pression et par θ la

température ; on a

$$l = l_0(1 + \lambda\theta),$$

$$g' = g\left(1 - \frac{a}{\mu}\right) = g\left\{1 - \frac{a_0}{\mu_0}(1 + 3\lambda\theta)\frac{p}{p_0}\frac{1}{1 + \alpha\theta}\right\}.$$

Remplaçons et négligeons d'abord les termes du second ordre en $\frac{a_0}{\mu_0}$:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\sqrt{(1 + \lambda\theta)\left[1 + \frac{a_0}{\mu_0}(1 + 3\lambda\theta)\frac{p}{p_0}\frac{1}{1 + \alpha\theta}\right]}.$$

Négligeons maintenant les termes qui contiennent le produit $\lambda\frac{a_0}{\mu_0}$:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\sqrt{1 + \lambda\theta + \frac{a_0}{\mu_0}\frac{p}{p_0}\frac{1}{1 + \alpha\theta}}.$$

Négligeons enfin les termes du second ordre en λ,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\left\{1 + \frac{1}{2}\lambda\theta + \frac{1}{2}\frac{a_0}{\mu_0}\frac{p}{p_0}\frac{1}{1 + \alpha\theta}\right\}.$$

En particulier, dans les conditions du réglage, on a

$$t_0 = \pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a_0}{\mu_0}\right).$$

Des variations de θ et de p produiront une variation de t donnée par l'expression

$$dt = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\left\{\lambda d\theta + \frac{a_0}{\mu_0 p_0}\left(\frac{dp}{1 + \alpha\theta} - \frac{p\alpha d\theta}{(1 + \alpha\theta)^2}\right)\right\}.$$

En particulier, à partir des conditions du réglage, où $\theta = 0$ et $p = p_0$,

$$dt_0 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\left[\left(\lambda - \frac{a_0}{\mu_0}\alpha\right)d\theta + \frac{a_0}{\mu_0}\frac{dp}{p_0}\right].$$

Faisons l'application numérique :

$$\lambda = 0{,}000018, \qquad \alpha = \frac{1}{273}, \qquad a_0 = \frac{1}{773},$$

$$\frac{a_0}{\mu_0}\alpha = 0{,}000001. \qquad \lambda - \frac{a_0}{\mu_0}\alpha = 0{,}000017, \qquad \frac{a_0}{\mu_0 p_0} = 0{,}00000378,$$

la pression étant évaluée en centimètres de mercure.

Calculons la variation relative $\frac{dt_0}{t_0}$ en réduisant t_0 à son premier terme ; il vient

$$\frac{dt_0}{t_0} = \frac{1}{2}(0{,}000017d\theta + 0{,}00000378dp).$$

Les deux termes étant de même signe, associons la température la plus élevée à la pression la plus forte :

$$d\theta = +30, \qquad dp = +2 \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_0}{t_0} = 0{,}000259.$$

Associons de même la température la plus basse à la pression la plus faible :

$$d\theta = -10, \qquad dp = -3 \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_0}{t_0} = -0{,}000091.$$

Etudions maintenant la marche de l'horloge en fonction de la durée de l'oscillation.

Soit, d'une manière générale, t la durée d'oscillation d'une horloge réglée, n le nombre d'oscillations que le balancier fait alors en un jour, t' la durée d'oscillation et n' le nombre d'oscillations quand l'horloge n'est pas réglée,

$$nt = n't'.$$

Quand, par exemple, l'horloge retarde et qu'au bout d'un jour le balancier a fait n' oscillations, il en manque $n - n'$ et l'horloge retarde de $(n - n')t$, c'est-à-dire d'une fraction de jour égale à

$$\frac{(n-n')t}{nt} = \frac{n-n'}{n} = \frac{t'-t}{t'}.$$

Appliquons au cas actuel; le retard aura pour expression $\frac{dt_0}{t_0 + dt_0}$ ou sensiblement $\frac{dt_0}{t_0}$, soit, en secondes, $\frac{dt_0}{t_0} \times 86400$.

Le retard maximum sera donc $0{,}000259 \times 86400 = 22^{\text{sec}},38$.

L'avance maximum sera $0{,}000091 \times 86400 = 7^{\text{sec}},86$.

Si le balancier n'est pas homogène, l'influence de la poussée change, et s'il est symétrique par rapport à l'axe de suspension, l'influence de la poussée se trouve complètement éliminée, celle-ci étant appliquée sur l'axe.

QUESTIONS PROPOSÉES

1773. — Si la série u_n à termes tous positifs est convergente, il en est de même de la série

$$v_n = n(u_n - u_{n+1}),$$

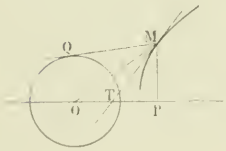
et ces deux séries ont la même somme.

La même transformation s'applique à une série u_n à termes quelconques, quand $\lim_{n=\infty} nu_n = 0$.

Appliquer aux séries

$$u_n = x^n, \qquad u_n = \frac{1}{n^2 - 1}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1} x^{n+1}.$$

G. Valensi.



1774. — Trouver une courbe telle que le cercle décrit sur la tangente MT comme diamètre soit orthogonal à un cercle fixe de centre O, et que le rapport anharmonique $M(QTOP) = -1$, MQ étant une tangente au cercle O, et MP l'ordonnée du point M.

Benoit-Gonin.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 7. Avril 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

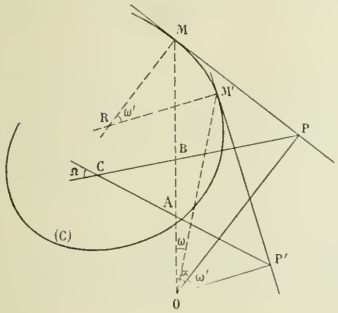
SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES

par M. **Louis Sire**, à Lyon.

I

Rayons de courbure d'une courbe et de sa podaire.

1. — Considérons une courbe plane (C); prenons sa podaire par rapport à un point O. Soient M, M′ deux points infiniment voisins de la courbe; P, P′ les points correspondants de la podaire, C le point de rencontre des normales en ces deux derniers points.



Posons

$$\widehat{MOM'} = \omega, \qquad \widehat{POP'} = \widehat{MRM'} = \omega',$$
$$\widehat{MOP} = \alpha, \qquad \widehat{PCP'} = \Omega.$$

Désignons par R, R_p les rayons de courbure des deux courbes aux points M, P.

La normale au point P passe par le milieu B de OM, donc

$$\widehat{CBA} = 2\alpha.$$

Les triangles CBA et OAP′ nous donnent

$$\Omega + 2\alpha = (\alpha + \omega') + (\alpha + \omega' - \omega),$$

c'est-à-dire

$$\Omega = 2\omega' - \omega.$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{1}{R_p} = \lim \frac{\sin \Omega}{PP'} = \lim \frac{\sin(2\omega' - \omega)}{PP'} = \lim\left(\frac{\sin 2\omega'}{PP'} - \frac{\sin \omega}{PP'}\right),$$

ce que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{R_p} = \lim\left(\frac{2\sin\omega'}{PP'} - \frac{\sin\omega}{MM'}\cdot\frac{MM'}{\sin\omega'}\cdot\frac{\sin\omega'}{PP'}\right).$$

Soient u, v les rayons des cercles circonscrits aux triangles OPP′, OMM′; nous avons

$$\frac{1}{R_p} = \lim\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2v}\cdot\frac{MM'}{\sin\omega'}\cdot\frac{1}{2u}\right).$$

Désignons par ρ, ρ_p les rayons des cercles passant par O et tangents en M, P à la courbe (C) et à sa podaire; il viendra finalement

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{\rho_p} - \frac{R}{4\rho\rho_p},$$

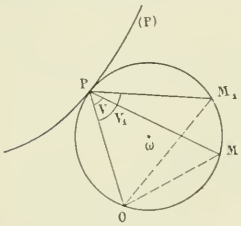
ou encore

$$\frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0;$$

ce sera notre formule F_8.

Rayons de courbure d'une courbe et de sa quasi-podaire.

2. — Je vais étendre le résultat précédent au cas où le point P est le pied d'une oblique issue du point O à la tangente en M à la courbe (C), tel que $\widehat{MPO} = V =$ constante. Le point P décrit une courbe (P) que j'appellerai *quasi-podaire* de la courbe (C) par rapport au point O et correspondant à l'angle V; inversement la courbe (C) sera une *quasi-podaire négative* de la courbe (P).



Considérons la transformation qui, à un point P de la courbe (P) associe la droite PM telle que $\widehat{OPM} = V$; c'est une transformation de contact. Par suite, le point M où la droite PM touche son enveloppe ne dépend que de la tangente en P à la courbe (P); il ne changera pas si nous remplaçons cette courbe par le cercle ω qui passe par O et qui lui est tangent en P. Dans ce cas la droite PM passe par le point fixe M du cercle. Donc M est le point limite cherché; de sorte que si nous faisons varier V, tous les points limites seront sur le cercle ω. Soit M_1 le point limite correspondant à l'angle V_1; nous avons

$$\widehat{M_1OM} = V_1 - V$$

et

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{\sin V}{\sin V_1};$$

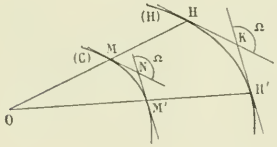
par suite:

Deux quasi-podaires négatives, relatives au même point et à la même courbe, se déduisent l'une de l'autre par une homothétie suivie d'une rotation.

En particulier, si $V_1 = \frac{\pi}{2}$, nous voyons que:

Une quasi-podaire négative correspondant à l'angle V se déduit de la podaire négative par l'homothétie $\sin V$ *suivie de la rotation* $\frac{\pi}{2} - V$.

3. — Nous sommes donc conduits à calculer le rayon de courbure en un point de l'homothétique d'une courbe plane (C) par rapport à un point O.



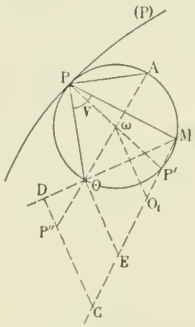
Soient M, M' deux points infiniment voisins de (C), H, H' les points correspondants de l'homothétique (H). Posons

$$\widehat{HKH'} = \widehat{MNM'} = \Omega;$$

nous avons

$$R_H = \lim \frac{HH'}{\sin\Omega} = k.\lim \frac{MM'}{\sin\Omega} = k.R.$$

4. — Prenons la quasi-podaire négative d'une courbe (P) par rapport à un point O, correspondant à l'angle V. Soit A le point correspondant de la podaire négative. Si R, R_p sont les rayons de courbure aux points A, P, la formule F_s nous donne



$$\frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0.$$

D'autre part, les courbes (A) et (M) sont homothétiques dans le rapport $\sin V$, d'où, pour le rayon de courbure R_1 au point M,

$$R_1 = R \sin V;$$

d'un autre côté, si ρ_1 est le rayon du cercle qui passe par O et qui est tangent en M à la droite MP, nous avons $\rho_1 = \rho \sin V$, d'où

$$\frac{R}{\rho} = \frac{R_1}{\rho_1},$$

par suite:

Le rapport $\frac{R}{\rho}$ *est indépendant de l'angle V; il est le même aux points homologues d'une homothétie.*

Notre formule F_s devient donc

$$\frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R_1}{4\rho_1} - 1 = 0,$$

c'est la généralisation de la formule F_s; nous l'appellerons $F_{s'}$.

5. — Nous avons vu que

$$\frac{R}{\rho} = \frac{R_1}{\rho_1} = k,$$

de sorte que si C est le centre de courbure de la quasi-podaire négative en M, D sa projection sur OM, O_1 le centre du cercle de rayon ρ_1, E le point où ce cercle coupe à nouveau la normale MP′, nous avons

$$MC = k.MO_1,$$

d'où

$$EC = (k-2)MO_1,$$

par suite

$$OD = \left(\frac{k}{2} - 1\right)OM.$$

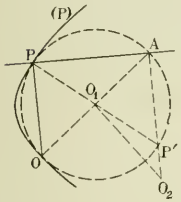
Le lieu du point D est donc un cercle homothétique du cercle ω par rapport à O, le rapport d'homothétie étant $\frac{k}{2} - 1$, lorsqu'on fait varier V.

Par suite, la droite CD passe par un point fixe P″ de la droite ωO et, comme $\widehat{P''CP'} = \widehat{OMP'} = \text{const.}$ lorsque M décrit le cercle ω, le lieu du point C est un cercle passant par P′, P″; c'est-à-dire que :

Le lieu des centres de courbure des quasi-podaires négatives d'une courbe (P) *par rapport à un point* O *et correspondant à un même point* P *est un cercle.*

Identité du cercle de courbure et du cercle osculateur.

6. — Prenons la podaire négative d'une courbe (P) par rapport à un de ses points O et supposons que le point P se rapproche indéfiniment de O. Le cercle O_1 de rayon ρ_p tend vers un cercle ayant trois points communs en O avec la courbe, c'est-à-dire vers le cercle osculateur en O à la courbe. Le rayon ρ du cercle O_2 devient infini et la formule F_s nous donne



$$\rho_p = R_p,$$

c'est-à-dire que :

Le rayon du cercle osculateur est égal au rayon de courbure.

Rayon de courbure de la parabole.

7. — Prenons la podaire négative d'une droite Δ par rapport à un point O ; c'est une parabole de foyer O et de tangente au sommet Δ. La formule F_s, dans laquelle nous faisons $R_p = \infty$, nous donne $R = 4\rho$, c'est-à-dire :

Le rayon de courbure en un point d'une parabole est égal à 4 fois le rayon du cercle passant par son foyer et tangent à la parabole au point considéré.

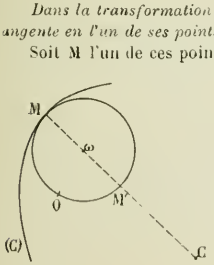
Points d'inflexion et de rebroussement dans les quasi podaires.

8. — Nous ne supposerons pas que le point M soit l'un des points de contact des tangentes issues du point O à la courbe (C), auquel cas $\rho_1 = \infty$ et la formule $F_{s'}$ se réduit à $\rho_p = R_p$, c'est-à-dire à une identité, d'après 6, en supposant toutefois R fini en ce point, sinon la formule est indéterminée. De même, nous ne considérerons pas les points P de (P) pour lesquels $\rho_p = \infty$. Les homologues de ces points sont soit le point O, soit des points à l'infini.

La formule $F_{s'}$, dans laquelle nous faisons $R_p = \infty$, nous donne $R_1 = 4\rho_1$, c'est-à-dire, en tenant compte de 7 :

Dans la transformation par quasi-podaire, aux points M *de la courbe* (C), *tels que la parabole de foyer* O *et tangente en l'un de ses points à* (C) *ait un contact du second ordre avec* (C), *correspondent des points d'inflexion.*

Soit M l'un de ces points. Le rayon de courbure de la courbe en ce point étant égal à $4\rho_1$, son centre de courbure est en C tel que $CM' = MM'$.



Supposons alors que le point O décrive le cercle ω ; dans la transformation considérée, au point M correspondra toujours un point d'inflexion, puisque ρ_1 reste le même. Autrement dit, la parabole de foyer O et ayant un contact du second ordre avec (C) en M conservera ce contact ; par suite, en prenant M quelconque sur la courbe (C) et O convenablement, nous voyons que :

Le lieu des foyers des paraboles, qui ont, en un point donné, un contact du second ordre avec une courbe donnée, est un cercle homothétique, dans le rapport $\frac{1}{4}$, *du cercle de courbure de la courbe, par rapport au point donné.*

La formule F_5, dans laquelle nous faisons $R_1 = 0$ nous donne $\rho_p = R_p$, c'est-à-dire que :

Dans la transformation par quasi-polaire négative, aux points de contact des cercles osculateurs passant par O correspondent des points de rebroussement.

(*A suivre.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1908.

1696. — *On considère les hyperboles équilatères qui ont pour sommet un point donné O et qui passent par un autre point donné A.*

1° *Trouver et construire la courbe lieu de leurs centres.*

2° *Calculer l'aire de la portion de plan comprise dans la boucle de cette courbe.*

3° *Trouver l'enveloppe des axes non transverses des hyperboles considérées.*

1° Prenons pour axe Ox la droite OA et désignons par $2a$ l'abscisse du point A.

L'équation générale des hyperboles équilatères qui passent par les points O et A est

$$x^2 + 2Bxy - y^2 - 2ax + 2Ey = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est $\frac{a}{E}$.

Le diamètre conjugué de cette direction a pour équation

$$(x + By - a) + \frac{a}{E}(Bx - y + E) = 0,$$

et son coefficient angulaire est $$-\frac{aB + E}{BE - a};$$

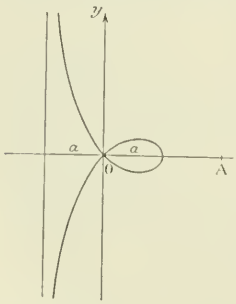
nous exprimerons que O est un sommet en écrivant que $-\frac{aB + E}{BE - a} = -\frac{E}{a}$.

Posons $E = -\lambda$, nous tirons de cette équation

$$B = \frac{2a\lambda}{a^2 - \lambda^2},$$

de sorte que l'équation générale des hyperboles équilatères devient

$$x^2 + \frac{4a\lambda}{a^2 - \lambda^2}xy - y^2 - 2ax - 2\lambda y = 0.$$



Les équations qui déterminent le centre sont

$$x + \frac{2a\lambda}{a^2 - \lambda^2}y - a = 0, \qquad \frac{2a\lambda}{a^2 - \lambda^2}x - y - \lambda = 0;$$

elles nous donnent immédiatement

$$x = a\frac{(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2}, \qquad y = \lambda\frac{(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2},$$

et celles-ci :

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{a}, \qquad \lambda = a\frac{y}{x},$$

de sorte que l'élimination de λ nous conduit à l'équation de la strophoïde droite que voici :

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

L'équation de son asymptote est $x + a = 0$; elle a la forme indiquée.

2° L'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = a \cdot \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega};$$

l'aire de la boucle est égale à

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos^2\omega - 1)^2}{\cos^2\omega}\, d\omega,$$

c'est-à-dire à

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\omega - 4 + \frac{1}{\cos^2\omega}\right) d\omega,$$

ou encore

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2\omega - 2 + \frac{1}{\cos^2\omega}\right) d\omega = a^2 \left[\sin 2\omega - 2\omega + \operatorname{tg}\omega\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right].$$

3° L'axe non transverse passant par le centre et étant parallèle à la tangente à l'origine a pour équation

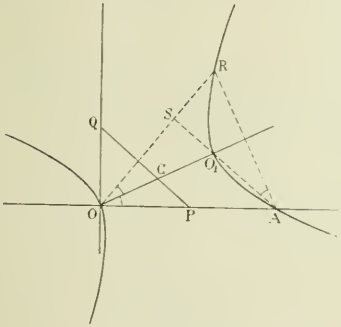
$$y - \frac{\lambda(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2} = -\frac{a}{\lambda}\left[x - a\frac{(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2}\right],$$

c'est-à-dire $\qquad ax + \lambda y + \lambda^2 - a^2 = 0;$

il enveloppe la parabole $\qquad y^2 - 4a(x - a) = 0,$

qui admet pour axe la droite Ox, dont le sommet est le point $x = a$ et le paramètre égal à $2a$.

Solution géométrique. — 1° Soit C le centre d'une des hyperboles équilatères considérées, P le milieu de OA.



Prenons le symétrique R de A par rapport à la droite OC.

Le triangle isocèle AOR a pour orthocentre le point O_1 second sommet de l'hyperbole; de là

$$\widehat{ROC} = \widehat{COA} = \widehat{O_1AR},$$

or

$$\widehat{QCO} = \widehat{SO_1C}.$$

d'autre part

$\widehat{SO_1C}$ a pour complément $\widehat{O_1AR}$,

$\widehat{QOC}$ a pour complément $\widehat{COA}$,

de là

$$\widehat{QCO} = \widehat{QOC},$$

$$\overline{QC} = \overline{QO}.$$

Le lieu de C est donc une strophoïde droite ayant O pour point double et P pour sommet.

3° L'axe non transverse est perpendiculaire en C à la droite OC. Il enveloppe donc la podaire négative de la strophoïde par rapport à son point double O, c'est-à-dire une parabole d'axe OP, dont la directrice passe par O et dont le foyer est le symétrique de O par rapport à P.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonne solution, par les coordonnées polaires et la géométrie, de M. Benoit-Gonin.

Bonnes solutions analytiques : MM. E. Berthelot, à Cholet ; G. Lach, à Denain ; H. Janois, à Nantes ; Bros ; L. Montaut, à Alger ; A. Duby, lycée de Dijon ; M. Pélissonnier, à Dijon ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; G. Foucry ; Amblard ; J. Biny.

Autre solution géométrique de MM. G. Garbe ; J. Biny.

Autre solution. — Soient $y - mx = 0$ l'axe qui passe à l'origine et $my + x + \lambda = 0$ l'axe perpendiculaire; l'équation de l'hyperbole équilatère indiquée dans l'énoncé est évidemment

$$(y - mx)^2 - (my + x + \lambda)^2 + \lambda^2 = 0.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer qu'elle passe au point A $(x = 2a,\ y = 0)$; ceci donne

$$a(m^2 - 1) - \lambda = 0, \qquad \lambda = a(m^2 - 1).$$

Le lieu du centre s'obtient alors en éliminant m entre les deux équations

$$y - mx = 0, \qquad my + x + a(m^2 - 1) = 0,$$

et l'enveloppe de l'axe non transverse en exprimant que l'équation

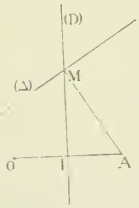
$$my + x + a(m^2 - 1) = 0$$

a une racine double en m. Les calculs sont immédiats.

Solution géométrique. — Dans une hyperbole équilatère, on a

$$x^2 = y^2 + a^2,$$

ce qui veut dire que la distance d'un point à l'axe imaginaire est égale à celle du sommet à la projection de ce point sur l'axe imaginaire. Autrement : soient A un sommet et M un point de l'hyperbole ; la perpendiculaire au milieu de AM passe au pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe non transverse.



Dans le cas actuel, O est un sommet, A un point de la courbe, la perpendiculaire (D) au milieu de OA passe au pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur l'axe imaginaire (Δ). Nous aurons donc cet axe en menant par A une droite quelconque AM qui rencontre (D) en M et en élevant (Δ) perpendiculaire à AM en M. La droite (Δ) enveloppe donc une parabole ayant pour foyer le point A et pour tangente au sommet la droite (D).

Le lieu du centre est la podaire de cette parabole par rapport au point O. Ce point est un point de la directrice ; donc la podaire est une strophoïde.

1697. — *Un point M décrit la cardioïde représentée par l'équation* $r = a(1 + \cos\theta)$.

Il se meut de telle façon que son accélération totale soit dirigée constamment vers le point de rebroussement A. Calculer, en fonction du rayon vecteur $AM = r$, *la vitesse, l'accélération totale et la composante normale de l'accélération totale. Déduire de là le rayon de courbure. Former l'équation de l'hodographe et construire cette courbe.*

L'intégrale des aires nous donne $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = c$, $\qquad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{c}{r^2}$.

D'autre part,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

par suite

$$v^2 = \frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad v^2 = \frac{c^2}{r^2}\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right].$$

Or, dans le cas actuel, on a

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad \text{et} \qquad \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta;$$

la formule qui donne v^2 devient donc

$$v^2 = \frac{c^2}{r^2}\left[1 + \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right], \qquad \text{ou} \qquad v^2 = \frac{c^2}{r^2(1+\cos\theta)^2}\,2(1+\cos\theta);$$

en définitive, on a

$$(1) \qquad v^2 = \frac{2ac^2}{r^3}$$

L'équation des forces vives nous donne

$$d\frac{mv^2}{2} = F\,dr.$$

F désignant la force qui sollicite le mobile. L'accélération totale γ_R, qui dans le cas actuel, s'exerce suivant le rayon vecteur, est donc fournie par l'équation

$$d\frac{v^2}{2} = \gamma_R\,dr;$$

cette relation nous donne immédiatement

$$(2) \qquad \gamma_R = -\frac{3ac^2}{r^4} = \gamma.$$

Enfin l'accélération tangentielle, γ_t, est donnée par

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt};$$

$\frac{dv}{dr}$ est fournie par l'égalité $v\frac{dv}{dr} = -\frac{3ac^2}{r^4}$, $\frac{dr}{d\theta}$ par $-a\sin\theta$, et $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{c}{r^2}$; nous avons donc finalement

$$\gamma_t^2 = \frac{9a^2c^4}{r^8v^2}a^2\sin^2\theta\,\frac{c^2}{r^4}$$

et, comme $a^2\sin^2\theta = a^2(1-\cos^2\theta)$, ou $a^2\sin^2\theta = a^2-(r-a)^2$, nous avons

$$\gamma_t^2 = \frac{9a^2c^6}{v^2r^{12}}(2ar-r^2),$$

(3) $$\gamma_t^2 = \frac{9ac^4(2a-r)}{2r^8}.$$

Nous avons donc finalement

$$\gamma_n^2 = \gamma^2-\gamma_t^2 = \frac{9ac^4}{2r^8}(2a-2a+r), \qquad \gamma_n^2 = \frac{9ac^4}{2r^7}.$$

D'ailleurs nous avons, en fonction du rayon de courbure et de la vitesse,

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}; \qquad \text{donc} \qquad \rho = \frac{v^2}{\gamma_n}, \qquad \rho^2 = \frac{v^4}{\gamma_n^2},$$

et, par suite,

$$\rho^2 = \frac{4a^2c^4}{r^6}\cdot\frac{2r^7}{9ac^4} = \frac{8ar}{9},$$

(4) $$\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{ar}.$$

Cette formule est bien connue.

L'angle V que fait la tangente avec le rayon vecteur est donné par la formule classique

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg} V = -\cot\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right);$$

l'angle V est donc égal à $\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$.

L'angle que fait cette direction avec la perpendiculaire au rayon vecteur orientée dans le sens $\theta+\frac{\pi}{2}$, est égal à $\frac{\theta}{2}$; donc on a

$$r\frac{d\theta}{dt} = v\cos\frac{\theta}{2} = \frac{c}{r}, \qquad \text{et ensuite} \qquad v = \frac{c}{r\cos\frac{\theta}{2}},$$

en grandeur et en signe.

En outre, les coordonnées polaires d'un point de l'hodographe sont

$$r_1 = v, \qquad \theta_1 = \theta + V = \frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2};$$

il suffit d'éliminer v et θ entre ces relations et l'équation

$$v = \frac{c}{a(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{c}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

pour avoir l'équation polaire de l'hodographe. On trouve ainsi

$$r_1 = \frac{b}{\cos^3 \dfrac{\theta_1 - \dfrac{\pi}{2}}{3}}, \qquad b \text{ désignant la constante } \frac{c}{2a}.$$

Faisons tourner l'axe polaire de l'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire changeons θ en $\frac{\pi}{2} + \theta$, nous aurons finalement l'équation que voici :

$$r = \frac{b}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}}.$$

Les coordonnées cartésiennes sont $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ou $x = b(1 - 3t^2)$, $y = b(3t - t^3)$ en désignant par t le paramètre $\operatorname{tg}\frac{\theta}{3}$.

Pour revenir aux anciens axes, il faut changer x en y et y en $-x$; on a ainsi

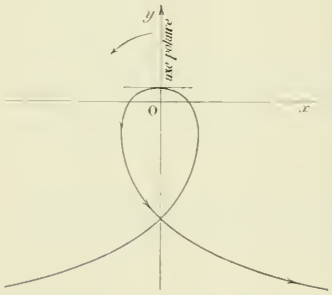
$$x = -b(3t - t^3), \qquad y = b(1 - 3t^2).$$

On peut construire cette courbe soit avec les équations précédentes, soit avec l'équation polaire

$$r = \frac{b}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}}$$

et faire ensuite tourner la figure de l'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour du pôle.

Il faut faire varier θ dans un intervalle d'étendue 6π. Si on change θ en $-\theta$, r ne change pas : donc il y a une symétrie par rapport à l'axe polaire et il suffit de faire varier θ de 0 à 3π. Si on change θ en $3\pi - \theta$, r se change en $-r$, et on retrouve la symétrie par rapport à l'axe polaire. Il suffit donc finalement de faire varier θ de 0 à $\frac{3\pi}{2}$.



Dans cet intervalle $\frac{\theta}{3}$ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ décroît de 1 à 0 et ρ croît de b à $+\infty$.

Si on forme la quantité

$$\delta = r\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \delta = r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

on constate qu'elle devient infinie et négative, quand θ tend vers $\frac{3\pi}{2}$ par valeurs plus petites que $\frac{3\pi}{2}$; la branche infinie est donc parabolique et l'on a la figure ci-contre.

Bonnes solutions : MM. L. Sire, à Lyon ; Bros ; A. Dury, à Dijon ; G. Foucry, à Roanne ; J. Biny.

1698. — *On considère trois forces appliquées suivant trois droites données, rectangulaires et non concourantes.*

Calculer, pour un point quelconque de l'espace, le moment résultant de ces trois forces. Déterminer l'axe central, c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels le moment résultant G a la même direction que la

résultante de translation R. *Trouver la surface engendrée par l'axe central quand les forces varient de telle manière que* G *et* R *conservent des valeurs données. Examiner en particulier le cas où* G *est nul.*

Prenons pour axes des parallèles aux forces et soient a et b les coordonnées de la trace sur le plan des xy de la force parallèle à Oz, a' et c' celles de la trace sur le plan des zx de la force parallèle à Oy et b'', c'', celles de la trace sur le plan des yz de la force parallèle à Ox. Les composantes de ces forces et les coordonnées de leurs points d'application forment les systèmes suivants :

$$\begin{matrix} 0, & 0, & Z; & \qquad 0, & Y, & 0; & \qquad X, & 0, & 0; \\ a, & b, & 0 & \qquad a', & 0, & c' & \qquad 0, & b'', & c''. \end{matrix}$$

La résultante générale a donc pour composantes X, Y, Z. Les composantes des moments par rapport au point x, y, z sont

$$\begin{matrix} (b-y)Z, & -(a-x)Z, & 0, \\ -(c'-z)Y, & 0, & (a'-x)Y, \\ 0, & (c''-z)X, & -(b''-y)X. \end{matrix}$$

Le moment résultant a donc pour composantes

$$L = (b-y)Z - (c'-z)Y, \qquad M = -(a-x)Z + (c''-z)X, \qquad N = (a'-x)Y - (b''-y)X.$$

Les équations de l'axe central sont alors

$$\frac{L}{X} = \frac{M}{Y} = \frac{N}{Z}.$$

D'autre part

$$LX + MY + NZ$$

est constant et égal au produit géométrique des vecteurs OR et OG : c'est donc G.R, en appelant G le moment résultant par rapport à un point de l'axe central ; par suite, on a

$$\frac{L}{X} = \frac{M}{Y} = \frac{N}{Z} = \frac{GR}{R^2} = \frac{G}{R}.$$

Appelons k cette valeur constante du rapport $\frac{G}{R}$, nous aurons

$$\begin{aligned} (b-y)Z - (c'-z)Y - kX &= 0, \\ -kY - (a-x)Z + (c''-z)X &= 0, \\ (a'-x)Y - (b''-y)X - kZ &= 0. \end{aligned}$$

Le lieu engendré par l'axe central s'obtient en éliminant X, Y, Z entre ces équations et est représenté par

$$\begin{vmatrix} -k, & z-c', & -(y-b) \\ -(z-c''), & -k, & x-a \\ y-b'', & -(x-a'), & -k \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée est

$$-k[k^2 + (x-a)(x-a')] + (z-c')[(x-a)(y-b'') - k(z-c'')] - (y-b)[(x-a')(z-c'') + k(y-b'')] = 0.$$

Les termes du troisième degré disparaissent et l'on voit de suite que cette équation représente une quadrique réglée.

On peut encore simplifier cette équation en prenant pour axe des z la ligne d'action de la force Z et en plaçant la force Y dans le plan des xy ; ceci donne $a = 0$, $b = 0$ et $c' = 0$ et l'équation devient

$$k[x(x-a') + y(y-b'') + z(z-c'')] + k^3 + b''xz - a'yz - c''xy + a'c''y = 0.$$

Quand G est nul, k est nul, et on a l'hyperboloïde

$$b''xz - a'yz - c''xy + a'c''y = 0,$$

qui admet les trois droites données pour directrices.

Le lieu trouvé reste le même quand G et R varient en gardant un rapport constant.

BROS.

Bonne solution de MM. A. Duby, à Dijon ; J. Bigy.

1699. — *Une bouteille de Leyde cylindrique, d'un diamètre extérieur de* 20^{cm}, *est chargée au moyen d'une machine à influence. Les armatures intérieure et extérieure de la bouteille sont constituées par 2 feuilles de papier d'étain collées sur la paroi latérale sur une hauteur de* 30^{cm}. *L'épaisseur du verre séparant les deux armatures est de* 1^{mm}. *Son pouvoir inducteur spécifique est de* 3.

1° *Evaluer en microfarads la capacité de la bouteille. On assimilera pour ce calcul la bouteille à un condensateur plan ayant même surface d'armatures (1 microfarad est la capacité d'une sphère de 9 km. de rayon).*

2° *Evaluer en coulombs la charge de la bouteille lorsque la différence de potentiel entre les deux armatures est de 10 000 volts.*

3° *Évaluer le nombre de kilogrammètres nécessaires pour actionner la machine à influence pendant la charge de la bouteille sous 10 000 volts. On ne tiendra pas compte des déperditions d'électricité ni du travail absorbé par les frottements.*

4° *On veut faire partir un détonateur électrique au moyen d'une batterie de bouteilles identiques à la bouteille étudiée, et chargées dans les mêmes conditions. Dans ce détonateur, le feu est mis à l'explosif par un fil très fin de cuivre qui est traversé par la décharge de la batterie et par suite s'échauffe. On admet que toute l'énergie électrique est transformée, sans aucune perte, en chaleur servant à échauffer le fil. Il faut que celui-ci s'élève à une température de 400° au-dessus de la température ambiante pour amener sûrement l'inflammation.*

On demande le nombre de bouteilles, associées en quantité, dont doit se composer la batterie. Longueur du fil fin de cuivre, 10^{cm} ; *diamètre,* $0^{mm},1$; *masse spécifique du cuivre,* 9 ; *chaleur spécifique,* 0,09.

5° *On décharge la même batterie en faisant jaillir une étincelle entre deux sphères conductrices enfermées à l'intérieur d'une ampoule en verre de* 100^{cm^3} *de capacité. Cette ampoule a été remplie d'air à la pression atmosphérique normale et à la température de* 20°. *On demande d'évaluer en centimètres de mercure l'augmentation de pression consécutive à l'étincelle en supposant que celle-ci n'échauffe que l'air. Il faut* 0,17 *petites calories pour échauffer de* 1° *un gramme d'air dans les conditions de l'expérience.*

6° *On considère une bouteille de Leyde identique aux précédentes sauf que l'épaisseur du verre est de* 1^{cm}. *On demande l'erreur commise dans l'évaluation de la capacité, lorsque l'on assimile la bouteille à un condensateur plan ayant pour surface la surface de l'armature extérieure. On donnera cette erreur en tant pour cent de la valeur réelle de la capacité.*

Note. — On ne demande dans tous ces calculs que l'approximation que donne la règle ordinaire à calculs de 26^{cm}, *soit 2 ou 3 chiffres exacts.*

1° En unités électrostatiques C. G. S. et en négligeant, comme l'indique l'énoncé, la différence de surface des deux armatures, la capacité est donnée par la formule

$$C = k\frac{2\pi rh}{4\pi e} = 3\,\frac{10 \times 30}{2 \times 0,1} = \frac{9000}{2}\cdot$$

Or un microfarad vaut 900 000 unités C. G. S. ; donc

$$C = \frac{1}{200} \text{ microfarad.}$$

2° La charge est liée à la capacité et à la différence de potentiel par la formule générale

$$Q = CV.$$

Nous aurons Q en coulombs en évaluant la capacité en farads, c'est-à-dire avec une unité un million de fois plus grande que le microfarad, et la différence de potentiel en volts :

$$Q = \frac{10\,000}{200\,000\,000} = 5 \times 10^{-5} \text{ coulomb.}$$

3° L'énergie d'un condensateur est donnée par la formule

$$W = \frac{1}{2} QV.$$

En évaluant Q en coulombs et V en volts, nous aurons d'abord l'énergie en joules :

$$W = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-5} \times 10^{4} = \frac{1}{4} \text{ de joule.}$$

Or un joule vaut $\frac{1}{9,81}$ de kilogrammètre ; donc

$$W = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9,81} = 0,0254 \text{ kilogrammètre.}$$

4° Un joule équivaut à une fraction de petite calorie $\frac{1}{4,2}$; x bouteilles fournissent donc une quantité de chaleur $x \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4,2}$. Ecrivons que cette chaleur échauffe de 400° le fil de cuivre, dont la capacité calorifique est égale à $\pi \frac{d^2}{4} l\mu c$:

$$x \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4,2} = \pi \times \frac{0,0001}{4} \times 10 \times 9 \times 0,09 \times 400.$$

On trouve $x = 4,27$; il faudra donc 5 bouteilles pour produire l'effet voulu.

5° Ecrivons que la chaleur dégagée par la décharge de ces 5 bouteilles échauffe de θ° la masse d'air donnée :

$$5 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4,2} = 100 \times \frac{1}{773} \times \frac{1}{1 + \frac{20}{273}} \times 0,17 \times \theta.$$

D'autre part l'échauffement θ et l'augmentation de pression y sont liés par la relation

$$\frac{76 + y}{76} = \frac{1 + \alpha(20 + \theta)}{1 + \alpha . 20},$$

ou

$$y = \frac{1}{273} \frac{\theta}{1 + \frac{20}{273}} 76.$$

L'élimination de θ donne

$$y = 76 \times \frac{1}{273} \times 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4,2} \times \frac{773}{17} = 3^{cm},8 = \frac{1}{20} \text{ d'atmosphère.}$$

6° L'épaisseur étant 10 fois plus grande que la première, la capacité du condensateur plan de même surface extérieure est 10 fois plus petite, soit 450 C.G.S.

La capacité du condensateur cylindrique est exactement $\frac{kh}{2 \text{ log. nép. } \frac{R}{r}} = 427$ et l'erreur est d'environ 5%.

Remarque. — La capacité d'un condensateur plan ayant pour surface la surface de l'armature *intérieure* est 105 et la moyenne entre 105 et 150 représente presque exactement la capacité vraie.

Bonne solution de M. Jean Binx.

Assez bonne solution de M. de Bazillac, d Angers, mais une erreur commise au début dans l'évaluation de la surface fausse malheureusement tous les résultats numériques, qui devaient être simples.

QUESTIONS PROPOSÉES

1775. — On considère un cercle fixe dont le rayon est égal à 3 et rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox et Oy. Sur Ox et sur le cercle glissent les extrémités d'un segment AB dont la longueur est aussi constamment égale à 3.

1° Trouver le lieu du milieu de AB et l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite AB.

2° Sur AB comme diamètre on décrit un cercle. Trouver et construire l'enveloppe de l'axe radical des deux cercles.

3° Trouver la développée de cette enveloppe, la rectifier et la construire.

R. Manen, à Albi.

1776. — Un corps solide étant en mouvement, trouver, à un instant donné, les courbes (C) telles que la vitesse en l'un quelconque de leurs points soit dirigée suivant la binormale.

Ces courbes, dont les équations dépendent d'un paramètre unique, comprennent des hélices tracées sur des cylindres de révolution.

Lieu des axes de ces cylindres à l'instant t.

Lieu de ces mêmes axes dans le corps, lorsque celui-ci est en mouvement.

Démontrer que les plans osculateurs aux points d'intersection de toutes les courbes (C) avec une surface donnée (S) d'ordre p, enveloppent une surface (Σ) de classe p. Cas où S est un plan.

Dans quel cas les plans osculateurs auront-ils une droite fixe ?

X. G.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1694. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy *et deux points,* A *et* A', *pris sur ces axes, tels que* $OA = OA' = a$. *On considère en outre deux cercles variables* (Γ) *et* (Γ'), *de centres* C *et* C', *tangents respectivement aux axes en* A *et* A' *et tangents entre eux en* T.

1° *Enveloppe de* CC' *et lieu de son milieu.*

2° *La droite* CC' *coupe les deux cercles* (Γ) *et* (Γ') *en deux autres points* D *et* D'. *Lieux de ces points.*

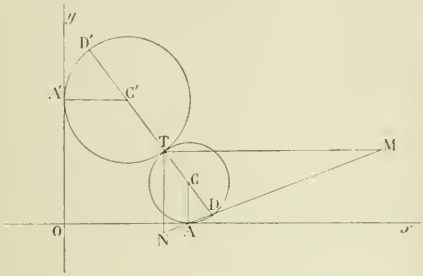
3° *Les parallèles aux axes menées par* T *coupent* AD *et* A'D' *en des points* M, N, M', N'. *Lieux de ces points. Lieux des points* I, H, I', H' *où ces mêmes parallèles coupent* OC *et* OC'.

4° *La droite* AT *coupe* (Γ') *en* E' *et la droite* A'T *coupe* (Γ) *en* E. *Enveloppe de la droite* EE'.

5° *Lieu du point de concours des droites* AC' *et* A'C.

6° *Lieu du milieu de* DD'. *Construire ce lieu.*

Soient λ l'ordonnée du point C, μ l'abscisse du point C′ ; les rayons des cercles (Γ) et (Γ′) sont respectivement égaux aux valeurs absolues de λ et de μ, et pour que ces deux cercles soient tangents, il faut que la distance des centres soit égale à la somme ou à la différence des rayons. On doit donc avoir



$$(\lambda - a)^2 + (\mu - a)^2 = (\lambda \pm \mu)^2,$$

ou
$$a^2 - a(\lambda + \mu) = \pm \lambda\mu.$$

Si λ et μ sont de même signe, le signe + dans le second membre correspond à un contact extérieur, et le signe — à un contact intérieur. C'est l'inverse si λ et μ sont de signes contraires.

Si l'on prend le signe — la relation précédente s'écrit

$$(\lambda - a)(\mu - a) = 0 ;$$

elle est vérifiée pour $\lambda = a$, μ étant arbitraire, ou pour $\mu = a$, λ étant arbitraire. Dans le premier cas les deux cercles sont tangents au point A′, le cercle (Γ) est fixe, et dans le deuxième, le point de contact est A, c'est le cercle (Γ′) qui est fixe.

Ces deux hypothèses ne présentent aucun intérêt ; nous pouvons donc nous borner à envisager seulement la relation

$$\lambda\mu + a(\lambda + \mu) - a^2 = 0, \tag{1}$$

qui détermine μ en fonction de λ :

$$\mu = \frac{a(a - \lambda)}{a + \lambda}. \tag{2}$$

Nous ferons varier λ de $-\infty$ à $+\infty$. Si λ est plus petit que $-a$ ou compris entre 0 et a, λ et μ sont de même signe, les cercles sont tangents extérieurement ; si μ est compris entre $-a$ et 0 ou supérieur à a, les cercles sont tangents intérieurement.

D'ailleurs, étant donné λ, le cercle (Γ) est bien déterminé. Pour construire le cercle (Γ′) correspondant, on mènera du point O la tangente OT à (Γ), et le cercle (Γ′) sera tangent à Oy en A′ et à OT au point T.

1. On en conclut immédiatement que le cercle qui a pour centre le point O et pour rayon a est à la fois le lieu du point T et l'enveloppe de CC′. C'est ce qu'on peut vérifier analytiquement ; en effet, l'équation de CC′ est

$$\frac{y - \lambda}{x - a} = \frac{a - \lambda}{\mu - a},$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur (2),

$$x(a^2 - \lambda^2) + 2a\lambda y - a(a^2 + \lambda^2) = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite est le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Pour avoir les coordonnées du point T, remarquons que ce point est sur CC′ et que l'on a

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{TC'}} = -\frac{\lambda}{\mu}$$

pour tous les cas de figure ; par suite, les coordonnées du point T sont $x = \dfrac{\mu(a + \lambda)}{\lambda + \mu}$, $y = \dfrac{\lambda(a + \mu)}{\lambda + \mu}$,

ou, en remplaçant μ par sa valeur (2),

$$x = \frac{a(a^2 - \lambda^2)}{a^2 + \lambda^2}, \qquad y = \frac{2a^2\lambda}{a^2 + \lambda^2}, \tag{3}$$

et en faisant la somme des carrés on a bien $x^2 + y^2 = a^2$.

Les coordonnées du milieu de CC′ sont

$$x = \frac{a+\mu}{2}, \qquad y = \frac{a+\lambda}{2};$$

nous en tirons $\lambda = 2y - a$, $\mu = 2x - a$, et nous remplaçons λ et μ par ces valeurs dans la relation (1). Nous trouvons ainsi que le lieu du milieu de CC′ est l'hyperbole équilatère $xy = \frac{a^2}{2}$.

Nous avons $\frac{\overline{DC}}{\overline{DC'}} = \frac{\lambda}{2\lambda+\mu}$, donc les coordonnées du point D sont

$$x = \frac{a(2\lambda+\mu) - \lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad y = \frac{\lambda(2\lambda+\mu-a)}{\lambda+\mu},$$

ou, en tenant compte de la relation (2),

$$x = \frac{a(3\lambda^2+a^2)}{\lambda^2+a^2}, \qquad y = \frac{2\lambda^3}{\lambda^2+a^2}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu du point D.

La première nous donne $\lambda^2 = \frac{a^2(x-a)}{3a-x}$, et, en remplaçant λ^2 par cette valeur dans la seconde élevée au carré, nous avons

$$y^2 = \frac{(x-a)^3}{3a-x}.$$

Si l'on transporte l'origine au point A, cette équation devient $x(x^2+y^2) - 2ay^2 = 0$.

Elle représente une cissoïde ayant le point A pour point de rebroussement et la droite $x = 2a$ pour asymptote.

Le lieu du point D′ est évidemment symétrique du lieu du point D par rapport à la bissectrice $y - x = 0$ des axes de coordonnées.

3. Connaissant les coordonnées des points A et C, on calcule aisément le coefficient angulaire de la droite AD ; on trouve $\frac{\lambda}{a}$; par suite l'équation de cette droite est $y = \frac{\lambda}{a}(x-a)$.

Le point M, intersection de AD et de la parallèle à Ox menée par le point I, est défini par les deux équations

$$y = \frac{\lambda}{a}(x-a), \qquad y = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2+a^2}$$

et l'élimination de λ entre ces deux équations donne le cercle

$$(x-2a)^2 + y^2 = a^2,$$

qui est le lieu du point M.

On trouvera de même le lieu du point N en éliminant λ entre les équations

$$y = \frac{\lambda}{a}(x-a), \qquad x = \frac{a(a^2-\lambda^2)}{a^2+\lambda^2}.$$

Ce lieu a pour équation

$$(x-a)(x-a)^2 + y^2 + 2ay^2 = 0,$$

ou, en transportant l'origine au point A,

$$x(x^2+y^2) + 2ay^2 = 0.$$

Cette équation représente une cissoïde symétrique du lieu du point D par rapport au point A.

Les lieux des points M′ et N′ sont respectivement symétriques des lieux des points M et N par rapport à la bissectrice des axes $y - x = 0$.

La droite OC ayant pour équation $y = \frac{\lambda}{a} x$, les points I et II où cette droite rencontre les parallèles à Ox et Oy menées par le point T seront définis par les équations

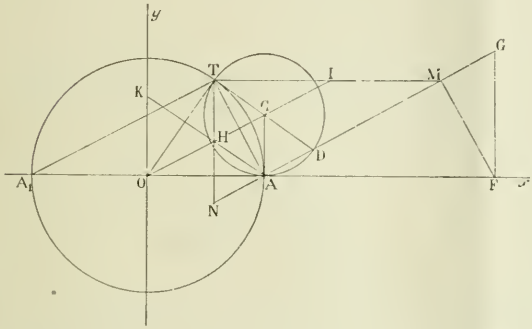
$$\text{(I)} \qquad y = \frac{\lambda}{a} x, \qquad y = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2};$$

$$\text{(II)} \qquad y = \frac{\lambda}{a} x, \qquad x = \frac{a(a^2 - \lambda^2)}{\lambda^2 + a^2}.$$

Le lieu du point I est le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ et celui du point II est la strophoïde droite $(x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0$.

Ces divers résultats peuvent s'obtenir aisément par des considérations géométriques fort élémentaires.

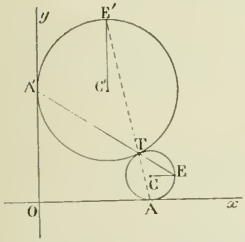
Figurons le cercle (O) lieu du point T ; comme AD est perpendiculaire à TA, la figure A_1TMA est un parallélogramme, $TM = AA_1 = 2a$; donc le lieu du point M est un cercle obtenu en imprimant au cercle (O) une translation parallèle à Ox et égale à $2a$. Si nous menons MF perpendiculaire à AM, nous avons $AF = 2a$, et si nous traçons FG perpendiculaire à Ox, les deux triangles MFG et ADT sont égaux. Donc $AD = MG$, le lieu du point D est la cissoïde droite qui a le point A pour point de rebroussement et la droite FG pour asymptote.



De plus, I est le milieu de TM, donc le lieu de I est encore un cercle égal au cercle (O), et comme $AD = AN$, le lieu du point N est symétrique du lieu de D par rapport au point A.

Enfin, prolongeons AH jusqu'à sa rencontre K avec Oy ; le point H est le point de concours des hauteurs du triangle OAT, TCAH est un parallélogramme, $AH = TC = CA = a$; le triangle ACH étant isocèle, le triangle OHK l'est aussi. On a donc $OK = KH$, et par suite le lieu du point H est une strophoïde droite qui a le point A pour sommet et le point O pour point double.

4. Le point T est centre d'homothétie des cercles (Γ) et (Γ') ; donc AT rencontre (Γ') en un point E' où la tangente est parallèle à Ox. Les coordonnées de ce point sont μ et $a + \mu$; de même, les coordonnées du point E sont $a + \lambda$ et λ. L'équation de la droite EE' est donc



$$\frac{y - a - \mu}{x - \mu} = \frac{\lambda - a - \mu}{a + \lambda - \mu},$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur (2),

$$\lambda^2(y - x - a) + a\lambda(3y - x - a) - 2a^2(a - x) = 0.$$

En écrivant que cette équation admet une racine double en λ, nous obtenons l'équation de l'enveloppe de la droite EE' :

$$(3y - x - a)^2 + 8(y - x - a)(a - x) = 0.$$

Elle représente une conique tangente aux droites $y - x - a = 0$, $x - a = 0$, les points de contact étant sur la droite $3y - x - a = 0$.

Son équation peut s'écrire

$$9x^2 - 14xy + 9y^2 + 2a(x + y) - 7a^2 = 0.$$

Cette conique est une ellipse symétrique par rapport à la bissectrice des axes $y - x = 0$; l'un de ses sommets est le point $A_1(-a, 0)$, puisqu'en ce point la tangente a pour équation $y - x - a = 0$. Le sommet opposé est sur Oy et a pour ordonnée $-a$. Toutes ces données permettent de construire facilement cette ellipse.

5. Les équations des droites AC' et AC sont respectivement

$$\frac{y}{x-a} = \frac{a}{\mu - a}, \qquad \frac{y-a}{x} = \frac{\lambda - a}{a};$$

nous en tirons

$$y = \frac{a}{x}(x + y - a), \qquad \mu = \frac{a}{y}(x + y - a),$$

et nous portons ces valeurs dans la relation (2). Nous obtenons ainsi l'équation

$$(x + y - a)(2x + 2y - a) - xy = 0$$

ou

$$2x^2 + 3xy + 2y^2 - 3a(x + y) + a^2 = 0,$$

qui représente encore une ellipse symétrique par rapport à la bissectrice des axes $y - x = 0$. La première forme de l'équation nous montre que cette courbe est circonscrite au trapèze formé par les axes de coordonnées et par les droites $x + y - a = 0$, $2x + 2y - a = 0$.

6. Nous avons trouvé pour coordonnées du point D

$$x = \frac{a(2\lambda + \mu) - \lambda\mu}{\lambda + \mu}, \qquad y = \frac{\lambda(2\lambda + \mu - a)}{\lambda + \mu}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point (a, a) ; ces formules deviennent

$$x = \frac{\lambda(a - \mu)}{\lambda + \mu}. \qquad y = \frac{(\lambda - a)(2\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}.$$

Les coordonnées du point D' s'en déduisent en permutant x et y, λ et μ ; nous avons ainsi

$$x = \frac{(\mu - a)(2\mu + \lambda)}{\lambda + \mu}, \qquad y = \frac{\mu(a - \lambda)}{\lambda + \mu}.$$

Les coordonnées du milieu de DD' sont donc

$$x = \frac{\mu(\mu - a)}{\lambda + \mu}, \qquad y = \frac{\lambda(\lambda - a)}{\lambda + \mu}.$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur (2),

$$(S) \qquad x = \frac{2a^2\lambda(\lambda - a)}{(\lambda + a)(\lambda^2 + a^2)}, \qquad y = \frac{\lambda(\lambda^2 - a^2)}{\lambda^2 + a^2}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu cherché ; elles représentent une courbe unicursale du quatrième degré.

La définition géométrique de cette courbe montre immédiatement qu'elle est symétrique par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées.

D'ailleurs, si on avait conservé le paramètre μ, en remplaçant partout λ par sa valeur tirée de la relation (1), on aurait obtenu pour équation du lieu

$$(S') \qquad y = \frac{2a^2\mu(\mu - a)}{(\mu + a)(\mu^2 + a^2)}, \qquad x = \frac{\mu(\mu^2 - a^2)}{\mu^2 + a^2}.$$

On peut le vérifier très simplement en remplaçant λ par sa valeur en fonction de μ dans les équations (S), on obtient les équations (S').

On conclut de là que si dans les équations (S) on donne à λ deux valeurs λ_1 et λ_2 vérifiant la relation

$$\lambda_1\lambda_2 + a(\lambda_1 + \lambda_2) - a^2 = 0,$$

à ces valeurs correspondent des points de la courbe symétriques par rapport à la bissectrice.

Cette relation peut s'écrire

$$(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a) = 2a^2 ;$$

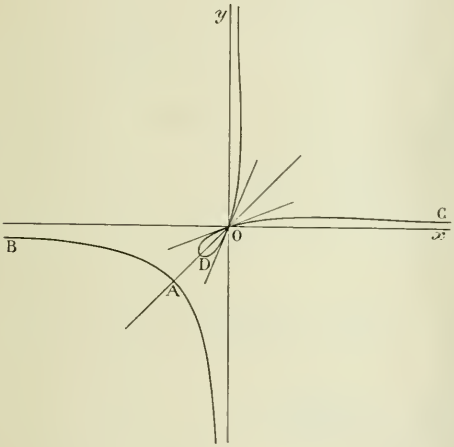
posons $\lambda + a = at$, $\lambda = a(t-1)$; les coordonnées d'un point de la courbe s'écrivent

$$x = a\,\frac{2(t-1)(t-2)}{t(t^2-2t+2)}, \qquad y = a\,\frac{t(t-1)(t-2)}{t^2-2t+2}.$$

Et si l'on change t en $\frac{2}{t}$, x se change en y et y en x. Par suite, pour avoir toute la courbe, il suffira de faire varier t de $-\sqrt{2}$ à $+\sqrt{2}$, et d'achever par symétrie par rapport à la bissectrice des axes.

Les valeurs remarquables et les signes de x et de y sont indiqués par le tableau suivant :

t	$-\sqrt{2}$		0		1		$+\sqrt{2}$
x	$-a\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
y	$-a\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



Nous obtenons ainsi les branches de courbe AB et COD.

Comme $\frac{y}{x} = \frac{t^2}{2}$, la tangente à l'origine a pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}$. Les branches infinies sont asymptotes à Ox. Il n'y a plus ensuite qu'à achever par symétrie par rapport à la bissectrice OA. Les tangentes aux points D et A sont évidemment perpendiculaires à OA.

On peut avoir aisément l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes. Nous avons en effet $t^2 = \frac{2y}{x}$. Partons de la valeur de x qu'on peut écrire, en mettant en évidence les puissances paires de t,

$$x = \frac{2a(t^2+2-3t)}{t(t^2+2)-2t^2}$$

ou $$t[(t^2+2)x+6a] = 2[t^2(x+a)+2a].$$

Remplaçons maintenant t^2 par $\frac{2y}{x}$; nous avons

$$\pm\sqrt{\frac{2y}{x}}\,(x+y+3a) = 2\,\frac{xy+a(x+y)}{x},$$

puis, en élevant au carré et en ordonnant,

$$xy(x^2+y^2)+2axy(x+y)-a^2(2x^2+2y^2-5xy) = 0.$$

HENRI BERTHIOT, lycée d'Orléans.

Bonnes solutions par MM. BENOIT-GONIN ; G. D. et J. D., à Poitiers ; G. FOUCRY, à Reims ; G. GARRE, à Bordeaux ; G. LACH, à Denain ; Marcel PÉLISSONNIER ; L. SIMON, à Châlons-sur-Marne.

MÉCANIQUE

1695. — *Un mobile parcourt avec une vitesse angulaire égale à 1 la courbe ayant pour équation*

$$(\Sigma) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

1° *Calculer en chaque point la vitesse et l'accélération totale. Construire l'hodographe.*

2° *Calculer la composante normale de l'accélération en chaque point et construire le cercle osculateur.*

3° *Soit* M *un point de la courbe* (Σ), *le cercle osculateur en* M *coupe la courbe en un nouveau point* M_1 ; *le cercle osculateur en* M_1 *coupe la courbe en* M_2, *et ainsi de suite. Trouver la limite vers laquelle tendent les points* M.

L'équation de la courbe (Σ) en coordonnées polaires est

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta};$$

et, comme la vitesse angulaire est égale à 1, l'angle polaire θ est égal à $t+C$. Si nous prenons comme instant initial l'instant où le point mobile M est au sommet $A(a, 0)$ de la courbe, la constante C est nulle, et les coordonnées polaires du point M sont

$$r = a\sqrt{\cos 2t}, \qquad \theta = t.$$

1. Les projections de la vitesse v sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire à ce rayon sont

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}, \qquad r\frac{d\theta}{dt} = a\sqrt{\cos 2t},$$

par suite

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{a^2}{\cos 2t},$$

ou

$$v = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}} = \frac{a^2}{r}.$$

Les projection de l'accélération totale γ sur les mêmes axes sont

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \qquad \text{et} \qquad 2\frac{dr}{dt}.$$

On trouve aisément

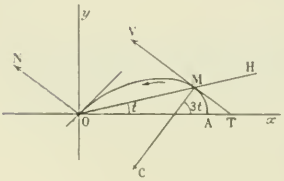
$$\frac{d^2r}{dt^2} - r = -a\frac{1+2\cos^2 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 2\frac{dr}{dt} = -\frac{2a\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}.$$

On en déduit l'expression de l'accélération totale

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\right)^2 + 4\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{a^2(1+8\cos^2 2t)}{\cos^2 2t},$$

$$\gamma = \frac{a\sqrt{1+8\cos^2 2t}}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cherchons l'hodographe. Nous supposerons que t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$: le point M décrit alors l'arc AO dans le sens de la flèche, et le vecteur vitesse MV dirigé dans ce sens a pour valeur $\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}$.



Menons le vecteur ON équipollent à MV ; l'hodographe est le lieu du point N.

Les coordonnées polaires de ce point sont

$$\rho = ON = MV = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}, \qquad \omega = (Ox, ON).$$

L'angle du rayon vecteur OM avec la tangente MV a pour tangente $\frac{rd\theta}{dr} = -\cot g\, 2t = \operatorname{tg}\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$; donc l'angle HMV est égal à $2t + \frac{\pi}{2}$, et par suite $\widehat{xTM} = (Ox, ON) = 3t + \frac{\pi}{2}$.

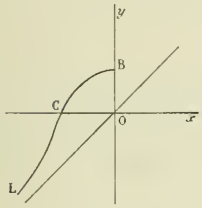
Donc les coordonnées polaires du point N sont

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}, \qquad \omega = 3t + \frac{\pi}{2},$$

et l'équation polaire de l'hodographe est

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos\frac{2\omega - \pi}{3}}}.$$

Comme t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, ω varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$, et $\frac{2\omega - \pi}{3}$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions ρ croît de a à $+\infty$ et nous obtenons la branche de courbe BL qui rencontre Ox au point C situé à une distance du point O égale à $a\sqrt{2}$.



La direction asymptotique correspond à l'angle polaire $\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$.

Pour avoir l'asymptote, cherchons la limite de $\rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$, ou de $\dfrac{a \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\cos\frac{2\omega - \pi}{3}}}$ pour $\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$, ou, en posant $\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \alpha$, nous sommes conduits à chercher la limite de $-\dfrac{a \sin\alpha}{\sqrt{\sin\frac{\alpha}{3}}}$ pour $\alpha = 0$. Or ce rapport a même limite que $\dfrac{-a\alpha}{\sqrt{\frac{\alpha}{3}}}$, et cette limite est nulle. Donc l'asymptote passe par l'origine.

2. Soient γ_t et γ_n les composantes tangentielle et normale de l'accélération totale γ. Nous avons

$$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2.$$

Or nous avons trouvé

$$\gamma^2 = \frac{a^2(1 + 8\cos^2 2t)}{\cos^3 2t};$$

d'autre part $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = a\,\frac{\sin 2t}{(\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}$, donc

$$\gamma_n^2 = \frac{a^2(1 + 8\cos^2 2t)}{\cos^3 2t} - \frac{a^2 \sin^2 2t}{\cos^3 2t} = \frac{9a^2 \cos^2 2t}{\cos^3 2t} = \frac{9a^2}{\cos 2t},$$

et

$$\gamma_n = \frac{3a}{\sqrt{\cos 2t}} = \frac{3a^2}{r}.$$

Si on désigne par R le rayon de courbure, on a

$$\frac{v^2}{R} = \frac{3a^2}{r} \qquad \text{et} \qquad R = \frac{v^2 r}{3a^2},$$

et en remplaçant v par sa valeur $\frac{a^2}{r}$, on obtient $R = \frac{a^2}{3r}$.

Pour construire le centre de courbure, on mènera la normale au point M qui fait avec Ox l'angle $3t$, puis sur cette normale on prendra la longueur $MC = \frac{a^2}{3r}$. Le cercle osculateur a pour centre le point C et pour rayon CM.

3. Pour résoudre la troisième partie, nous exprimerons les coordonnées d'un point de la lemniscate

$$(\Sigma) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

en fonction rationnelle d'un paramètre.

Coupons cette courbe par un cercle passant par l'origine et tangent en ce point à la droite $x - y = 0$. L'équation de ce cercle peut s'écrire

$$(C) \qquad x^2 + y^2 = au(x - y);$$

il rencontre la lemniscate en trois points confondus à l'origine, en deux points confondus en chaque point cyclique, et en un huitième point M, dont les coordonnées sont fonctions rationnelles de u.

L'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine aux points de rencontre des deux courbes est

$$(x^2 + y^2)^2(x - y)[u^2(x - y) - (x + y)] = 0,$$

et, en prenant l'intersection du cercle et de la droite $u^2(x - y) - (x + y) = 0$, nous obtenons les coordonnées du point M en fonction rationnelle de u :

$$x = \frac{au(u^2 + 1)}{u^4 + 1}, \qquad y = \frac{au(u^2 - 1)}{u^4 + 1}.$$

Cherchons maintenant la relation qui doit exister entre les u de quatre points de la lemniscate pour que ces points soient sur un cercle.

Considérons un cercle quelconque

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0;$$

il rencontre la lemniscate en quatre points dont les u sont racines de l'équation

$$\frac{a^2u^2[(u^2 + 1)^2 + (u^2 - 1)^2]}{(u^4 + 1)^2} + \frac{Aau(u^2 + 1)}{u^4 + 1} + \frac{Bau(u^2 - 1)}{u^4 + 1} + C = 0,$$

ou

$$\frac{2a^2u^2}{u^4 + 1} + \frac{Aau(u^2 + 1) + Bau(u^2 - 1)}{u^4 + 1} + C = 0,$$

ou enfin

$$2a^2u^2 + au[(A + B)u^2 + A - B] + C(u^4 + 1) = 0.$$

Quels que soient A, B, C, le produit des racines de cette équation est égal à 1 ; par suite, pour que quatre points u_1, u_2, u_3, u_4 de la lemniscate soient sur un cercle il faut qu'on ait

$$u_1u_2u_3u_4 = 1.$$

Cela posé, le cercle osculateur au point M_0 (u_0) rencontre la courbe en trois points confondus en M_0 et en un quatrième point M_1 (u_1) qui sera défini par la relation $u_0^3u_1 = 1$, ou $u_1 = \frac{1}{u_0^3}$.

Le cercle osculateur au point $M_1(u_1)$ rencontrera la courbe au point $u_2 = \frac{1}{u_1^3} = u_0^6, \ldots$ Nous aurons ainsi la suite de points

$$u_0, \qquad u_0^{-3}, \qquad u_0^9, \qquad \ldots \qquad u_0^{-1^{n}3n}, \qquad \ldots$$

Supposons $(u_0) < 1$, les valeurs de rang impair ont pour limite 0, et les points correspondants se rapprochent indéfiniment de l'origine sur la branche qui est tangente à la droite $x + y = 0$, car $\frac{y}{x} = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$. Les valeurs de rang pair augmentent indéfiniment, et les points correspondants se rapprochent aussi de l'origine, mais, sur la branche de courbe qui est tangente à la droite $x - y = 0$.

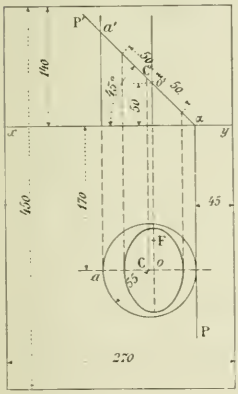
C'est le contraire si $(u_0) > 1$.

Jacques PAPELIER, lycée d'Orléans.

Bonne solution par M. Foucry, à Reims.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1709. — *Cadre* $450^{mm} \times 270^{mm}$. *Placer la ligne de terre xy parallèle aux petits cotés du cadre et à* 140^{mm} *du petit côté supérieur.*



On donne un plan de bout P'αP *tel que* αP *est à* 45^{mm} *du grand côté droit du cadre ; l'angle* $P'\alpha x = 45°$.

1° *Dans ce plan on considère une circonférence de* 50^{mm} *de rayon et dont le centre* o, a' *a pour cote* $+50^{mm}$ *et pour éloignement* $+170^{mm}$. *Cette circonférence tourne autour d'un axe vertical passant par le foyer* F *de la projection horizontale de la circonférence le plus voisin de* xy, *et engendre une surface* M.

2° *Dans le même plan, on considère une ellipse dont la projection horizontale est une circonférence de* 55^{mm} *de rayon tangente à* αP ; *le centre* C *de cette circonférence est à gauche de* αP *et à* 170^{mm} *au-dessous de* xy. *Cette ellipse, en tournant autour d'un axe vertical passant par son point le plus élevé* a, a', *engendre une surface* N.

Après avoir déterminé les contours apparents de ces deux surfaces, et les projections de leur intersection, on représentera le solide limité à la surface N *et au plan horizontal, avec la cavité produite par le solide limité à la surface* M *qu'on supposera entièrement enlevé.*

Dans la mise à l'encre, on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points et droites remarquables.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Intersection de deux surfaces de révolution.

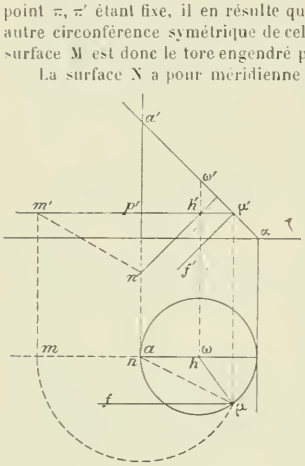
(*Ecole centrale, concours de 1908.*)

Détermination des méridiennes principales. — Considérons d'abord la surface M engendrée par la circonférence de centre o, a'. La projection de cette circonférence est une ellipse dont le grand axe est de bout et le petit axe de front, la longueur de celui-ci étant la projection horizontale du diamètre de front b_1b_2. On a les foyers de cette ellipse en coupant son grand axe par un arc de cercle qui a pour centre un des sommets du petit axe et pour rayon le rayon de la circonférence donnée. Soit f le foyer qui est le pied de l'axe de la surface M. On sait que cette surface est un tore dont la méridienne se compose de deux circonférences égales. Voici la démonstration que donne M. Caron de cette proposition : Soit μ, μ' un point de la circonférence, m, m' le point correspondant de la méridienne principale ; déterminons la normale en ce point. Pour cela, cherchons la normale à la surface au point μ, μ' : cette normale a pour projection horizontale μf. D'ailleurs elle est contenue dans le plan normal à la circonférence au point μ, μ'. Ce plan normal contient le rayon $\mu o, \mu' o'$ et il est perpendiculaire sur la tangente $\mu\theta, \mu'\theta'$; il a donc pour trace sur le plan horizontal o' la

perpendiculaire op abaissée de o sur $\mu\theta$. Il en résulte que la normale au point μ a pour trace sur le plan horizontal o' le point p. Si nous prenons le point K, symétrique du foyer f_1 par rapport à la tangente $\mu\theta$, la longueur fK est égale au grand axe de l'ellipse; or fp est la moitié de fK, dont fp est constant.

Par la rotation ce point p vient en π, π' et par suite $m'\pi'$ est la normale à la méridienne principale. Le point π, π' étant fixe, il en résulte que la méridienne principale comprend une circonférence. On obtient une autre circonférence symétrique de celle-ci par rapport à l'axe de la surface et qui complète la méridienne. La surface M est donc le tore engendré par la révolution de cette circonférence.

La surface N a pour méridienne une parabole et nous en donnerons aussi la démonstration. Soit μ, μ' un point quelconque de l'ellipse génératrice, m, m' le point correspondant de la méridienne principale. Cherchons la normale en ce point. Pour cela construisons le plan normal à l'ellipse au point μ, μ', il est déterminé par l'horizontale μh, $\mu' h'$ et par la ligne de front μ^v, $\mu' f'$. Le plan de front $a\omega$ coupe ce plan normal suivant une parallèle à μf, $\mu' f'$ mené par hh' et qui va couper l'axe au point fixe n, n'. On a donc en $m'n'$ la normale à la méridienne principale.



Mais si on répète la même construction pour tous les points de la courbe, tous les triangles analogues à $n'h'p'$ sont égaux entre eux et par suite la sous-normale $n'p'$ est constante. La méridienne cherchée est donc la parabole qui a pour paramètre $p'n'$. Son sommet étant au point a', nous en déduisons son foyer et par suite nous pouvons la construire par points, en nous servant de la sous-normale pour avoir la tangente en un point quelconque. Sur l'épure cette sous-normale a 55mm.

Contours apparents — Le contour apparent de la surface M se compose en projection verticale des deux demi-circonférences méridiennes principales et de leurs tangentes communes horizontales, en projection horizontale des deux parallèles décrits par les extrémités du diamètre horizontal du cercle donné, de rayons fd et fg. Le contour apparent de la surface N est la parabole méridienne sur le plan vertical, et sur le plan horizontal le cercle de section de la surface par le plan horizontal de projection.

Intersection des deux surfaces. — Les axes des deux surfaces étant parallèles, il suffit de les couper par des plans horizontaux ; chacun d'eux nous donne sur le tore deux parallèles et sur le paraboloïde une circonférence qui coupe les deux premières en quatre points de la ligne d'intersection cherchée. Nous avons fait les constructions pour le point k, k' et déterminé la tangente en ce point. A cet effet nous avons construit une horizontale et une ligne de front du plan des normales en ce point à chaque surface. Chacune de ces normales a été déterminée en cherchant le point de rencontre de l'axe de la surface avec la normale à la méridienne au point situé sur le même parallèle et en joignant ce point au point de la courbe considéré. On a ainsi les normales kn_1, $k'n'_1$, et kn_2, $k'n'_2$ et la tangente kt, $k't'$.

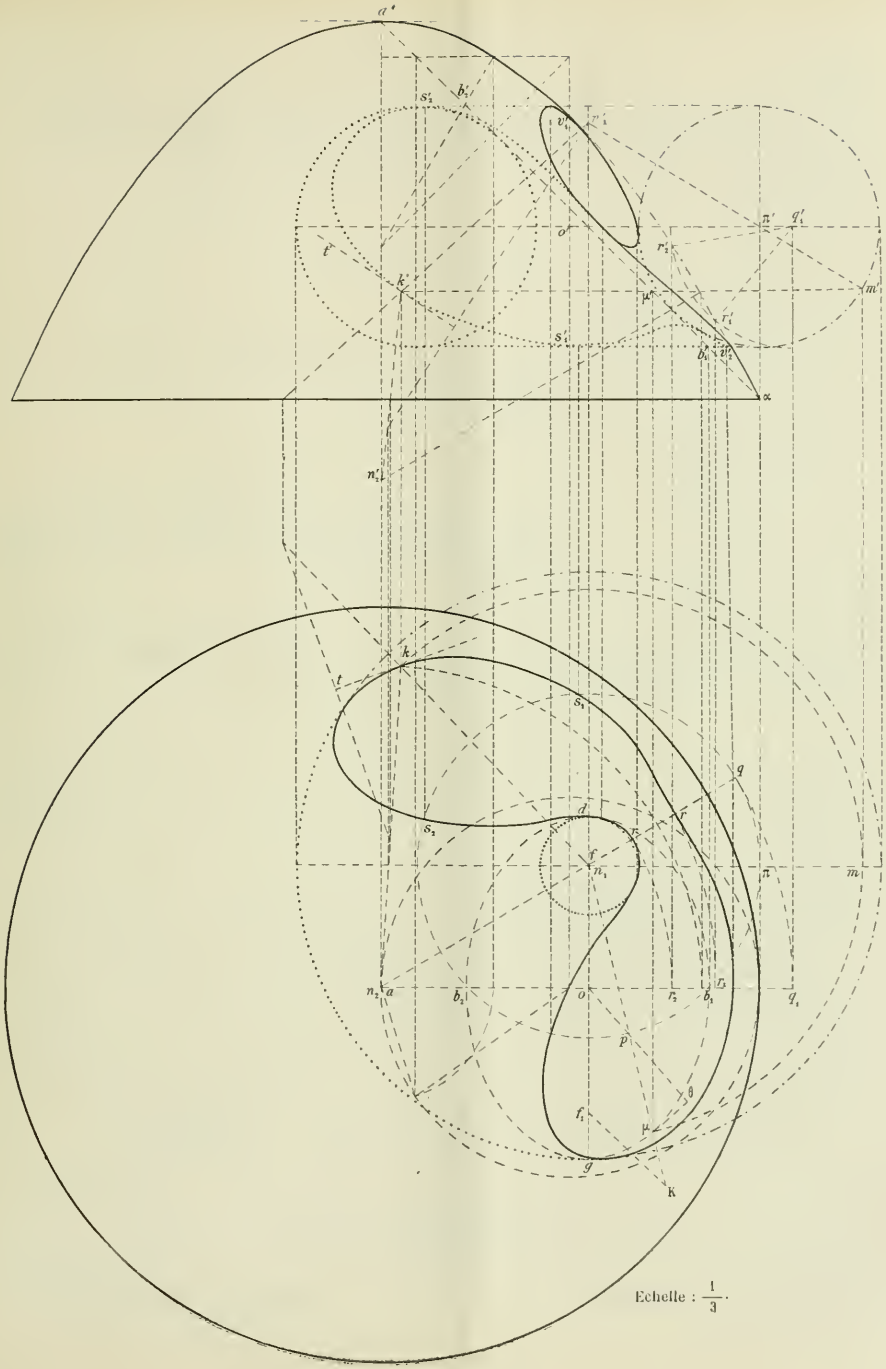
Points remarquables. — La courbe d'intersection est symétrique par rapport au plan des axes des deux surfaces. La projection horizontale est donc symétrique par rapport à la trace horizontale af de ce plan et l'on peut déterminer directement les points où elle traverse af en amenant par une rotation autour de l'axe du paraboloïde ce plan à coïncider avec le plan méridien principal de cette surface.

Le centre q,q' du cercle méridien du tore vient alors en q_1,q'_1 et si nous décrivons de ce point la circonférence égale à cette méridienne, elle coupe la parabole aux deux points r'_1 et r'_2, qu'il suffit de ramener par une rotation inverse dans le plan vertical af pour avoir les points r cherchés. Ces points sont fournis par des parallèles limites.

On peut aussi trouver directement les points où la courbe traverse le contour apparent horizontal du tore en prenant les plans auxiliaires qui contiennent les parallèles de contour apparent et leur appliquant la construction ordinaire d'un point courant. On peut aussi trouver par la même construction les points où la projection verticale de la courbe touche les parallèles le plus haut et le plus bas du tore.

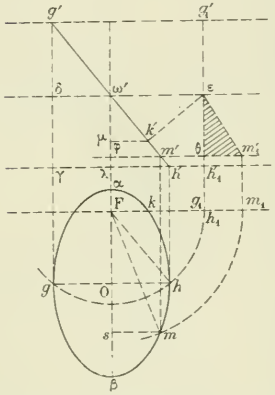
Pour déterminer les points de contact de la courbe et des méridiennes principales, on devra simplement rappeler les points où sa projection horizontale traverse chacun des plans méridiens principaux.

Détermination du solide N entamé par le solide M — Puisqu'on enlève le solide M, c'est-à-dire le tore, il faut représenter en trait mixte ses contours apparents : la méridienne principale du paraboloïde subsiste sauf l'arc compris entre les points de contact r_1,r'_1 de cette parabole avec la courbe d'intersection. Quant à la courbe elle-même, elle est entièrement vue en projection horizontale, et sa visibilité en projection verticale n'offre aucune difficulté.



Echelle : $\frac{1}{3}$.

Note. — On peut démontrer par le calcul que la méridienne de la surface M est une circonférence.



Soient en effet $O\alpha = O\beta = \omega' g' = \omega' h = a$,

$O\gamma = Oh = \lambda\gamma = \lambda h' = \omega'\delta = b$,

$\delta g' = \delta\gamma = \omega' h = c = OF$,

$a = Fh = Fh_1 = \lambda h'_1 = \omega'\varepsilon$,

$os = x, \qquad sm = m'\varphi = y.$

On sait que
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$Fm = a + \frac{cx}{a} = Fm_1,$$

$$h_1 m_1 = \frac{cx}{a} = \theta m'_1.$$

Le point m'_1 étant un point quelconque de la méridienne, $\varepsilon m'_1$ est constant.

En effet,
$$\overline{\varepsilon m'_1}^2 = \overline{\theta m'_1}^2 + \overline{\varepsilon\theta}^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + \overline{\omega'\varphi}^2,$$

d'où
$$\overline{\varepsilon m'_1}^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + \frac{c^2y^2}{b^2} = c^2.$$

Le lieu de m_1 est donc la circonférence de centre ε et de rayon c.

Cette circonférence est tangente à $h'g'$. Menons en effet $\varepsilon k'$ perpendiculaire à $g'h'$; les deux triangles rectangles égaux $\varepsilon\omega' k'$ et $\omega'\delta g'$ donnent $\varepsilon k' = \delta g' = c$. D'ailleurs k' et k sont sur une même ligne de rappel

$$Fk = \frac{b^2}{a} \qquad \text{et} \qquad \frac{k'\mu}{\lambda h'} = \frac{\omega' k'}{\omega' h'}, \qquad k'\mu = \frac{b_1 b}{a} = \frac{b^2}{a}, \qquad \text{car} \quad \omega' k' = b.$$

Cette démonstration nous est communiquée par M. Malloizel.

QUESTIONS PROPOSÉES

1777. — Un point matériel non pesant M ayant une masse égale à 1 est assujetti à glisser sans frottement sur la courbe

$$(C) \qquad x = \frac{2}{3}t^3, \qquad y = t^2, \qquad z = t,$$

sous l'action d'une force variable constamment tangente à la trajectoire, de telle sorte que les équations du mouvement soient justement les équations (C).

1° Déterminer cette force tangentielle ainsi que la réaction normale MN de la courbe (C) sur le point M.

2° Trouver le lieu engendré par la ligne d'action de la force MN. Ce lieu est une surface réglée, unicursale et à plan directeur; donner ses équations en fonction de deux paramètres.

3° Trouver le lieu de l'extrémité N du vecteur MN et construire la projection de ce lieu sur le plan des yz.

4° Trouver le lieu du centre de courbure de la courbe (C).

E. H.

1778. — I. Soient γ_t et γ_n l'accélération tangentielle et l'accélération normale d'un point mobile dans le plan des deux axes rectangulaires Ox, Oy, V_x et V_y les projections de la vitesse du point sur ces deux axes.

1° Sachant que $\frac{\gamma_t}{V} = \pm\frac{\gamma_n}{V}$, trouver l'hodographe.

2° Sachant en outre que $\frac{\gamma_t}{V}$ est constant, trouver la trajectoire et la loi du mouvement.

R. Vinéjoux.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 8. Mai 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES (*Suite* [1])

par M. **Louis Sire**, à Lyon.

Podaires d'ordre infini.

1. — Reprenons la formule F_s,

$$\frac{\rho_\mu}{R_\mu} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0,$$

et posons

$$\Delta = \frac{R}{\rho}, \qquad \Delta_\mu = \frac{R_\mu}{\rho_\mu};$$

Δ est en général, pour un point d'une courbe, une fonction de x, y, y', y''; nous l'appellerons le *delta* du point considéré de la courbe par rapport au point O.

Le delta est nul en un point de rebroussement et aux points de contact des tangentes issues du point O à la courbe (C); il est infini en un point d'inflexion; il est égal à l'unité pour le point O lorsque la courbe (C) passe par ce point; il est indéterminé pour un point d'inflexion dont la tangente passe par O.

Avec ces notations, la formule F_s s'écrit

$$\Delta\Delta_\mu - 4(\Delta_\mu - 1) = 0.$$

La relation entre les Δ des points correspondants d'une courbe et de sa podaire, par rapport à O, est donc homographique.

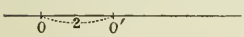
Les points doubles de cette homographie nous sont donnés par

$$(\Delta - 2)^2 = 0.$$

Ils sont donc confondus au point O′ d'abscisse 2. Transportons l'origine en ce point, c'est-à-dire posons

$$\Delta = \Delta' + 2, \qquad \Delta_\mu = \Delta'_\mu + 2;$$

nous aurons entre Δ', Δ'_μ la relation plus symétrique



$$\Delta'\Delta'_\mu - 2(\Delta'_\mu - \Delta') = 0,$$

de laquelle nous tirons

$$\Delta'_\mu = \frac{2\Delta'}{2 - \Delta'}.$$

Désignons par Δ'^k_μ le Δ_μ en un point de la $k^{ième}$ podaire de la courbe (C) par rapport à O; nous aurons successivement

$$\Delta'^2_\mu = \frac{2\Delta'_\mu}{2 - \Delta'_\mu} = \frac{2\Delta'}{2 - 2\Delta'}, \qquad \Delta'^3_\mu = \frac{2\Delta'^2_\mu}{2 - \Delta'^2_\mu} = \frac{2\Delta'}{2 - 3\Delta'};$$

nous sommes donc conduit à poser

$$\Delta'^{k-1}_\mu = \frac{2\Delta'}{2 - (k-1)\Delta'}, \qquad \text{et nous en déduisons} \qquad \Delta'^k_\mu = \frac{2\Delta'^{k-1}_\mu}{2 - \Delta'^{k-1}_\mu} = \frac{2\Delta'}{2 - k\Delta'},$$

de sorte qu'en revenant aux delta, nous avons

$$\Delta^k_\mu = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)};$$

c'est la relation entre le delta en un point d'une courbe et celui du point correspondant de sa $k^{ième}$ podaire par rapport à O.

1. Voir n° d'avril 1909, de la *Revue*, p. 161.

2. — De la relation
$$\Delta'\Delta'_p - 2(\Delta'_p - \Delta') = 0,$$
tirons
$$\Delta' = \frac{2\Delta_p}{2 + \Delta'_p},$$
en désignant par Δ_p^{-k} le delta de la $k^{ième}$ podaire négative de la courbe Δ_p; nous obtiendrons comme précédemment
$$\Delta_p'^{-k} = \frac{2\Delta'_p}{2 + k\Delta'_p}, \qquad \text{de sorte que} \qquad \Delta_p^{-k} = 2 + \frac{2(\Delta_p - 2)}{2 + k(\Delta_p - 2)};$$
c'est la relation entre le delta en un point d'une courbe et celui du point correspondant de sa $k^{ième}$ podaire négative par rapport à O.

Les formules Δ_p^k, Δ_p^{-k} diffèrent par le changement de Δ en Δ_p, mais on obtiendrait une formule analogue pour Δ_p^{-k}, si on était parti de la courbe (C) au lieu de sa podaire; puis par le changement de k en $-k$. Dès lors, nous ne ferons plus aucune distinction entre les podaires et les podaires négatives d'une courbe par rapport à un point; nous désignerons la k^e podaire ou la k^e podaire négative par podaire d'ordre k, k étant un entier positif ou négatif.

3. — Nous conserverons donc seulement la formule Δ_p^k. Il en résulte que :

1° *Si le delta de tous les points d'une courbe* (C) *par rapport à un point* O *est constant, il en est de même pour chacune de ses podaires par rapport à* O.

Ainsi, le delta de tous les points d'un cercle par rapport à un point O de ce cercle est égal à 1; la podaire de ce cercle par rapport à O est une cardioïde dont O est le point de rebroussement. La formule Δ_p^k, dans laquelle $\Delta = 1$, $k = 1$ nous donne $\Delta_p^1 = \frac{4}{3}$, de sorte que le delta d'un point quelconque d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement est constant et égal à $\frac{4}{3}$. J'ai démontré directement ce résultat dans la *Revue* (mai 1908).

Nous en donnerons d'autres exemples plus loin.

2° Pour $k = \pm\infty$, nous obtenons $\Delta_p^\infty = 2$, de sorte que :

La podaire d'ordre infini positif ou négatif d'une courbe plane quelconque par rapport à un point O *est telle que le delta d'un quelconque de ses points par rapport à* O *est égal à* 2.

En remarquant que le delta d'un point d'une courbe ne change pas par une homothétie de centre O suivie d'une rotation autour de O, nous voyons que les podaires d'ordre infini de toutes les courbes planes par rapport à un point O sont des courbes semblables. Nous déterminerons également la nature de ces courbes limites et nous obtiendrons ainsi un résultat assez intéressant.

Quasi-podaires d'ordre infini.

4. — Nous avons obtenu pour la quasi-podaire d'une courbe (C) par rapport à un point O une formule F_s, analogue à la formule F; de sorte que si Δ_q^k est le delta d'un point quelconque de la quasi-podaire d'ordre k, correspondant à l'angle V, par rapport à O, nous aurons
$$\Delta_q^k = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)},$$
k étant un entier positif ou négatif.

D'une manière plus générale, prenons k fois la quasi-podaire de la courbe (C) correspondant à l'angle V, par rapport à O; puis k' fois la quasi-podaire de la courbe obtenue correspondant à l'angle V'..., $k^{(n)}$ fois la quasi-podaire de la courbe obtenue correspondant à l'angle $V^{(n)}$; nous obtiendrons
$$\Delta_q^{k+k'+\ldots+k^{(n)}} = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - (k + k' + \ldots + k^{(n)})(\Delta - 2)},$$
soit
$$s = k + k' + \ldots + k^{(n)}.$$
La courbe obtenue est une courbe semblable à la podaire d'ordre s de la courbe (C) par rapport à O. En particulier, si $s = 0$, on retombe sur une courbe semblable à la courbe (C).

Supposons maintenant que n augmente indéfiniment de façon que s augmente indéfiniment, nous aurons
$$\Delta_q^\infty = 2,$$
de sorte que :

Les quasi-podaires successives d'une courbe (C), *correspondant à des angles quelconques par rapport à un point* O, *convergent également vers une courbe telle que le delta d'un quelconque de ses points par rapport à* O *soit égal à* 2.

Les quasi-podaires d'ordre infini des courbes planes sont donc des courbes semblables aux podaires d'ordre infini.

Les courbes à delta constant.

5. — Nous allons étudier les courbes dont le delta est le même pour chacun de leurs points par rapport à O ; ce sera le delta de la courbe considérée. Toute propriété des Δ qui s'applique à un point de ces courbes a lieu pour tous les points ; nous les appellerons les courbes (Δ).

Cherchons leur équation différentielle. Connaissant R, il nous reste à calculer ρ.

Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires passant par O et soient x, y les coordonnées d'un point M d'une courbe (Δ). Le centre C du cercle de rayon ρ est à l'intersection des deux droites représentées par les équations

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \qquad Y - \frac{y}{2} = -\frac{x}{y}\left(X - \frac{x}{2}\right)$$

qui, résolues, nous donnent

$$X = \frac{y'(x^2 - y^2) - 2xy}{2(xy' - y)}, \qquad Y = \frac{x^2 - y^2 + 2xyy'}{2(xy' - y)},$$

de sorte que

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2(1 + y'^2)}{4(y - xy')^2},$$

et l'équation différentielle des courbes (Δ) s'écrit

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = -\frac{\Delta}{2}\,\frac{x^2 + y^2}{y - xy'}.$$

Transformée en coordonnées polaires, elle devient, en faisant rentrer le signe $-$ dans Δ,

$$\frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{\Delta}{2}.$$

Posons

$$\frac{1}{\rho} = z, \qquad -\frac{\rho'}{\rho^2} = z', \qquad \frac{2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^3} = z'',$$

l'équation devient

$$\frac{z^2 + z'^2}{z^2 + zz''} = \frac{\Delta}{2},$$

ce que nous pouvons écrire

$$\frac{2zz' + 2z'z''}{z^2 + z'^2} = \frac{4}{\Delta}\,\frac{z'}{z};$$

en intégrant une première fois, nous avons

$$\log(z^2 + z'^2) = \log z^{\frac{4}{\Delta}} + \log A, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad z^2 + z'^2 = Az^{\frac{4}{\Delta}},$$

d'où

$$z' = \sqrt{Az^{\frac{4}{\Delta}} - z^2}, \qquad \text{par suite} \qquad \omega - \omega_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Az^{\frac{4}{\Delta}} - z^2}}.$$

Nous avons ainsi ramené l'intégration de l'équation différentielle à une quadrature.

Les courbes qui correspondent à une valeur donnée de Δ forment donc une famille à deux paramètres ; mais nous savons que l'un de ces paramètres A correspond à une homothétie de centre O, l'autre ω_0 à une rotation autour de O ; de sorte que les courbes obtenues sont semblables entre elles.

6. — Faisons $\Delta = 2$, nous avons

$$\omega - \omega_0 = \int \frac{dz}{az}, \qquad a(\omega - \omega_0) = \log z,$$

d'où

$$\rho = e^{-a(\omega - \omega_0)}$$

Nous obtenons toutes les spirales logarithmiques ayant O comme point asymptote, de sorte que nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Étant donnée une courbe plane quelconque (C_0), *ses podaires ou ses quasi-podaires successives par rapport à un point O convergent vers une spirale logarithmique ayant O comme point asymptote.*

Lorsque la courbe plane (C) *varie, la spirale logarithmique tourne autour de son point asymptote en restant homothétique à elle-même.*

D'autre part, si dans la formule F, nous faisons $\Delta = 2$, nous obtenons $\Delta_p = 2$, de là :

La podaire d'une spirale logarithmique par rapport à son point asymptote est une spirale logarithmique ayant même point asymptote.

Ensembles dénombrables de fonctions.

7. — Soit $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la courbe (C) rapportée au point O; on sait que sa podaire par rapport à O a pour équation ponctuelle $F[(x, y, -(x^2+y^2)] = 0$.

Soient donc

$$F_1(u, v, w) = 0, \qquad F_2(u, v, w) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_n(u, v, w) = 0, \qquad \ldots$$

les équations tangentielles des podaires successives de la courbe (C) par rapport à O, les équations ponctuelles de ces courbes seront respectivement

$$(1) \qquad F[x, y, -(x^2+y^2)] = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_n = 0, \qquad \ldots;$$

nous pouvons alors énoncer le résultat précédent par le théorème général suivant, sans en étudier la rigueur dans le cas des fonctions multiformes :

L'ensemble dénombrable des fonctions y de x définies par les équations de la suite (1) :

$$\psi_1(x), \qquad \psi_2(x), \qquad \ldots, \qquad \psi_n(x), \qquad \ldots$$

admet une fonction limite $y = \Phi(x, a, \omega_0)$ définissant une spirale logarithmique ayant O comme point asymptote.

Lorsque les fonctions implicites (1) *varient tout en représentant les podaires d'une même courbe, la fonction limite $\Phi(x, a, \omega_0)$ ne change que par les nouvelles valeurs que prennent les constantes a, ω_0.*

Lorsque la courbe (C) est algébrique, les fonctions $\psi_n(x)$ sont toutes algébriques et convergent vers une fonction transcendante renfermant des logarithmes et des arc tg; lorsque la courbe (C) est transcendante, toutes les fonctions $\psi_n(x)$ sont transcendantes.

Soient de même

$$\rho = \overline{\omega_1}(\omega), \qquad \rho = \overline{\omega_2}(\omega), \qquad \ldots, \qquad \rho = \overline{\omega_n}(\omega)$$

les équations en coordonnées polaires des podaires de la courbe (C) par rapport au point O, nous voyons que :

L'ensemble dénombrable des fonctions

$$\overline{\omega_1}(\omega), \quad \overline{\omega_2}(\omega), \ldots\ldots \overline{\omega_n}(\omega) \ldots\ldots$$

admet comme fonction limite la transcendante entière $e^{-a(\omega-\omega_0)}$.

Courbes Δ réductibles l'une à l'autre.

8. — Considérons deux familles de courbes (Δ) semblables, les centres d'homothétie et de rotation étant le point O, et cherchons dans quels cas, en prenant la podaire d'ordre k d'une courbe quelconque de la première famille par rapport à O, on obtiendra une courbe de la seconde famille. Soient (C) et (C') deux telles courbes, Δ et Δ' leurs delta par rapport à O; nous devrons avoir

$$\Delta_p^k = 2 + \frac{2(\Delta-2)}{2-k(\Delta-2)} = \Delta',$$

égalité de laquelle nous tirons

$$k = 2\left[\frac{1}{\Delta-2} - \frac{1}{\Delta'-2}\right].$$

Or, pour que l'opération puisse se faire, il faut et il suffit que k soit un nombre entier; par suite :

La condition nécessaire et suffisante cherchée est que l'expression $2\left[\frac{1}{\Delta-2} - \frac{1}{\Delta'-2}\right]$ soit égale à un entier, positif ou négatif, n; il suffira de prendre n fois la podaire de toute courbe (C) *pour obtenir une courbe* (C').

Ainsi, considérons les paraboles (P) ayant pour foyer le point O et les cardioïdes (C) ayant le point O pour point de rebroussement : ce sont deux familles de courbes semblables. Pour les paraboles (P) nous avons $\Delta = 4$, et pour les cardioïdes (C) $\Delta' = \frac{4}{3}$, de sorte que

$$\frac{1}{\Delta-2} - \frac{1}{\Delta'-2} = 2,$$

par suite :

En prenant la podaire d'ordre 4 de toute parabole (P) *par rapport à O, on obtient une cardioïde* (C).

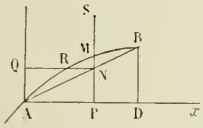
On sait dans ce cas que les courbes intermédiaires que l'on trouve sont la droite, le point et le cercle.

(*A suivre.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1908.

1700. — 1° *Construire la courbe qui représente la fonction*



$$y = 4e\,\frac{\log\frac{x}{e}}{(\log x)^2}.$$

2° *Soit* [C] *l'arc de cette courbe qui a pour origine le point* A *où elle traverse l'axe des* x *et pour extrémité le point* B *qui correspond au maximum de* y. *Calculer l'aire* [Σ] *comprise entre l'arc* [C], *l'axe des* x *et l'ordonnée* BD *de* B.

3° *Soit* M *un point quelconque de* [C]. *Menons la perpendiculaire* PM *à l'axe des* x ; *soit* N *le point où elle rencontre la corde* AB. *Menons par* N *la parallèle à l'axe des* x *qui coupe en* R *l'arc* [C] *et en* Q *la parallèle à l'axe des* y *menée par* A. *Portons sur le prolongement de* PM *une longueur* MS *égale à* QR.

Lorsque M *décrit* [C], S *décrit un arc de courbe* [C'] : *cet arc passe au point* A. *Calculer à un centième près, le coefficient angulaire de la tangente à cet arc* [C'] *au point* A.

4° *Soit* [Σ'] *l'aire balayée par le segment de droite* MS *lorsque* M *décrit* [C]. *Montrer qu'il existe entre* [Σ] *et* [Σ'] *une relation numérique qui subsiste lorsqu'on remplace dans les constructions précédentes l'arc* [C] *par un autre arc de courbe quelconque ayant les mêmes extrémités* A *et* B, *pourvu toutefois que ce nouvel arc soit situé au-dessus de* AB, *et ne soit pas rencontré en plus d'un point par une parallèle quelconque à l'un ou à l'autre des axes de coordonnées.*

Nota. — Le signe log *représente des logarithmes népériens dont la lettre* e *représente la base.*

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

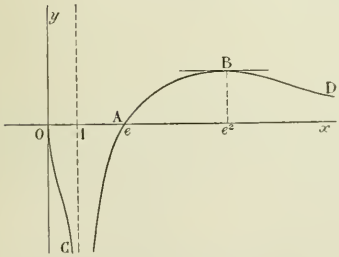
1. Il est naturel de désigner $\log x$ par z : alors, en remarquant que $\log e = 1$, on peut écrire

$$y = 4e\,\frac{z-1}{z^2}.$$

D'autre part, comme $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$, on a successivement

$$y = 4e\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right],$$

$$y' = 4e\left(\frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{x}, \qquad \text{ou} \qquad y' = 4e\,\frac{2-z}{xz^3}.$$



Rien n'est plus facile que d'étudier maintenant les variations de y et de construire la courbe représentée par l'équation donnée : d'abord, pour que la fonction soit définie, il faut que $\log x$ existe, c'est-à-dire que x soit positif ; or, tant que x est plus petit que 1, z est négatif, donc y' est négatif aussi ; ensuite z devient positif, y' est donc positif jusqu'à ce que z atteigne la valeur 2, c'est-à-dire x la valeur e^2 ; après cela z est positif et plus grand que 2, y' est donc toujours négatif.

Il en résulte que de 0 à 1 y décroît ; de 1 à e^2, y croît, et ensuite il décroît constamment.

Pour $x = +\varepsilon$, z est infini et négatif, donc y est nul et négatif ; pour $x = 1$, ou plutôt $1 - \varepsilon$, z devient nul et y égal à $-\infty$; au delà, pour $x = 1 + \varepsilon$, y reste égal à $-\infty$, puis il croît, atteint la

valeur 0 pour $x = e$, passe par un maximum égal à e pour $x = e^2$, et enfin décroît indéfiniment et atteint la valeur 0 pour $x = +\infty$. La tangente à l'origine est fournie par la valeur de y' pour $x = +\varepsilon$; or on sait que $x(\log x)^2$ tend vers zéro avec x, donc y' devient infini et la première tangente est Oy.

Il est dès lors facile de construire la courbe qui a la forme ci-dessus.

2. L'aire Σ a pour expression

$$\int_e^{e^2} y\,dx = 4e\int_1^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z dz.$$

Or, la fonction sous le signe $\int$ est visiblement la dérivée de $\frac{e^z}{z}$; par conséquent, l'aire Σ a pour valeur

$$4e\left(\frac{e^2}{2} - e\right).$$

3. Revenons maintenant à la figure de l'énoncé; désignons par α et β les coordonnées du point N, par y l'ordonnée du point M et par x l'abscisse du point R. Nous avons $y = f(\alpha)$, en appelant $f(x)$ la fonction donnée, et $MS = QR = x - e = \varphi(\beta) - e$, en appelant $\varphi(x)$ la fonction inverse de $f(x)$; donc l'ordonnée du point S est donnée par

$$y = f(\alpha) + \varphi(\beta) - e;$$

donc le coefficient angulaire du lieu de S est fourni par

$$y' = \frac{df}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\beta}\,\frac{d\beta}{d\alpha};$$

d'autre part $\frac{d\beta}{d\alpha}$ est le coefficient angulaire de la corde AB; par conséquent

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{e}{e^2 - e} = \frac{1}{e - 1}.$$

Si maintenant l'on fait tendre le point N vers le point A, les points M, R, Q et S tendent aussi vers le point A, $\frac{df}{d\alpha}$ devient le coefficient angulaire de la tangente à la courbe proposée au point A; $\frac{d\varphi}{d\beta}$, qui est la dérivée de la fonction inverse, devient l'inverse de ce nombre, et l'on a finalement :

$$y' = 4 + \frac{1}{4(e-1)} = 4{,}14.$$

4. L'aire engendrée par MS est une somme d'éléments de la forme $MS.d\alpha$, où l'on fait varier α, c'est-à-dire x, de e jusqu'à e^2; l'aire engendrée par le segment QR est une somme analogue d'éléments de la forme $QR.d\beta$; or $QR = MS$ et $MS.d\alpha = MS.d\beta\,\frac{d\alpha}{d\beta}$; par conséquent l'aire Σ' est égale à l'aire Σ_1 engendrée par QR, multipliée par $\frac{d\alpha}{d\beta}$, c'est-à-dire par l'inverse du coefficient angulaire de AB, $e - 1$.

D'autre part $\Sigma_1 + \Sigma$ est égal à l'aire du rectangle construit sur AD et BD; donc

$$\Sigma_1 + \Sigma = e(e^2 - e);$$

Or $\Sigma_1 = \Sigma'\,\frac{1}{e-1}$; on a donc finalement la relation $\Sigma + \frac{\Sigma'}{e-1} = e^2(e-1)$.

Il est visible que la nature particulière de la courbe A^B n'intervient en rien dans ce raisonnement et que le résultat trouvé serait absolument le même pour toute autre courbe AB passant aux points A et B et représentée par une fonction $y = F(x)$, bien définie dans l'intervalle (e, e^2) et croissante dans cet intervalle. Il est même inutile, comme l'énoncé le mentionne à tort, de supposer l'arc AB au-dessus de la corde AB.

Bonnes solutions : MM. G. Garre; G. Foucry, à Roanne; M. de Pringy; L. Sire, à Lyon; J. Biny.
Assez bonnes solutions : MM. J. Sebag, à Tunis; J. Mourrer, lycée de Marseille; G. Lach, à Denain; L. Simon; Amblard, à Ruines.

1701. — *On considère un plan* P *et un système* (S) *de forces appliquées à un solide invariable ; ce système, par hypothèse, n'est équivalent ni à une force unique, ni à un couple, ni à zéro.*

1° *Démontrer sans calcul que le système* (S) *peut être en général remplacé par deux forces, l'une* F_1 *normale au plan* P, *l'autre* F_2 *située dans ce plan.*

Indiquer les conditions de possibilité du problème.

2° *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires ;* X, Y, Z, L, M, N *les six coordonnées du système* (S), *c'est-à-dire les projections sur les axes de la résultante générale et du moment résultant relatif au point* O.

Soit enfin $ux + vy + wz + h = 0$ *l'équation du plan* P.

On demande de calculer les coordonnées x_1, y_1, z_1 *du point de rencontre* A *de la force* F_1 *avec le plan* P, *ainsi que l'équation du plan* π *mené perpendiculairement au plan* P *par la droite* D *qui porte* F_2.

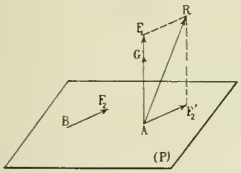
3° *On assujettit le plan* P *à passer par une droite fixe donnée* Δ.

Trouver le lieu géométrique (C) *du point* A *et le lieu géométrique* (Σ) *de la droite* D, *quand le plan* P *pivote autour de la droite donnée* Δ.

4° *Former l'équation réduite de la surface* (Σ), *et discuter la nature de cette surface suivant les positions diverses de la droite donnée* Δ.

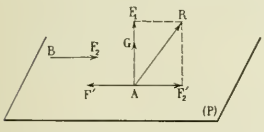
1. Supposons que le système (S) soit équivalent à une force AF_1 perpendiculaire au plan P au point A et à une force BF_2 située dans le plan P. La force BF_2 ne peut passer par le point A, car si elle y passait, le système (S) serait équivalent à une force unique, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Faisons la réduction pour le point A. Nous menons la force AF'_2 équipollente à BF_2, nous composons AF'_2 et AF_1, ce qui nous donne la résultante de translation AR, et *cette résultante n'est ni parallèle, ni perpendiculaire au plan* P. Quant au moment résultant relatif au point A, il se réduit au moment AG de la force BF_2. Donc *ce moment est perpendiculaire au plan* P.

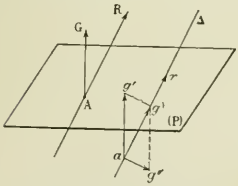


Inversement, supposons qu'il existe un point A du plan P tel que la réduction du système (S) par rapport à ce point fournisse une résultante de translation AR, *oblique au plan* P, et un moment résultant AG *perpendiculaire à ce plan*, je dis que le système (S) est équivalent à une force AF_1 perpendiculaire au plan P et à une force BF_2 située dans le plan P.

Décomposons en effet la force AR en deux forces, l'une AF_1 normale au plan et l'autre AF'_2 située dans le plan. Nous pouvons considérer AG comme l'axe du couple résultant, et prendre pour l'une des forces de ce couple une force AF' égale et opposée à AF'_2. L'autre force du couple, BF_2, sera située dans le plan P, et comme AF' et AF'_2 se détruisent, le système (S) sera équivalent aux deux forces F_1 et F_2.



Donc pour que le problème soit possible, il faut que la résultante de translation du système (S) ne soit ni parallèle ni perpendiculaire au plan P ; et nous allons établir que cette condition est suffisante en montrant que, si elle est remplie, on peut trouver un point A du plan P pour lequel le moment résultant du système (S) est perpendiculaire à ce plan.



Soit Δ l'axe central du système, ar et ag la résultante de translation et le couple résultant relatifs au point a de cette droite. Décomposons le couple ag en un couple ag' perpendiculaire au plan P et en un couple ag'' perpendiculaire à Δ et situé dans le plan $g'a\Delta$. La force ar et le couple ag'' sont équivalents à une force unique AR équipollente à ar (on peut supposer que le point A est dans le plan P). Le couple ag' peut se transporter parallèlement en

AG. Le système (S) est alors équivalent à la force AR oblique au plan P et au couple AG normal à ce plan. Le problème est résolu.

Et l'on voit immédiatement que la solution est unique, car si l'on fait la réduction pour un autre point du plan P, on obtiendra un couple résultant qui ne sera pas perpendiculaire au plan P.

2. Pour déterminer les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point A, nous écrirons que ce point est dans le plan P et que le moment résultant du système par rapport au point A est perpendiculaire au plan P. Nous obtenons ainsi les équations

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0,$$

$$\frac{L - y_1Z + z_1Y}{u} = \frac{M - z_1X + x_1Z}{v} = \frac{N - x_1Y + y_1X}{w},$$

qu'on peut écrire, en désignant par λ la valeur commune de ces trois rapports,

$$\begin{aligned} -y_1Z + z_1Y - u\lambda + L &= 0, \\ -z_1X + x_1Z - v\lambda + M &= 0, \\ -x_1Y + y_1X - w\lambda + N &= 0, \\ ux_1 + vy_1 + wz_1 + h &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions les trois dernières de ces équations respectivement par w, $-v$, X, et ajoutons-les membre à membre, nous obtenons

$$x_1(uX + vY + wZ) + hX + Mw - Nv = 0,$$

et comme $uX + vY + wZ$ n'est pas nul, puisque la résultante de translation n'est pas parallèle au plan P, nous avons

$$x_1 = \frac{Nv - Mw - hX}{uX + vY + wZ}.$$

On a de même

$$y_1 = \frac{Lw - Nu - hY}{uX + vY + wZ}, \qquad z_1 = \frac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + uZ}.$$

Pour avoir l'équation du plan π nous remarquons que ce plan est le lieu du point tel que le moment résultant du système (S) par rapport à ce point soit parallèle au plan P. Par suite, l'équation du plan π est

$$u(L - yZ + zY) + v(M - zX + xZ) + w(N - xY + yX) = 0,$$

ou

$$x(vZ - wY) + y(wX - uZ) + z(uY - vX) + Lu + Mv + Nw = 0.$$

On vérifie aisément qu'il est perpendiculaire au plan P.

3. Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations de la droite Δ.

Le plan P a une équation de la forme

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + D + \lambda D' = 0.$$

Les coordonnées du point A sont alors

$$x_1 = \frac{N(B + \lambda B') - M(C + \lambda C') - X(D + \lambda D')}{X(A + \lambda A') + Y(B + \lambda B') + Z(C + \lambda C')},$$

$$y_1 = \frac{L(C + \lambda C') - N(A + \lambda A') - Y(D + \lambda D')}{X(A + \lambda A') + Y(B + \lambda B') + Z(C + \lambda C')},$$

$$z_1 = \frac{M(A + \lambda A') - L(B + \lambda B') - Z(D + \lambda D')}{X(A + \lambda A') + Y(B + \lambda B') + Z(C + \lambda C')};$$

les deux termes de chaque fraction sont des fonctions linéaires du paramètre λ, et les trois dénominateurs sont identiques. Il en résulte que le point A décrit une droite.

D'autre part, la droite D, intersection des plans P et π, est définie par les équations

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C')z + D + \lambda D' = 0,$$

$$(A + \lambda A')(L - yZ + zY) + (B + \lambda B')(M - zX + xZ) + (C + \lambda C')(N - xY + yX) = 0.$$

L'équation du lieu de cette droite s'obtient en éliminant λ entre ces deux équations. Nous obtenons ainsi

$$\frac{A(L - yZ + zY) + B(M - zX + xZ) + C(N - xY + yX)}{Ax + By + Cz + D} = \frac{A'(L - yZ + zY) + \cdots}{A'x + B'y + C'z + D'};$$

c'est l'équation d'une quadrique (Σ), passant par la droite Δ.

4. Prenons pour axe des z l'axe central et pour axe des x la perpendiculaire commune à l'axe central et à la droite Δ.

Nous avons alors $X = Y = L = M = 0$, et les équations de Δ peuvent s'écrire

$$x - a = 0, \qquad my - z = 0,$$

car cette droite ne peut être parallèle à Oz.

Dans l'équation de la surface (Σ) trouvée plus haut, nous ferons $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -a$, $A' = 0$, $B' = m$, $C' = -1$, $D' = 0$, et l'équation devient

$$\frac{-yZ}{x - a} = \frac{mxZ - N}{my - x}$$

ou, en posant $\frac{N}{Z} = k$,

$$m(x^2 + y^2) - yz - (am + k)x + ak = 0.$$

Pour former l'équation réduite de cette quadrique, calculons l'équation en S :

$$(m - S)^2(-S) - \frac{1}{4}(m - S) = 0$$

ou

$$(m - S)\left[S^2 - mS - \frac{1}{4}\right] = 0.$$

Premier cas. $m \neq 0$. La droite Δ n'est pas perpendiculaire à Oz.

L'équation en S a trois racines distinctes non nulles : d'abord la racine m, puis les deux racines de l'équation $S^2 - mS - \frac{1}{4} = 0$, qui sont de signes contraires,

$$m' = \frac{m - \sqrt{m^2 + 1}}{2}, \qquad m'' = \frac{m + \sqrt{m^2 + 1}}{2}.$$

La surface admet un centre unique, ayant pour coordonnées $\frac{am + k}{2m}$, 0, 0; si nous transportons l'origine en ce point, l'équation devient

$$m(x^2 + y^2) - yz - \frac{(am - k)^2}{4m} = 0.$$

Par suite l'équation réduite est

$$mx'^2 + m'y'^2 + m''z'^2 - \frac{(am - k)^2}{4m} = 0.$$

Si $am - k \neq 0$, elle représente un hyperboloïde à une nappe ; si $am - k = 0$, un cône réel.

Deuxième cas. $m = 0$. La droite Δ est perpendiculaire à Oz.

L'équation de la surface se réduit à

$$yz - k(x - a) = 0;$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique. Pour avoir son équation réduite, nous transportons d'abord l'origine au point $x = a$, $y = 0$, $z = 0$; puis, nous prenons pour axes des y' et des z' les bissectrices de l'angle yOz, l'axe des x ne changeant pas. Les formules de transformation sont alors

$$y = \frac{y' - z'}{\sqrt{2}}, \qquad z = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}},$$

et l'équation réduite est

$$y'^2 - z'^2 - 2kx = 0.$$

DANBON, élève au lycée Louis-le-Grand.

Bonne solution de M. Amblard, à Rumes.

1703. — *Un condensateur a une surface de* $376^{m^2},992$; *l'épaisseur de sa lame isolante est de* 1 *centimètre et son pouvoir inducteur spécifique est* 3. *On le charge au potentiel de* 10000 *volts ; on le décharge à travers un fil métallique de* 2 *mètres de longueur et de* $\frac{1}{10}$ *de millimètre de rayon, dont la chaleur spécifique est* 0,1 *et la densité* 5. *On demande :*

1° *Les valeurs numériques, dans le système électrostatique* C. G. S. *et dans le système électromagnétique pratique, de la capacité du condensateur et de son énergie quand il est chargé :*

2° *Le nombre de degrés dont s'élèvera la température du fil par suite de la décharge ;*

3° *Le poids d'eau, prise à zéro, qui pourrait être transformé en vapeur sous la pression normale, avec la chaleur dégagée pendant la décharge.*

N.-B. — *On prendra pour chaleur latente de vaporisation de l'eau* 537, *et on supposera constante et égale à l'unité sa chaleur spécifique entre* 0° et 100°.

1° D'après une formule connue, on a, dans le système électrostatique,

$$C = \frac{ks}{4\pi e}.$$

Exprimons s et e en unités C. G. S. ; il vient

$$C = \frac{3 \times 3769920}{4 \times 3,1416} = 900\,000.$$

Comme le microfarad vaut précisément 900000 unités électrostatiques C. G. S., la capacité du même condensateur vaut exactement 1 microfarad.

L'énergie est donnée, dans les deux systèmes, par la formule

$$U = \frac{1}{2} CV^2.$$

Le volt vaut $\frac{1}{300}$ d'unité électrostatique C. G. S ; on a donc, dans ce système,

$$U = \frac{1}{2} \times 900\,000 \times \left(\frac{10\,000}{300}\right)^2 = 5 \times 10^8 \text{ ergs}.$$

Dans le système pratique, C vaut 1 millionième et l'on a

$$U = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 10^8 = 50 \text{ joules}.$$

2° La petite calorie équivaut à 4,2 joules. La chaleur de la décharge vaut donc $\frac{50}{4,2}$ petites calories. D'autre part, la chaleur nécessaire pour échauffer un corps de $t°$ s'exprime par le produit mct, m désignant sa masse en grammes et c sa chaleur spécifique. Nous devons donc avoir, en exprimant m à l'aide des dimensions et de la densité,

$$\pi \times 10^{-4} \times 200 \times 5 \times 0,1 \times t = \frac{50}{4,2},$$

d'où

$$t = 381°.$$

3° La chaleur nécessaire pour vaporiser un poids d'eau p dans les conditions de l'énoncé est évidemment $637\,p$. On doit donc avoir

$$637\,p = \frac{50}{4,2}, \qquad \text{d'où} \qquad p = 0^g,0187.$$

ESTEBEN, à Bordeaux.

Bonne solution de M. J. Biny.
Solutions en partie exactes de MM Amblard et de Bazillac

1704. — *On ajoute une solution d'un iodure alcalin à une solution étendue de sulfate de cuivre en excès. Il se fait un précipité qui, après lavage et dessiccation, est introduit dans un petit tube de verre; l'augmentation du poids du tube montre qu'il y a été placé* $1^g,345$ *de précipité.*

On chauffe le tube au rouge sombre, en même temps qu'on y fait passer lentement un courant d'oxygène; il se dégage de l'iode qu'on recueille dans un tube qui fait suite au premier. Le tube laboratoire a perdu $0^g,7858$ *de son poids; il contient maintenant de l'oxyde de cuivre* CuO *pur. L'iode qui a pris naissance est redissous dans une dissolution d'iodure de potassium qu'on étend ensuite à* 100^{cm3}. *On introduit cette solution dans une burette et on la fait tomber goutte à goutte dans* 10^{cm3} *d'une solution d'hyposulfite de sodium additionnée d'empois d'amidon: il en faut* $10^{cm3},4$ *pour faire apparaître la coloration bleue. On vérifie d'autre part qu'il faut* $13^{cm3},6$ *de cette solution d'hyposulfite pour décolorer* 10^{cm3} *d'une solution décinormale d'iode.*

On demande : la composition et la formule du précipité; l'équation de la réaction de l'iodure sur le sulfate de cuivre ; peut-on, en additionnant la solution cuprique d'un réactif très usité, précipiter tout l'iode de l'iodure alcalin?

N.-B. — Poids atomiques donnés : Cu = 63, I = 127, O = 16, S = 32, Na = 23.

Le tube laboratoire ayant reçu $1^g,345$, perdu $0^g,7858$ et ne contenant maintenant que de l'oxyde de cuivre, le nombre x de molécules de cet oxyde est tel que l'on ait

$$x(63 + 16) = 1,345 - 0,7858, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0,00708.$$

Le précipité contenait donc 7 milliatomes de cuivre.

Les 10^{cm3} de solution décinormale d'iode en contiennent un milliatome. Donc $13^{cm3},6$ de la solution d'hyposulfite correspondent à 1 milliatome d'iode ; 10^{cm3} correspondent à $\frac{10}{13,6}$ de milliatome ; ce poids d'iode étant contenu dans $10^{cm3},4$ de solution, les 100^{cm3} qui contiennent la totalité en représentent $\frac{100}{10,4} \times \frac{10}{13,6} = 7,07$. Le précipité contenait donc exactement le même nombre d'atomes de cuivre et d'iode.

Contenait-il autre chose ? Le départ de l'iode a été cause d'une perte de poids égale à $0,00707 \times 127$. La fixation d'un nombre égal d'atomes d'oxygène produit une augmentation de poids égale à $0,00707 \times 16$. La différence $(0,00707(127 - 16) = 0,78477$ représente presque exactement la perte de poids donnée. Donc le précipité ne contenait que du cuivre et de l'iode et sa formule est CuI.

L'idée la plus simple au sujet de la réaction est de la représenter par l'équation

$$SO^4\,Cu + 2KI = SO^4K^2 + CuI + I,$$

l'iode libre disparaissant dans les opérations de lavage et de dessiccation. Il convient toutefois d'observer que la réalité de cette réaction est contestable, surtout si le sulfate de cuivre est, comme l'indique l'énoncé, en excès.

On sait d'ailleurs qu'en additionnant la liqueur cuprique de sulfite acide de sodium, on précipite tout l'iode à l'état d'iodure cuivreux :

$$2SO^4Cu + 2KI + SO^3NaH + H^2O = 2SO^4KH + SO^4NaH + 2CuI.$$

Bonne solution de M. J. Biny.

CONCOURS DE 1909

POUR L'EMPLOI DE

COMMISSAIRE-CONTROLEUR DES SOCIÉTÉS D'ASSURANCES SUR LA VIE.

(10 février 1909.)

ÉPREUVES ÉLIMINATOIRES

Mathématiques.

I. — Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int (\sqrt{1+x^2}-x)^{\frac{1}{p}}(\sqrt{1+x^2}+x)^{\frac{1}{q}}\,dx.$$

II. — On considère la suite des polynomes

$$P_0 = 1,$$
$$P_1 = 1 + x,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$P_n = xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2}.$$

Démontrer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles.

Résoudre l'équation $P_4 = 0$.

Calculer la plus grande racine positive de cette équation à 0,001 près

III — Etant données 9 urnes identiques, qui renferment, la première 9 boules blanches et une boule noire, la 2e 8 boules blanches et 2 boules noires, etc..., la 9e 1 boule blanche et 9 boules noires, on tire, de l'une de ces urnes prise au hasard, une boule trois fois de suite, en remettant chaque fois la boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer ainsi deux boules blanches et une boule noire (abstraction faite de l'ordre du tirage) ?

Cet événement s'étant réalisé, quelle est la probabilité pour que le tirage provienne de la troisième urne?

On exprimera les résultats en fractions décimales.

ÉPREUVES DÉFINITIVES

Composition de Comptabilité.

Une société, ayant emprunté, en janvier 1909, un capital de 15.000 fr., s'engage à l'avoir remboursé en décembre 1911.

Présenter et expliquer quelles sont les écritures auxquelles donne lieu cette opération dans les inventaires arrêtés au 31 décembre de chacune des années 1909, 1910 et 1911 et les articles devant figurer à ces trois bilans :

1° Dans l'hypothèse où la société peut effectivement rembourser sur ses bénéfices un tiers de sa dette chaque année ;

2° Dans l'hypothèse où la société amortit chaque année 1/3 de la dette, qui ne sera remboursée effectivement qu'en une fois dans le courant de décembre 1911.

Composition financière.

I. — Une société a émis le 1er janvier 1890, moyennant une prime annuelle, payable d'avance, de 34 fr.93, des bons de 1.000 fr. chacun, remboursables au plus tard le 31 décembre 1910, et, par anticipation, au moyen de tirages au sort ayant lieu à la fin de chaque année. On amortit à chaque tirage 5 bons sur 100 bons émis à l'origine. Après amortissement d'un bon, la prime annuelle correspondante cesse d'être due. Calculer la réserve mathématique d'un bon, au 31 décembre 1904, immédiatement après le tirage? Taux d'intérêts 3 1/2 %.

II. — Etablir les formules des primes pures de l'assurance d'un capital payable au décès d'une tête d'âge x, à la condition qu'elle ait survécu à une tête d'âge y.

III. — Sachant qu'un capital de 100 fr., versé à 50 ans, donne une rente viagère immédiate de 7 fr., 13, que le même capital produit à 60 ans une rente viagère de 38 fr., 65 s'il est versé à 20 ans, et une rente de 15 fr., 98 s'il est versé à 50 ans, trouver le montant de la rente produite à 50 ans par le capital de 100 fr. versé à 20 ans.

QUESTIONS PROPOSÉES

1779. — On considère une conique C de centre O et la conique K qui a pour sommets les rebroussements de la développée de C.

1° Soit M un point variable de la conique K ; sur OM comme diamètre, on décrit un cercle Γ qui coupe les axes en P et Q. Enveloppe de PQ.

2° Le cercle Γ rencontre la conique K en trois points P_1, P_2, P_3 autres que M. Enveloppe des côtés du triangle $P_1P_2P_3$.

3° Le triangle $P_1P_2P_3$ est conjugué par rapport à l'hyperbole équilatère dont les sommets sont les foyers de la conique C.

4° A chaque point M de la conique K, on fait correspondre la droite μ qui joint les centres de courbure en M aux deux coniques qui y passent et qui sont homofocales à la conique C. Enveloppe des droites μ.

(D'après LAGUERRE.)

1780. — On sait que le lieu des projections d'un point A sur les génératrices d'un cylindroïde

$$z = \frac{2kxy}{x^2+y^2}, \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{k(X^2-Y^2)}{X^2+Y^2},$$

est une courbe plane dont le plan P passe par une génératrice G du cylindroïde (une conique). L'abscisse et l'ordonnée du point A étant x_1 et y_1 (sa cote est indifférente), la génératrice G est celle qui correspond à $\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}$, et le point de contact B du plan P avec la surface est la projection du point A sur cette génératrice.

Si le point A se déplace sur un cylindre d'axe Oz (ou simplement sur une section droite d'un tel cylindre), les axes X'OX et Y'OY, qui sont les bissectrices des axes primitifs $x'Ox$ et $y'Oy$, interceptent sur la droite ab, projection de AB, une longueur constante $2a$, a étant le rayon du cylindre ; le lieu du point B est l'intersection du cylindroïde et d'une quadrique de révolution : examiner les projections de cette courbe sur les plans XOY, zOY, zOX ; montrer que le plan de l'infini est doublement osculateur à la courbe.

(G. F.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1908.

1705. — *Mouvement avec frottement d'un point matériel pesant sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizon. Le mobile est lancé d'un point A du plan avec une vitesse initiale V_0 dirigée suivant la ligne de plus grande pente de ce plan et de bas en haut. Le plan incliné est supposé illimité.*

Donner sans démonstration :

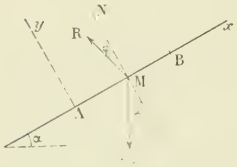
1° la condition à laquelle doit satisfaire le coefficient f de frottement pour que le mobile redescende du point le plus haut B qu'il peut atteindre ;

2° dans le mouvement ascendant et dans le mouvement descendant, les expressions en fonction du temps, de l'espace parcouru et de la vitesse.

Application. — On a observé que le mobile emploie pour descendre de B à A un temps double de celui qu'il a mis pour monter de A à B ; en faisant $\alpha = 45°$, calculer :

1° le coefficient f de frottement ; 2° la vitesse avec laquelle le mobile revient en A, V_0 étant supposée donnée.

1° La condition pour que le mobile redescende du point B où il arrive sans vitesse est que l'angle α soit supérieur ou au moins égal à l'angle φ du frottement :



$$\alpha \geqslant \varphi,$$

d'où, en remarquant que $f = \operatorname{tg}\varphi$,

$$f \leqslant \operatorname{tg}\alpha.$$

2° *a*) *Mouvement ascendant.* — Prenant les axes indiqués sur la figure, on a pour équation du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha - R\sin\varphi, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\cos\alpha + R\cos\varphi = 0.$$

Or $y = 0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$, donc $R = \dfrac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}$. Portant dans la première équation, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\alpha - g\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi = -\frac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha+\varphi),$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Le mobile arrive en B au temps

$$t_B = \frac{v_0\cos\varphi}{g\sin(\alpha+\varphi)}$$

et l'espace parcouru est

$$AB = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\cos\varphi}{g\sin(\alpha+\varphi)}.$$

b) *Mouvement descendant.* — Les équations du mouvement deviennent

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha + R\sin\varphi, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\cos\alpha + R\cos\varphi = 0,$$

d'où $\quad R = \dfrac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi} \quad$ et $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\alpha + g\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{g}{\cos\varphi}\sin(\alpha-\varphi).$

Soit t' le temps compté à partir du passage au point B. On aura

$$\frac{dx}{dt} = -gt'\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad x = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\cos\varphi}{g\sin(\alpha+\varphi)} - \frac{1}{2}gt'^2\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Quand le mobile arrive en A, c'est que $x = 0$, donc

$$t'_A = \frac{v_0\cos\varphi}{g\sqrt{\sin(\alpha+\varphi).\sin(\alpha-\varphi)}}$$

et sa vitesse est

$$v'_A = -\frac{g.\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}\times\frac{v_0\cos\varphi}{g\sqrt{\sin(\alpha+\varphi).\sin(\alpha-\varphi)}} = -v_0\sqrt{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}};$$

elle est inférieure à v_0 en valeur absolue.

Application : $\alpha = 45°$, $t'_A = 2t_B$.

On a

$$\frac{t_A}{t_B} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}},$$

c'est donc que $\quad \dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi} = 4, \quad$ d'où $\quad \operatorname{tg}\varphi = f = \dfrac{3}{5}.$

De plus

$$v'_A = -v_0\sqrt{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}} = -\frac{v_0}{2}.$$

P. L.

Solutions de MM. Charles Guillerme, lycée de Bourg ; G. Lach, à Denain ; L. Michel, au 126e d'infanterie à Brive ; Louis Sire, à Lyon ; J. Verots, école des Anglais, à Lyon ; J. Biny.

1706. — 1° *Construire la courbe* (G) *dont l'équation en coordonnées polaires est*

$$\rho = 5a - 4a\cos\omega - 3a\sin\omega.$$

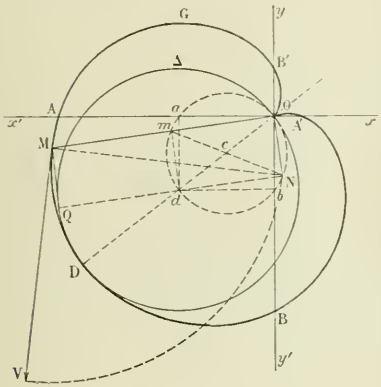
a est une longueur positive donnée.

2° *En un point* M *de* (G), *on lui mène la normale, et au pôle* O, *on élève la perpendiculaire à* OM ; *ces deux droites se coupent en* N. *Par* M, *on mène le vecteur* MQ *équipollent au vecteur* ON (*sous-normale en* M). *Trouver soit en coordonnées cartésiennes (ou linéaires), soit en coordonnées polaires l'équation du lieu* (Δ) *du point* Q ; *le construire ainsi que sa tangente en* Q.

3° *Pour une position donnée de* Q *sur* (Δ) *construire le point correspondant* M *de* (G) *et la tangente à* (G) *en* M. *Dans l'hypothèse où le point* Q *décrit* (Δ) *d'un mouvement uniforme avec une vitesse* 5*a dirigée de manière à ce que le vecteur* OQ *tourne dans le sens positif de l'angle polaire* ω, *calculer la vitesse angulaire de rotation du vecteur* OM *et construire le vecteur vitesse du point* M *sur sa trajectoire* (G).

1° Le rayon vecteur du point M qui décrit la courbe s'obtient en augmentant de $5a$ le rayon vecteur du point m qui décrirait le cercle d'équation

$$r = -4a\cos\omega - 3a\sin\omega.$$



Ce cercle passe par le pôle et rencontre les axes ox, oy aux points a d'abscisse $x = -4a$, b d'ordonnée $y = -3a$; son diamètre est égal à $a\sqrt{4^2 + 3^2} = 5a$. Donc la courbe (G) est une cardioïde ayant le pôle pour point de rebroussement et pour tangente en ce point le diamètre Od du cercle, dont la direction fait avec l'axe polaire l'angle α défini par l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \quad \text{d'où} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}. \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Si on introduit cet angle α dans l'équation de la courbe (G), on obtient

$$\rho = 5a\left[1 - \cos(\omega - \alpha)\right] = 10a\sin^2\frac{\omega - \alpha}{2}.$$

On fera varier ω de $\alpha - \pi$ à $\alpha + \pi$; on obtient ainsi deux branches de courbe symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite OD. La variation du rayon vecteur est évidente, ρ décroît de $10a$ à 0 et croît ensuite de 0 à $10a$ en reprenant les mêmes valeurs pour des valeurs de ω équidistantes de α.

2° Le vecteur MQ étant équipollent au vecteur ON, on a

$$(OQ) = (OM) + (MQ) = (OM) + (ON).$$

Or OM est un vecteur dont la direction positive est donnée par l'angle ω et la valeur algébrique est ρ ; ON (sous-normale) a pour direction positive la direction $\omega + \frac{\pi}{2}$ et pour valeur algébrique ρ'. Si on veut les coordonnées cartésiennes du point Q, il suffit de projeter sur les axes Ox et Oy. On aura ainsi

$$x = \rho\cos\omega + \rho'\cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \rho\cos\omega - \rho'\sin\omega, \qquad y = \rho\sin\omega + \rho'\sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \rho\sin\omega + \rho'\cos\omega.$$

Or

$$\rho' = 4a\sin\omega - 3a\cos\omega,$$

$$x = (5a - 4a\cos\omega - 3a\sin\omega)\cos\omega - (4a\sin\omega - 3a\cos\omega)\sin\omega = 5a\cos\omega - 4a,$$

$$y = (5a - 4a\cos\omega - 3a\sin\omega)\sin\omega + (4a\sin\omega - 3a\cos\omega)\cos\omega = 5a\sin\omega - 3a.$$

Le lieu (Δ) du point Q est le cercle

$$(x + 4a)^2 + (y + 3a)^2 = 25a^2,$$

qui a pour centre le point d $(-4a, -3a)$ et pour rayon $5a = dO$. Ce cercle passe donc par le pôle ; sa

tangente en Q est perpendiculaire à dQ. On reconnait aisément que c'est la droite MQ ; en effet

$$\frac{dx}{d\omega} = -5a \sin \omega, \qquad \frac{dy}{d\omega} = 5a \cos \omega;$$

le coefficient angulaire de la tangente est

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{tg}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right);$$

c'est bien la direction commune à ON et à MQ.

On peut remarquer que les coordonnées de Q sont de la forme

$$x = 5a(\cos \omega - \cos \alpha) = -10a \sin \frac{\omega - \alpha}{2} \sin \frac{\omega + \alpha}{2} = 10a \sin \frac{\omega - \alpha}{2} \cos \frac{\omega + \alpha + \pi}{2},$$

$$y = 5a(\sin \omega - \sin \alpha) = 10a \sin \frac{\omega - \alpha}{2} \cos \frac{\omega + \alpha}{2} = 10a \sin \frac{\omega - \alpha}{2} \sin \frac{\omega + \alpha + \pi}{2}.$$

Les coordonnees polaires (r et θ) du point Q sont donc

$$r = 10a \sin \frac{\omega - \alpha}{2}, \qquad \theta = \frac{\omega + \alpha + \pi}{2},$$

d'où l'équation du lieu (Δ) en coordonnées polaires :

$$r = 10a \sin\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -10a \cos(\theta - \alpha).$$

Géométriquement ces résultats sont presque évidents. Soit m un point du cercle C, N le point diamétralement opposé ; c'est l'extrémité de la sous-normale en M à la courbe (G). La figure OMQN est un rectangle, également $OmdN$; donc $mM = dQ$ et comme $mM = 5a$, $dQ = 5a$, le lieu (Δ) du point Q est le cercle décrit de d comme centre avec un rayon égal à $5a$ et par suite à dO. La tangente en Q est bien la droite QM perpendiculaire à dQ.

3° Inversement soit Q un point pris sur le lieu (Δ) ; en joignant ce point au point d, on aura le rayon Qd qui va rencontrer le cercle c au point N. On aura le point M en construisant le rectangle QNOM ; N est l'extrémité de la sous-normale en M, donc NM est la normale et la tangente s'en déduit.

Reprenons les expressions des coordonnées du point Q en fonction de l'angle ω :

$$x = 5a \cos \omega - 4a, \qquad y = 5a \sin \omega - 3a.$$

La vitesse du point Q a pour composantes

$$\frac{dx}{dt} = -5a \sin \omega \frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = 5a \cos \omega \frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$v^2 = 25a^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \qquad v = \pm 5a \frac{d\omega}{dt}.$$

Or on veut que $\frac{d\theta}{dt} > 0$ (OQ devant tourner dans le sens positif de l'angle polaire ω); d'autre part θ étant égal à $\frac{\omega + \alpha + \pi}{2}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{dt}$ a le signe de $\frac{d\omega}{dt}$; donc $\frac{d\omega}{dt}$ doit être positif et pour que $v = 5a$, il faut que $\frac{d\omega}{dt} = 1$. Telle est la vitesse angulaire de rotation du vecteur OM.

Quant à la vitesse du point M, ses composantes sont :

1° suivant le rayon vecteur (direction ω)

$$v_1 = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \rho' = \overline{ON} = \overline{MQ};$$

2° suivant la perpendiculaire au rayon vecteur $\left(\text{direction } \omega + \frac{\pi}{2}\right)$

$$v_2 = \rho \frac{d\omega}{dt} = \rho = \overline{OM}.$$

On l'obtiendra en faisant tourner le vecteur MN d'un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ autour du point M.

P. L.

Solutions de MM. A. Duby, lycée de Dijon ; G. Lach, à Denain ; L. Montaut, lycée d'Alger ; L. Sire, à Lyon ; J. Biny.

1711. — *Calculer, soit en grades, soit en degrés, les trois angles A, B, C d'un triangle sachant qu'ils vérifient les équations*

$$\cos A = \frac{2}{3+\sqrt{2}}. \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \sqrt{\frac{22348 \sin A}{89825}}.$$

Calcul en grades (*Tables à cinq décimales*)

1° Calcul de A.

$$\sqrt{2} = 1,41421$$
$$3+\sqrt{2} = 4,41421$$

4,414	0,64483	$\Delta = 10$
21	2,1	

$$\log(3+\sqrt{2}) = 0,64485,1$$

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\operatorname{colog}(3+\sqrt{2}) = \bar{1},35514,9$$

$$\log \cos A = \bar{1},65617,9$$

$70^g,07$	1	$\Delta = 13$
$-0,005$	6,9	

$$A = 70^g,0650$$
$$B+C = 129^g,9350$$
$$\frac{B+C}{2} = 64^g,9675$$

Calcul de log sin A.

$70^g,06$	$\bar{1},95009$	$\Delta = 3$
5	1,5	

$$\log \sin A = \bar{1},95010,5$$

$$\log 22348 = 4,34924$$
$$\log 89825 = 4,95339,5$$

2° Calcul des angles B et C.

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$.

$64^g,96$	0,21207	$\Delta = 15$
7	10,5	
5	0,75	

$$\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 0,21218,3$$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$.

$$\log \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = 0,21218,3$$
$$\frac{1}{2}\log 22348 = 2,17462$$
$$\frac{1}{2}\log \sin A = \bar{1},97505,25$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{colog} 89825 = \bar{3},52330,25$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \bar{1},88515,8$$

$41^g,67$	03	$\Delta = 14$
9	12,8	

$$\frac{B-C}{2} = 41^g,6790$$
$$\frac{B+C}{2} = 64^g,9675$$
$$B = 106^g,6465$$
$$C = 23^g,2885$$

Résultats : $A = 70^g,0650$
$B = 106^g,6465$
$C = 23^g,2885$

CALCUL EN DEGRÉS (*Tables à sept décimales*)

1° Calcul de A.

$\sqrt{2} = 1,4142136$

$3 + \sqrt{2} = 4,4142136$

4,4142	0,6448520	$\Delta = 98$
1	9,8	
3	2,94	
6	0,588	

$\log (3 + \sqrt{2}) = 0,6448533,3$

$\log 2 = 0,3010300$

$\text{colog}\,(3 + \sqrt{2}) = \bar{1},3551466,7$

$\log \cos A = 1,6561766,7$

63°3′40″	365	$\Delta = 414$
	401,7	
— 9″	372,6	
	29,1	
— 0″,7	28,98	

$A = 63°\ 3'30'',3$

$B + C = 116°56'29'',7$

$\frac{B+C}{2} = 58°28'14'',85$

Calcul de log sin A.

63°3′30″	$\bar{1},9501059$	$\Delta = 107$
0″,3	3,21	

$\log \sin A = \bar{1},9501062,21$

$\log 22348 = 4,3492387$

$\log 89825 = 4,9533972$

$\text{colog}\ 89825 = \bar{5},0466028$

2° Calcul des angles B et C.

Calcul de $\log \text{tg} \frac{B+C}{2}$

58°28′10″	0,2121699	$\Delta = 473$
4″	189,2	
0″,8	37,84	
0″,05	2,365	

$\log \text{tg} \frac{B+C}{2} = 0,2121838,4$

Calcul de $\log \text{tg} \frac{B-C}{2}$

$\log \text{tg} \frac{B+C}{2} = 0,2121838,4$

$\frac{1}{2} \log 22348 = 2,1746193,5$

$\frac{1}{2} \log \sin A = \bar{1},9750531,1$

$\frac{1}{2}\ \text{colog}\,89825 = \bar{3},5233014$

$\log \text{tg} \frac{B-C}{2} = \bar{1},8851577$

37°30′40″	48	$\Delta = 436$
	29	
0″,6	26,16	
	2,84	
0″,06	2,616	

$\frac{B-C}{2} = 37°30'40'',66$

$\frac{B+C}{2} = 58°28'14'',85$

$B = 95°58'55'',51$

$C = 20°57'34'',19$

Résultats : $A = 63°\ 3'30'',3$

$B = 95°58'55'',5$

$C = 20°57'34'',2$

Conversion des degrés en grades.

63°	70ᵍ	95°	105ᵍ,55556	20°	22ᵍ,22222
3′	0,05556	58′	1,07407	57′	1,05556
30″	0,00926	55″	0,01698	34″	0,01049
0″,3	0,00009	0″,5	0,00015	0″,2	0,00006
	A = 70ᵍ,06491		B = 106ᵍ,64676		C = 23ᵍ,28833

P. L.

Ont envoyé des calculs exacts : MM. G. LACH, à Denain ; L. SIMON, section normale de Châlons-sur-Marne.

1707. — *Les armatures d'un condensateur sont des sphères concentriques de rayons* $r_1 = 55^{cm}$ *et* $r_2 = 55^{cm}$ *chargées à une différence de potentiel de* 10 *unités* C. G. S. *électrostatiques ; évaluer l'intensité* H *du champ électrique au milieu de la distance qui sépare les armatures.*

Calculer la valeur numérique de H *en unités électrostatiques et en grammes par microcoulomb. Établir la formule algébrique définitive avant tout calcul numérique.*

Si Q désigne la charge de la sphère intérieure, le champ à une distance x du centre est $\frac{Q}{x^2}$.

Pour $x = \frac{r_1 + r_2}{2}$, on a

$$H = \frac{4Q}{(r_1 + r_2)^2}.$$

D'autre part, la charge Q est liée à la différence de potentiel V par la relation

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{x^2}\,dx = V, \qquad \text{d'où} \qquad Q = V\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Portons cette valeur de Q dans l'expression de H, il vient

$$H = V\frac{4r_1 r_2}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)^2} = 1{,}99.$$

Si l'on admet, comme première approximation, que les deux sphères sont assez rapprochées pour que le champ, dans l'intervalle qui les sépare, puisse être regardé comme constant, on a simplement

$$H = \frac{V}{r_1 - r_2} = 2.$$

Le nombre trouvé pour le champ représente, en dynes, la force qui sollicite une unité électrostatique C. G. S.. Un microcoulomb vaut 3000 unités C. G. S.; il subira une action de 5970 dynes. D'autre part, le gramme-poids vaut 981 dynes ; le nombre cherché sera donc $\frac{5\,970}{981}$, soit environ 6 grammes par microcoulomb.

Solution incomplète de M. de Bazillac.

1708. — *Dans une bombe calorimétrique, on introduit un certain volume d'éthylène. On ajoute la quantité d'oxygène pur nécessaire pour assurer une combustion complète et on enflamme.*

On recueille $3^g{,}94$ *d'anhydride carbonique,* $1^g{,}61$ *d'eau et on constate que la chaleur dégagée est égale à* 15.3 *calories.*

On demande de calculer : 1° *le volume d'éthylène introduit dans la bombe ;* 2° *la chaleur de formation de cet hydrocarbure.*

La réaction $C + O^2 = CO^2$ *dégage* 94 *calories.*

La réaction $H^2 + O = H^2O$ *liquide dégage* 69 *calories.*

Le poids moléculaire de l'anhydride carbonique, CO^2, est égal à $12 + 2 \times 16 = 44$. Donc dans $3^g{,}94$ de ce gaz, il y a un poids de carbone

$$\frac{3{,}94}{44} \times 12 = 1^g{,}0745.$$

Le poids moléculaire de l'eau, H^2O, est égal à $2 + 16 = 18$. Donc dans $1^g{,}61$ d'eau, il y a un poids d'hydrogène

$$\frac{1{,}61}{18} \times 2 = 0^g{,}1788.$$

Le poids d'éthylène brûlé est donc $1{,}0745 + 0{,}1788 = 1{,}2533$.

Or le poids moléculaire de l'éthylène, C^2H^4, est égal à $24 + 4 = 28$; le volume moléculaire commun à tous les gaz, est $22^l,4$. Le volume d'éthylène employé est donc

$$\frac{1,2533}{28} \times 22,4 = 1^l.$$

La chaleur dégagée par la combustion d'une molécule serait 22,4 fois plus grande que la chaleur dégagée par la combustion d'un litre; ce serait donc

$$22,4 \times 15,3 = 342^{cal.}.$$

Or la formule de la réaction est

$$C^2H^4 + 3O^2 = 2CO^2 + 2H^2O.$$

La chaleur dégagée se compose de la chaleur de formation de 2 molécules de gaz carbonique et de 2 molécules d'eau diminuée de la chaleur de formation de l'éthylène. Donc

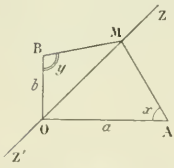
$$2 \times 94 + 2 \times 69 - x = 342,$$

$$x = -16.$$

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions de MM. G. Lach; L. Simon; J. Vérots.
Assez bonnes solutions de MM. C. Guillerme; R. Tellier.

1710. — *Soit* OAB *un triangle rectangle en* O *dans lequel on donne les côtés de l'angle droit* $OA = a$, $OB = b$.



On considère un point M *variable sur la bissectrice* OZ *de l'angle droit* AOB *ou sur son prolongement* OZ'; *on désigne l'angle* OAM *par* x, *et l'angle* OBM *par* y.

1° *Évaluer* tg y *en fonction de* tg x *et des longueurs données* a *et* b.

2° *Connaissant* a *et* b *calculer* tg x *de façon que* $y = 2x$. — *Indiquer dans quels cas le problème est possible, combien il y a de points* M *répondant à la question sur la bissectrice* OZ *et combien il y en a sur son prolongement* OZ'.

3° *Dans le cas où il y a deux positions* M' *et* M'' *du point* M *répondant à la question précédente, on demande de calculer en fonction de* a *et de* b *les cosinus des angles* M'AM'', M'BM'' *et le produit des cosinus des angles* AM'B *et* AM''B.

I. Distinguons suivant que le point M se trouve sur la demi-droite OZ ou sur son prolongement.

1° Dans le triangle OAM on a la relation

$$\frac{OM}{\sin x} = \frac{a}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)};$$

de même dans le triangle OBM,

$$\frac{OM}{\sin y} = \frac{b}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)},$$

d'où, en éliminant OM,

$$\frac{a \sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{b \sin y}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

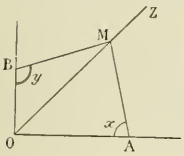
Le point M décrivant la demi-droite OZ, x variera de 0 à $\frac{3\pi}{4}$ et y variera également de 0 à $\frac{3\pi}{4}$.

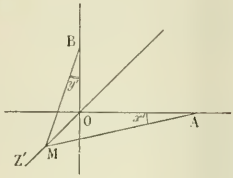
2° Supposons maintenant le point M sur OZ'; nous désignerons par x' et y' les angles OAM, OBM,

et nous aurons

$$\frac{OM}{\sin x'} = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x'\right)}, \qquad \frac{OM}{\sin y'} = \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - y'\right)}.$$

et, en éliminant OM,





$$\frac{a \sin x'}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x'\right)} = \frac{b \sin y'}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - y'\right)}.$$

En posant $x = -x'$, $y = -y'$, on aura encore l'équation

$$\frac{a \sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{b \sin y}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)}$$

trouvée dans le premier cas. Lorsque le point M décrit la demi-droite OZ', x' et y' varient de 0 à $\frac{\pi}{4}$, par suite x et y de 0 à $-\frac{\pi}{4}$. Finalement on a dans tous les cas la relation

$$\frac{a \sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{b \sin y}{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)},$$

x et y étant des angles de même signe, qui varient de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{3\pi}{4}$ lorsque le point M décrit la droite Z'Z.

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{a \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{b \sin y}{\sin y + \cos y} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{a \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{b \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y};$$

on en déduit

$$\operatorname{tg} y = \frac{a \operatorname{tg} x}{b - (a - b) \operatorname{tg} x}.$$

II. — Pour que $y = 2x$, il est *nécessaire* que

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

d'où l'équation du problème :

$$\frac{a \operatorname{tg} x}{b - (a - b) \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

ou, en supprimant la solution $\operatorname{tg} x = 0$, qui est sans intérêt,

$$a \operatorname{tg}^2 x - 2(a - b) \operatorname{tg} x + 2b - a = 0.$$

Discutons d'abord cette équation. La condition de réalité

$$(a - b)^2 - a(2b - a) \geqslant 0$$

ou

$$b^2 - 4ab + 2a^2 \geqslant 0$$

exige que le rapport $\frac{b}{a} = m$ soit compris entre 0 et $2 - \sqrt{2}$ ou supérieur à $2 + \sqrt{2}$.

Une valeur réelle de $\operatorname{tg} x$ correspondra à un point sur OZ si cette valeur est comprise entre 0 et $+\infty$ ou entre $-\infty$ et -1 $\left(0 < x < \frac{3\pi}{4}\right)$; à un point situé sur OZ' si la valeur est comprise entre -1 et 0 $\left(-\frac{\pi}{4} < x < 0\right)$. Nous devons donc comparer les racines de l'équation aux nombres -1 et 0 :

$$f(-1) = 2a > 0,$$
$$f(0) = 2b - a.$$

$f(0)$ sera $\gtrless 0$ suivant que m sera $\gtrless \frac{1}{2}$.

1° $0 < m < \frac{1}{2}$, on a $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(+\infty) > 0$. L'équation a une racine réelle $\operatorname{tg} x'$ comprise entre -1 et 0 correspondant à un point M′ sur OZ′ et une autre racine réelle positive $\operatorname{tg} x''$ correspondant à un point M″ sur OZ. — Pour $m = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x' = 0$, $\operatorname{tg} x'' = 1$.

2° $\frac{1}{2} < m < 2 - \sqrt{2}$, tous les résultats de substitution sont positifs ; la demi-somme des racines $\frac{a-b}{a} = 1 - m$ est positive, donc les deux racines sont positives, et on a deux points M′ et M″ placés tous deux sur OZ.

3° $2 + \sqrt{2} < m$, la demi-somme des racines est négative, elle est plus petite que -1, les deux racines sont plus petites que -1 et les deux points M′ et M″ sont encore sur OZ.

Ces points conviennent-ils à la question proposée ?

De ce que
$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} 2x$$
résulte que l'on a
$$2x = y + k\pi.$$
L'angle y étant compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, pour que l'angle $2x$, qui a même tangente, lui soit égal, il faut et il suffit que $2x$ soit également compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, autrement dit,
$$-\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8},$$
$$1 - \sqrt{2} < \operatorname{tg} x < 1 + \sqrt{2}.$$
Or on a
$$f(1 \mp \sqrt{2}) = 2b(2 \mp \sqrt{2}) > 0.$$

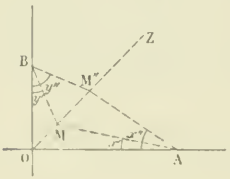
Reprenons la discussion précédente :

1° $0 < m < \frac{1}{2}$, on a
$$f(1 - \sqrt{2}) > 0, \qquad f(0) < 0, \qquad f(1 + \sqrt{2}) > 0 :$$
les deux racines sont comprises entre $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Les deux points M′ et M″ conviennent.

2° $\frac{1}{2} < m$. Tous les résultats de substitution ont le même signe. Pour que les deux racines soient comprises entre $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$, il faut et il suffit que leur demi-somme $1 - m$ soit elle-même comprise entre $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$:
$$1 - \sqrt{2} < 1 - m < 1 + \sqrt{2},$$
ce qui exige $m < \sqrt{2}$; cette condition ne sera remplie que pour $m < 2 - \sqrt{2}$.

Pour $m > 2 + \sqrt{2}$, les points M′ et M″ ne conviennent donc pas. On a vu que les deux racines sont plus petites que -1 ; elles correspondent à des angles x' et x'' compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$; l'angle $2x$ étant alors compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$, la relation entre les arcs serait de la forme
$$2x = y + \pi.$$

III. — Soient M′ et M″ les deux positions du point M répondant à la question, on a
$$\widehat{M'AM''} = x'' - x',$$
$$\widehat{M'BM''} = y'' - y' = 2(x'' - x').$$



Calculons d'abord
$$\operatorname{tg}(x'' - x') = \frac{\operatorname{tg} x'' - \operatorname{tg} x'}{1 + \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x''} = \frac{\sqrt{(a-b)^2 - a(2b-a)}}{b},$$
d'où
$$1 + \operatorname{tg}^2(x'' - x') = \frac{2(a-b)^2}{b^2},$$

et par suite
$$\cos \widehat{M'AM''} = \frac{b}{\sqrt{2}(a-b)}$$

$\left(\text{l'angle } M'AM'', \text{ différence de deux angles compris entre } -\frac{\pi}{8} \text{ et } +\frac{3\pi}{8}, \text{ est aigu et on a } m = \frac{b}{a} < 1\right)$.

On en déduit
$$\cos \widehat{M'BM''} = \frac{b^2}{(a-b)^2} - 1 = \frac{a(2b-a)}{(a-b)^2}.$$

D'autre part,
$$\widehat{AM'B} = \widehat{AM'O} + \widehat{OM'B} = \left(\frac{3\pi}{4} - x'\right) + \left(\frac{3\pi}{4} - y'\right) = \frac{3\pi}{2} - 3x',$$
$$\widehat{AM''B} = \widehat{AM''O} + \widehat{OM''B} = \left(\frac{3\pi}{4} - x''\right) + \left(\frac{3\pi}{4} - y''\right) = \frac{3\pi}{2} - 3x'',$$

d'où
$$\cos \widehat{AM'B}.\cos \widehat{AM''B} = \sin 3x'.\sin 3x''.$$

Or on a
$$2 \sin 3x' \sin 3x' = \cos 3(x'' - x') - \cos 3(x'' + x'),$$
$$\cos 3(x'' - x') = \cos(x'' - x')[1 - 3 \operatorname{tg}^2(x'' - x')] = \frac{-b(b^2 - 6ab + 3a^2)}{\sqrt{2}(a-b)^3}.$$

Calculons maintenant
$$\operatorname{tg}(x'' + x') = \frac{\operatorname{tg} x'' + \operatorname{tg} x'}{1 - \operatorname{tg} x''.\operatorname{tg} x'} = \frac{2(a-b)}{a - (2b - a)} = 1,$$

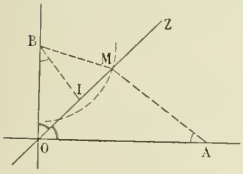
d'où
$$x'' + x' = \frac{\pi}{4}, \qquad \cos 3(x'' + x') = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On a donc
$$2 \cos \widehat{AM'B}.\cos \widehat{AM''B} = \frac{(a-b)^3 - b(b^2 - 6ab + 3a^2)}{\sqrt{2}(a-b)^3}$$
$$= \frac{a^3 - 6a^2b + 9ab^2 - 2b^3}{\sqrt{2}(a-b)^3}.$$

Le numérateur se décompose en $(a - 2b)(a^2 - 4ab + b^2)$. On a donc
$$\cos \widehat{AM'B}.\cos \widehat{AM''B} = \frac{(a-2b)(a^2 - 4ab + b^2)}{\sqrt{2}(a-b)^3}.$$

P. L.

Construction géométrique des points M′ et M″. — Supposons le problème résolu. Soit M un point répondant à la question, BI la bissectrice de l'angle OBM. Le triangle OBI est semblable au triangle OAM et par suite



$$\frac{OB}{OA} = \frac{OI}{OM},$$

d'où
$$\frac{OB}{OA - OB} = \frac{OI}{OM - OI} = \frac{OI}{IM};$$

d'autre part
$$\frac{OI}{IM} = \frac{OB}{BM};$$

on a donc
$$BM = OA - OB = a - b.$$

On aura les points M′ et M″ en décrivant un cercle de B comme centre avec un rayon égal à $a - b$. Pour que ce cercle coupe Z′Z, il faudra que

$$a - b \geqslant \frac{b}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{b}{a} = m \leqslant 2 - \sqrt{2}.$$

Soient M′ et M″ les deux points obtenus ; le triangle BM′M″ est un triangle isocèle ; BM′, BM″ sont symétriques par rapport à la perpendiculaire menée de B sur OZ et on a

$$\frac{y' + y''}{2} = x' + x'' = \frac{\pi}{4}.$$

C'est la relation rencontrée plus haut.

P. L.

Solution exactes de MM. Bros ; G. Lach, à Denain ; R. Manen, à Albi ; L. Sire, à Lyon.
Solutions géométriques : MM. Pierre Dreyfus et Lévy Raoul, collège Chaptal.

QUESTIONS PROPOSÉES

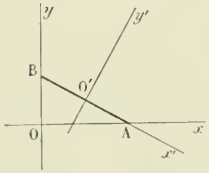
1781. — L'équation du 6e degré

$$x^2[ax^2 + (x - a)^2] - (x - a)^6 = 0$$

se réduit au 5e degré. Montrer qu'elle a pour racine $x = \frac{a}{2}$ et que les quatre autres racines sont imaginaires.

E.-N. Barisien.

1782. — On considère un segment de droite AB de longueur constante $2a$ dont les deux extrémités glissent sur deux axes rectangulaires Ox et Oy et un système d'axes mobiles $O'x'$, $O'y'$, ayant pour origine le milieu de AB, orientés dans le même sens que le système Oxy, et tel que $O'x'$ soit dirigé suivant OA ; on considère en outre un plan mobile invariablement lié aux axes $O'x'$, $O'y'$ et glissant sur le plan fixe qui contient les axes Ox et Oy. Le mouvement de ce plan est tel que la vitesse angulaire de AB soit constante et égale à 1.



1° Etudier le mouvement des points A, B et O′.

2° Former les équations du mouvement d'un point quelconque du plan $O'x'y'$ dont les coordonnées sont $x' = \alpha$, $y' = \beta$. Trouver la trajectoire, la vitesse, l'accélération de ce mouvement. Trouver le point de vitesse nulle au temps t, le lieu de ce point dans le plan fixe et son lieu dans le plan mobile. Montrer que le second roule sans glissement sur le premier.

3° Trouver les trajectoires singulières des points du plan mobile et le lieu des sommets de celles qui correspondent aux points d'une droite passant par le point O′.

4° Construire le centre de courbure qui correspond à un point M du plan mobile. Trouver le point qui a pour centre de courbure le symétrique de A par rapport à O et le lieu de ce point quand t varie.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 9. Juin 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES (*Fin*[1])

par M. **Louis Sire**, à Lyon.

Courbes (Δ) réductibles à un point.

9. — Supposons que l'une des deux familles de courbes (Δ) semblables se réduise au point O et cherchons dans quels cas toute courbe (C) de l'autre famille peut se réduire à un point. Pour cela, il faut et il suffit que

$$\Delta_\mu^k = \frac{4 - 2(k-1)(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 4 - 2(k-1)(\Delta - 2) = 0.$$

d'où nous tirons

$$k = 1 + \frac{2}{\Delta - 2}$$

et, en outre, que la valeur de k obtenue soit entière ; par suite :

La condition nécessaire et suffisante cherchée est que l'expression $\frac{2}{\Delta - 2}$ *soit égale à un nombre entier* n, *positif ou négatif ; il suffira de prendre* $n + 1$ *fois la podaire de toute courbe* (C) *pour obtenir un point. Si* n *est positif, la podaire d'ordre* n *de* (C) *sera une droite ; si* n *est négatif ce sera un cercle.*

Ainsi, si les paraboles (P) se réduisent au foyer O, pour les cardioïdes nous aurons $\frac{2}{\Delta - 2} = -3$, par suite $k = -2$. Donc, si nous prenons la podaire d'ordre -2 de toute cardioïde par rapport à O, nous aurons un point ; la courbe intermédiaire est alors un cercle.

Remarquons que la condition trouvée précédemment exprime également la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'une courbe plane quelconque devienne un point de rebroussement pour sa podaire d'ordre k par rapport à O ; si n est positif le point correspondant de la podaire d'ordre n sera un point d'inflexion ; si n est négatif ce sera le point correspondant de la podaire d'ordre $n - 2$. Pour une courbe (Δ) la propriété s'applique à tous les points ; par suite, comme nous l'avons vu, la courbe est réductible soit à un point, courbe dont tous les points sont de rebroussement, soit à une droite, courbe dont tous les points sont d'inflexion.

10. — Inversement, en prenant les podaires successives d'un point O′ d'ordre positif ou négatif, nous aurons toutes les courbes (Δ) réductibles à ce point ; nous obtiendrons ainsi les principales courbes (Δ) remarquables et les valeurs des delta de ces courbes.

Considérons d'abord les podaires d'ordre positif du point O′ et appliquons la formule Δ_μ^k où nous faisons $\Delta = 0$, puis successivement $k = 1, 2, \ldots n, \ldots$.

Ordre des podaires	Δ des courbes obtenues
0	0 point
1	1 cercle
2	$\frac{4}{3}$ cardioïde
3	$\frac{3}{2}$ podaire de cardioïde
4	$\frac{8}{5}$
....	.....
n	$\frac{2n}{n-1}$
....	.....
$+\infty$	2 spirale logarithmique.

Le delta de la podaire d'ordre n d'un point O′ a donc pour expression $\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}$. On voit ainsi que la série des Δ obtenus, dont le premier terme est 0, est à termes positifs croissants et que le terme général $\frac{2n}{n+1}$ tend vers 2 lorsque n augmente indéfiniment.

1. Voir nos d'avril et mai 1909 de la *Revue*, p. 161 et 185.

Considérons maintenant les podaires d'ordre négatif du point O′ et appliquons, de même, la formule Δ_p^k où nous faisons $\Delta = 0$, puis successivement $k = -1, -2, \ldots \ldots, -n \ldots\ldots$:

Ordre des podaires	Δ des courbes obtenues	
-1	∞	droite
-2	4	parabole
-3	3	podaire négative de parabole.
-4	$\frac{8}{3}$	
. . . .	. . . . .	
$-n$	$\frac{2n}{n-1}$	
. . . .	. . . . .	
$-\infty$	2	spirale logarithmique.

Le delta de la podaire d'ordre $-n$ d'un point O′ a donc pour expression $\frac{2n}{n-1} = 2 + \frac{2}{n-1}$; par suite la série des Δ obtenus dont le premier terme est infini est à termes positifs décroissants et le terme général tend vers 2 lorsque n augmente indéfiniment.

11. — Nous terminerons ce chapitre par la résolution du problème suivant :

Déterminer une courbe plane (C) *dont les podaires ou les quasi-podaires successives, d'ordre positif ou négatif, par rapport à un point* O, *soient semblables à la courbe* (C), *les centres d'homothétie et de rotation étant le point* O.

Le delta de tout point de la podaire d'ordre k, par rapport à O, devra être égal au delta du point homologue de la courbe (C), quel que soit k. Par suite, pour tout point de la courbe (C), nous devrons avoir, quel que soit k,

$$\Delta_p^k = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)} = \Delta,$$

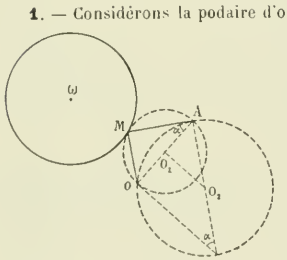
ce qui nous donne $\Delta = 2$; par suite :

La courbe cherchée est une spirale logarithmique ayant O *comme point asymptote, et toutes les courbes répondant à la question sont les spirales semblables à la précédente, par rapport à* O.

On obtient les mêmes courbes lorsqu'on considère seulement une podaire d'ordre k.

Rayon de courbure d'une conique.

1. — Considérons la podaire d'ordre -1 d'un cercle ω par rapport à un point O ; c'est une conique de foyer O dont ω est le cercle principal. Soit a son rayon ; la formule Fs nous donne



$$\frac{\rho_p}{a} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0.$$

Soit $r = OA$; nous avons $\rho_p = \rho \sin\alpha$; par suite, la formule précédente devient

$$\frac{\rho \sin\alpha}{a} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0.$$

Si nous considérons le second foyer de la conique, nous aurons de même

$$\frac{\rho_1 \sin\alpha}{a} + \frac{R}{4\rho_1} - 1 = 0,$$

d'où, en retranchant membre à membre, nous avons $\frac{\sin\alpha}{a}(\rho - \rho_1) + \frac{R}{4}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) = 0,$

c'est-à-dire

$$R = \frac{4\rho\rho_1 \sin\alpha}{a}.$$

Or

$$r + r_1 = 2a, \qquad (\rho \pm \rho_1)\sin\alpha = a,$$

de là, selon que la conique est une ellipse ou une hyperbole,

$$\frac{4}{R} = \frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho_1};$$

enfin, si nous remarquons que

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} = \frac{2\sin\alpha}{MN},$$

MN désignant la longueur de la normale, il viendra finalement

$$R = \frac{MN}{\sin^2\alpha},$$

ce qui nous donne une construction connue du rayon de courbure.

2. Reprenons l'expression

$$R = \frac{MN}{\sin^2\alpha} = \frac{\overline{MN}^3}{(MN\sin\alpha)^2} = \frac{\overline{MN}^3}{\overline{MH}^2} = \frac{\overline{MN}^3}{p^2},$$

elle montre que :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est égal au cube de la normale divisé par le carré du paramètre.

3. — Nous avons

$$\omega p = a\sin\alpha, \qquad MN = \frac{b^2}{a\sin\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad MN.\omega p = b^2,$$

par suite

$$R = \frac{a^2b^2}{\overline{\omega p}^3},$$

c'est-à-dire :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance de son centre à la tangente au point considéré.

4. — Considérons deux points M_1, M_2 d'une conique (C) ; soient R_1, R_2 les valeurs du rayon de courbure en ces points ; d_1, d_2 les distances du centre aux tangentes correspondantes, nous aurons

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3;$$

pour une seconde conique (C'),

$$\frac{R'_1}{R'_2} = \left(\frac{d'_2}{d'_1}\right)^3.$$

Supposons que

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d'_1}{d'_2},$$

c'est-à-dire que la droite joignant les centres des deux coniques passe par un ombilic ; nous aurons $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R'_1}{R'_2}$ et réciproquement.

Par suite :

La condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de courbure de deux coniques aux points de contact de deux tangentes communes forment une proportion est que la droite joignant leurs centres passe par l'ombilic correspondant.

5. — Soient deux coniques concentriques ; la droite joignant leur centre est indéterminée et peut être considérée comme passant par l'un quelconque des ombilics ; par suite :

Lorsque deux coniques sont concentriques, les rayons de courbure aux points de contact de deux tangentes communes forment une proportion.

Cette propriété devient évidente pour deux paraboles qui ont leurs axes parallèles, car elles sont homothétiques.

6. — Considérons deux coniques bitangentes en deux points A, B ; la droite joignant le milieu de AB à son pôle est un diamètre pour chacune de ces coniques, de sorte que :

Lorsque deux coniques sont bitangentes, les rayons de courbure aux points de contact forment une proportion.

De là, la corde des contacts de tout cercle bitangent à une conique est parallèle à l'un des axes de cette conique.

7. Soient une conique et un cercle tels que la droite joignant les centres passe par un ombilic à distance finie. Les rayons de courbure aux points de contact avec le cercle étant égaux, il en sera de même pour la conique, de sorte que :

Le lieu des centres des cercles tels qu'en joignant leur centre à celui d'une conique la droite obtenue passe par un ombilic à distance finie, se compose des axes de cette conique.

8. Considérons une conique inscrite dans un quadrilatère inscriptible et dont le centre se trouve sur la circonférence circonscrite à ce quadrilatère. Soient A, B, C, D les points de contact de la conique avec les côtés du quadrilatère ; R_A, R_B, R_C, R_D les rayons de courbure en ces points ; d_A, d_B, d_C, d_D les distances du centre aux tangentes correspondantes ; un théorème de géométrie élémentaire nous donne $d_Ad_C = d_Bd_D$, par suite,

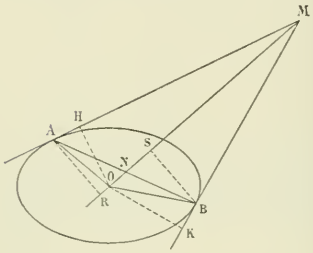
$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_D}{R_C},$$

c'est-à-dire :

Si on considère une conique inscrite dans un quadrilatère inscriptible et dont le centre se trouve sur la circonférence circonscrite à ce quadrilatère, les rayons de courbure de la conique aux quatre points de contact avec les côtés du quadrilatère forment une proportion.

Une telle conique est évidemment une hyperbole, et comme la droite de Newton, qui est le lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère, rencontre la circonférence circonscrite en deux points, il existe pour tout quadrilatère inscriptible deux telles hyperboles.

9. — N étant le milieu de AB, O, le centre, AR et BS étant perpendiculaires à MO, nous avons $AR = BS$; par suite les triangles AOM et BOM ont même aire, d'où



$$\frac{OK}{OH} = \frac{AM}{BM},$$

par suite,

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^3,$$

c'est-à-dire :

Le rapport des rayons de courbure en deux points d'une conique est égal au cube du rapport des longueurs des tangentes en ces points.

10. — Considérons deux coniques, M un de leurs ombilics; A, B, C, D étant les points de contact des tangentes issues de cet ombilic, nous avons pour chaque conique

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{MA}{MB}\right)^3, \qquad \frac{R'_1}{R_2} = \left(\frac{MC}{MD}\right)^3.$$

Supposons que $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$, c'est-à-dire que les quatre points A, B, C, D soient sur un cercle, nous aurons $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R'_2}{R'_1}$, et réciproquement.

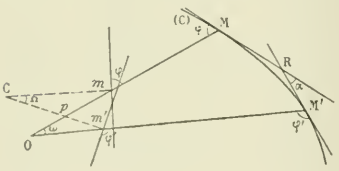
Par suite :

La condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de courbure de deux coniques aux points de contact de deux tangentes communes forment une proportion inverse est que ces quatre points soient sur un cercle.

II

Rayons de courbure d'une courbe et de son inverse.

1. — Considérons une courbe plane (C); prenons son inverse par rapport à un point O. Soient M, M′ deux points infiniment voisins de la courbe (C); m, m' les points correspondants de la figure inverse. Les tangentes aux points correspondants M, m font des angles égaux avec le rayon vecteur OM.



Posons

$$\widehat{mCm'} = \Omega, \qquad \widehat{MRM'} = \pi - \alpha,$$
$$\widehat{OMR} = \pi - \varphi, \qquad \widehat{OM'R} = \pi - \varphi'.$$

Les triangles Cmp et $Om'p$ nous donnent

$$\Omega + \frac{\pi}{2} - \varphi = \omega + \varphi' - \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$\Omega - \omega = \varphi + \varphi' - \pi.$$

D'autre part, le quadrilatère OMRM′ donne

$$\omega - \alpha = \varphi + \varphi' - \pi,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\Omega = 2\omega - \alpha,$$

par suite, $\frac{1}{R_i} = \lim \frac{\sin \Omega}{mm'} = \lim \frac{\sin(2\omega - \alpha)}{mm'}$, c'est-à-dire $\frac{1}{R_i} = \lim \left(\frac{2 \sin \omega}{mm'} - \frac{\sin \alpha}{mm'}\right)$,

ou encore $\frac{1}{R_i} = \lim \left(\frac{1}{u} - \frac{\sin \alpha}{MM'} \cdot \frac{MM'}{\sin \omega} \cdot \frac{\sin \omega}{mm'}\right)$; finalement $\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} - \frac{\rho}{R\rho_i}$,

c'est-à-dire $\frac{\rho_i}{R_i} + \frac{\rho}{R} - 1 = 0$; ce sera notre formule F_i.

2. — Si nous reprenons les notations $\Delta = \frac{R}{\rho}$, $\Delta_i = \frac{R_i}{\rho_i}$, la formule F_i s'écrit $\Delta\Delta_i - (\Delta + \Delta_i) = 0$, de sorte que :

La relation entre les Δ des points correspondants d'une courbe et de son inverse est involutive.

Les points doubles de cette involution nous sont donnés par

$$\Delta^2 - 2\Delta = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Delta = 0, \qquad \Delta = 2.$$

Le point central est le point $\Delta = 1$.

En transportant l'origine en ce point, c'est-à-dire en posant

$$\Delta = \Delta' + 1, \qquad \Delta_i = \Delta_i' + 1,$$

la relation obtenue s'écrit

$$\Delta'\Delta_i' = 1.$$

3. — Considérons la figure inverse d'un cercle par rapport à un de ses points ; pour chaque point du cercle nous avons $\rho = R$, d'où $R_i = \infty$.

La figure inverse est donc une droite.

4. — La figure inverse d'un cercle par rapport à un point quelconque est un autre cercle. Soient R_1, R_2 les rayons de ces cercles ; nous aurons pour chaque couple de points antihomologues

$$\frac{\rho_1}{R_1} + \frac{\rho_2}{R_2} - 1 = 0.$$

5. — Prenons l'inverse d'une parabole par rapport à son foyer ; pour la parabole, nous avons $\Delta = 4$ d'où pour son inverse $\Delta_i = \frac{4}{3}$; c'est donc une cardioïde.

6. — Prenons l'inverse d'une spirale logarithmique par rapport à son point asymptote ; pour la spirale nous avons $\Delta = 2$, d'où pour son inverse $\Delta_i = 2$; c'est donc une autre spirale.

III

Rayons de courbure d'une courbe et de sa polaire réciproque.

1. — La polaire réciproque d'une courbe étant inverse de sa podaire, nous aurons, en lui appliquant la formule F_i,

$$\frac{\rho_r}{R_r} + \frac{\rho_p}{R_p} - 1 = 0.$$

Or, la formule F_s nous donne

$$\frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$\frac{\rho_r}{R_r} = \frac{R}{4\rho}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad RR_r = 4\rho\rho_r;$$

c'est notre formule F_R.

2. — En posant, comme précédemment, $\Delta = \frac{R}{\rho}$, $\Delta_r = \frac{R_r}{\rho_r}$, la formule F_R s'écrit $\Delta\Delta_r = 4$; par suite :

La relation entre les Δ des points correspondants d'une courbe et de sa polaire réciproque est involutive.

Le point central de cette involution est le point $\Delta = 0$ et les points $\Delta = \pm 2$ en sont les points doubles.

3. — Cherchons une relation entre les rayons de courbure de la figure inverse d'une courbe et de la podaire de cette courbe. La formule F_i nous donne

$$\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{R_i} = \frac{\rho}{R\rho_i}.$$

La formule F_s nous donne

$$\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{R_p} = \frac{R}{4\rho\rho_p},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{R_i}\right)\left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{R_p}\right) = \frac{1}{4\rho_i\rho_p};$$

ce sera notre formule F_E.

4. — Pour $\Delta = 0$, nous avons $\Delta_r = \infty$; de sorte que :

La polaire réciproque d'un point de rebroussement est une tangente d'inflexion.

5. — Prenons la polaire réciproque d'un cercle par rapport à un de ses points ; nous avons $\Delta = 1$, d'où $\Delta_r = 4$; c'est donc une parabole ayant pour foyer le centre du cercle directeur.

6. — Prenons la polaire réciproque d'une conique par rapport à un de ses foyers ; c'est un cercle de rayon r ; de sorte que

$$R = \frac{4\rho\rho_r}{r},$$

c'est-à-dire :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au produit des rayons des cercles passant par un de ses foyers et tangents, l'un à la conique au point considéré, l'autre au point correspondant du cercle polaire réciproque de la conique par rapport au foyer considéré.

Considérons, en particulier, les coniques ayant un foyer commun F et qui sont tangentes à une droite Δ en un point M ; nous aurons, pour les rayons de courbure en M de ces deux coniques,

$$R_1 = \frac{4\rho\rho_r}{r_1}; \qquad R_2 = \frac{4\rho\rho_r}{r_2},$$

par suite

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

c'est-à-dire :

Deux coniques qui ont un foyer commun F *et qui sont tangentes en un point* M *ont leurs rayons de courbure en ce point inversement proportionnels aux rayons de leurs cercles polaires réciproques par rapport à* F.

7. — Prenons la polaire réciproque d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement ; nous avons $\Delta = \frac{4}{3}$, d'où $\Delta_r = 3$, c'est-à-dire :

Le rayon de courbure en un point d'une polaire réciproque de cardioïde est égal à trois fois le rayon du cercle passant par son point de rebroussement et tangent à cette courbe au point considéré.

8. — Prenons la polaire réciproque d'une spirale logarithmique par rapport à son point asymptote ; nous avons $\Delta = 2$, d'où $\Delta_r = 2$; c'est donc une autre spirale.

9. — Comme application, nous résoudrons le problème suivant :

Déterminer une courbe plane (C) *dont les podaires successives, d'ordre positif ou négatif, par rapport à un point* O, *soient semblables à la polaire réciproque de* (C) *par rapport à un cercle de centre* O, *les centres d'homothétie et de rotation étant le point* O.

Pour tout point de (C) nous devrons avoir, quel que soit k :

$$2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)} = \frac{4}{\Delta}, \qquad \text{ce qui nous donne } \Delta = 2.$$

La courbe cherchée est donc une spirale logarithmique ayant O *comme point asymptote.*

On obtient également une spirale logarithmique lorsqu'on remplace la polaire réciproque de (C) par son inverse par rapport à O, ou lorsqu'on cherche une courbe dont la polaire réciproque soit semblable à son inverse par rapport à O.

10. — D'une manière plus générale, proposons-nous de :

Déterminer une courbe plane (C) *dont la podaire ou la quasi-podaire, d'ordre déterminé* k, *positif ou négatif, par rapport à un point* O, *soit semblable à sa polaire réciproque par rapport à un cercle de centre* O, *les centres d'homothétie et de rotation étant le point* O.

Pour tout point de la courbe (C), nous devrons avoir $2 + \frac{2 - (\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)} = \frac{4}{\Delta}$, c'est-à-dire

$$\Delta^2(1 - k) + 6k\Delta - 4(1 + 2k) = 0,$$

équation de laquelle nous tirons

$$\Delta = \frac{-3k \pm (k + 2)}{1 - k}.$$

De là, une première solution : $\Delta = 2$, à laquelle correspondent les spirales logarithmiques ayant O pour point asymptote ; cette solution se retrouve quel que soit k ; puis une seconde solution : $\Delta = \frac{4k + 2}{k - 1}$; les courbes correspondantes sont alors déterminées par l'équation

$$\omega - \omega_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Az^{\frac{2(k-1)}{2k+1}} - z^2}} \qquad \text{avec} \qquad z = \frac{1}{\rho}.$$

Enfin, cherchons pour quelles valeurs de k les courbes de la seconde solution sont réductibles à un point. L'expression $\frac{2}{\Delta - 2} = \frac{k - 1}{k + 2}$ devra être égale à un entier n, de sorte que k sera un entier de la forme

$$k = -\frac{2n+1}{n-1} = -\left[2 + \frac{3}{n-1}\right];$$

par suite, les valeurs de n qui rendent k entier sont $-2, 0, 1, 2$ pour

$n = -2,$	$k = -1,$	$\Delta = 1$: cercle;
$n = 0,$	$k = 1,$	$\Delta = \infty$: droite;
$n = 1,$	$k = \infty,$	$\Delta = 4$: parabole;
$n = 2,$	$k = -5,$	$\Delta = 3$: polaire réciproque de cardioïde.

11. — Résolvons la même question lorsqu'on remplace la polaire réciproque de la courbe (C) par une de ses inverses par rapport à O. Dans ce cas, on devra avoir pour tout point de la courbe (C):

$$2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)} = \frac{\Delta}{\Delta - 1}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Delta^2(2-k) + 4(k-1)\Delta - 4k = 0,$$

de là

$$\Delta = \frac{-2(k-1) \pm 2}{2-k}.$$

Une première solution, $\Delta = 2$, nous donne les spirales logarithmiques ayant O pour point asymptote. A la seconde solution correspondent les courbes déterminées par leur delta :

$$\Delta = \frac{2k}{k-2}.$$

Ces courbes seront réductibles à un point, lorsque $\frac{2}{\Delta - 2} = \frac{k-2}{2} = n$, d'où $k = 2 + 2n$; c'est-à-dire lorsque k sera un nombre pair.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1908.

Groupe I.

1712. — 1° *On considère trois axes rectangulaires $oxyz$ et, dans le plan oxy, deux hyperboles* (H) *et* (H') *et une droite* (D) *définies respectivement par les équations*

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} z = 0, \\ x^2 - y^2 = m^2, \end{cases} \qquad (\mathrm{H}') \begin{cases} z = 0, \\ 2xy = n^2, \end{cases} \qquad (\mathrm{D}) \begin{cases} z = 0, \\ 2x = p. \end{cases}$$

Soient M *et* M' *deux points du plan oxy satisfaisant aux trois conditions suivantes : ils sont conjugués par rapport à* (H) *et à* (H'); *le milieu de la droite qui les joint est situé sur* (D).

Montrer que M *décrit une courbe* (C) *et* M' *une courbe* (C') *qui coïncide avec* (C).

2° *On désigne par $o_1x_1y_1z_1$ un trièdre coïncidant avec le trièdre $oxyz$: on suppose que ce trièdre peut se déplacer en entraînant avec lui la courbe* (C'); *on désigne par* (C_1) *et par* M_1 *les positions que prennent dans ce déplacement la courbe* (C') *et le point* M'; *le trièdre $oxyz$ reste fixe ainsi que la courbe* (C).

On supposera dorénavant que le trièdre mobile $o_1x_1y_1z_1$ est toujours dans une position telle que l'angle des deux directions oz, o_1z_1 soit égal à deux droits ; dès lors, la position de ce trièdre est définie par les coordonnées a, b, c du sommet o_1, par rapport aux axes $oxyz$, et l'angle φ des directions ox, o_1x_1.

3° *On demande d'écrire les relations qui doivent exister entre a, b, c, φ pour que le trièdre $o_1x_1y_1z_1$ soit symétrique du trièdre $oxyz$ par rapport à une droite du plan oxy, étant entendu que o_1x_1, o_1y_1, o_1z_1 doivent être respectivement les symétriques de ox, oy, oz. Une pareille position du trièdre $o_1x_1y_1z_1$ est définie si l'on se donne les valeurs a_0, b_0 des coordonnées a, b : on demande alors d'exprimer les coordonnées X, Y, Z du point M_1, par rapport aux axes $oxyz$, en fonction des coordonnées du point* M *et de a_0, b_0.*

4° *On suppose que le trièdre $o_1x_1y_1z_1$ se déplace en partant de la position qu'on vient de définir : montrer que l'on peut faire varier a, b, c, φ de telle manière que, dans ce déplacement, la distance MM_1 d'un point quelconque* M *de la courbe* (C) *au point correspondant* M_1 *de la courbe* (C_1) *reste invariable.*

1. Entre les coordonnées x, y et x', y' des points M et M', on a les trois relations

$$(1)\qquad \begin{cases} xx' - yy' - m^2 = 0, \\ xy' + yx' - n^2 = 0, \\ x + x' - p = 0. \end{cases}$$

Eliminons x' et y' entre ces trois équations nous obtiendrons l'équation de la courbe C_1 décrite par le point M.

	O_1x_1	O_1y_1	O_1z_1
Ox	φ	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Oy	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\varphi - \pi$	$\frac{\pi}{2}$
Oz	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Pour cela, il suffit de multiplier la première équation par x, la seconde par y, et la troisième par $-(x^2+y^2)$, puis d'ajouter membre à membre. On trouve ainsi l'équation

$$(C)\qquad (x^2+y^2)(p-x) - m^2x - n^2y = 0,$$

qui représente une cubique circulaire, tangente à l'origine à la droite $m^2x + n^2y = 0$, et asymptote à la droite $x - p = 0$.

Comme les équations (1) ne changent pas si on permute x et x', y et y', le lieu du point M' est une courbe C' qui coïncide avec C.

2. D'après les données, les angles des directions Ox, Oy, Oz avec les directions O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 sont indiqués dans le tableau ci-dessus.

Par suite, les formules de transformation de coordonnées sont

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a + x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi, \\ y = b + x_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi, \\ z = c - z_1. \end{cases}$$

3. A l'instant initial, quand le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à une droite D du plan des xy, le point O_1 est dans ce plan, et la droite D est perpendiculaire au milieu de OO_1. Si on désigne par α l'angle de Ox avec OO_1, on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_0}{2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b_0}{a_0}$$

et

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = -\frac{a_0}{b_0}, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{b_0^2 - a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}, \qquad \sin\varphi_0 = -\frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}.$$

Les formules (2) donnent alors

$$\begin{aligned} X &= a_0 + x'\cos\varphi_0 + y'\sin\varphi_0, \\ Y &= b_0 + x'\sin\varphi_0 - y'\cos\varphi_0, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Mais des équations (1) on tire

$$x' = p - x, \qquad y' = \frac{n^2 - y(x-p)}{x};$$

on en déduit

$$\begin{aligned} X &= a_0 + \frac{b_0^2 - a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}(p-x) + \frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}\cdot\frac{xy - py - n^2}{x}, \\ Y &= b_0 - \frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}(p-x) + \frac{b_0^2 - a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}\cdot\frac{xy - py - n^2}{x}, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

4. Supposons maintenant qu'on déplace le trièdre $O_1x_1y_1z_1$; la distance du point $M_1(X, Y, Z)$ au point $M(x, y, 0)$ est donnée par la formule

$$\overline{MM_1}^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2.$$

Mais on a

$$X - x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + a - x,$$
$$Y - y = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi + b - y;$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\overline{MM_1}^2 &= (x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + a - x)^2 + (x' \sin\varphi - y' \cos\varphi + b - y)^2 + c^2\\ &= x'^2 + y'^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + 2(a - x)(x' \cos\varphi + y' \sin\varphi) + 2(b - y)(x' \sin\varphi - y' \cos\varphi) + c^2,\\ &= x'^2 + y'^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + 2\cos\varphi(ax' - by' - xx' + yy') + 2\sin\varphi(ay' + bx' - yx' - xy') + c^2,\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des formules (1),

$$\begin{aligned}\overline{MM_1}^2 = x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2a(p - x') - 2by + 2\cos\varphi(ax' - by' - m^2)\\ + 2\sin\varphi(ay' + bx' - n^2).\end{aligned}$$

Ecrivons que cette quantité est égale à la quantité analogue correspondant à l'instant initial,

$$x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2 + a_0^2 + b_0^2 - 2a_0(p - x') - 2b_0 y + 2\cos\varphi_0(a_0 x' - b_0 y' - m^2) + 2\sin\varphi_0(a_0 y' + b_0 x' - n^2),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 - 2a(p - x') - 2by + 2\cos\varphi(ax' - by' - m^2) + 2\sin\varphi(ay' + bx' - n^2)\\ = a_0^2 + b_0^2 - 2a_0(p - x') - 2b_0 y + 2\cos\varphi_0(a_0 x' - b_0 y' - m^2) + 2\sin\varphi_0(a_0 y' + b_0 x' - n^2);\end{aligned}$$

et cette relation doit être vérifiée par les coordonnées (x', y') de tout point de la courbe C'.

Si b n'était pas égal à b_0, on tirerait de cette équation y en fonction linéaire de x' et y'; or, cela est impossible d'après les formules (1). Donc, on doit avoir $b = b_0$. De plus, la relation précédente, étant linéaire en x' et y', doit être vérifiée identiquement, ce qui donne

$$a + a\cos\varphi + b\sin\varphi = a_0 + a_0\cos\varphi_0 + b_0\sin\varphi_0,$$
$$-b\cos\varphi + a\sin\varphi = -b_0\cos\varphi_0 + a_0\sin\varphi_0,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ap - 2m^2\cos\varphi - 2n^2\sin\varphi = a_0^2 + b_0^2 - 2a_0 p - 2m^2\cos\varphi_0 - 2n^2\sin\varphi_0.$$

Remplaçons dans les deux premières $\cos\varphi_0$ par $\dfrac{b_0^2 - a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}$ et $\sin\varphi_0$ par $\dfrac{-2a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}$; elles se réduisent à une seule $a(1 + \cos\varphi) + b\sin\varphi = 0$, ou $a\cos\dfrac{\varphi}{2} + b\sin\dfrac{\varphi}{2} = 0$, ou enfin

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b}.$$

Il en résulte que pour que la distance MM_1 soit invariable, il faut faire varier a, b, c, φ de façon que ces quantités vérifient les relations

$$b = b_0, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b},$$

$$a^2 + c^2 - 2ap - a_0^2 - 2a_0 p - 2m^2\left[\frac{b_0^2 - a^2}{a^2 + b_0^2} - \frac{b_0^2 - a_0^2}{a_0^2 + b_0^2}\right] + 4n^2\left[\frac{ab_0}{a^2 + b_0^2} - \frac{a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}\right] = 0.$$

En particulier, le point O_1 décrit une courbe du quatrième degré dans le plan $b = b_0$.

Louis CARRIER, lycée Louis-le-Grand.

Bonne solution par M. Amblard, conducteur des ponts et chaussées à Ruines (Cantal).

1713. — *On considère trois axes rectangulaires et la surface ayant pour équation*

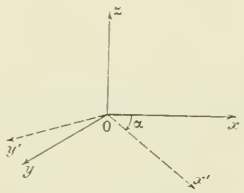
$$z = \frac{y^3 + xy^2 + \lambda x^3}{y + x},$$

λ étant une constante.

Étudier la variation de la courbure à l'origine des sections de cette surface par les plans $y = mx$ lorsque le paramètre m varie.

On examinera particulièrement les cas suivants : 1° $\lambda = \dfrac{4}{3}$; 2° $\lambda = -\dfrac{4}{9}$.

Soient Ox' la trace du plan $y = mx$ sur le plan xOy et Oy' la perpendiculaire menée par O.



Prenons comme nouveau système d'axes le trièdre $Ox'y'z$; les formules de transformation, où $\operatorname{tg}\alpha = m$, nous donnent

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(x' - my'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(mx' + y');$$

de sorte que l'équation de la surface devient

$$z = \frac{(mx'+y')^2}{1+m^2} + \frac{\lambda(x'-my')^2}{(1+m^2)[x'(1+m)+y'(1-m)]}:$$

sa section par le plan $y' = 0$ se compose de la parabole

$$z = \frac{x'^2}{1+m^2}\left(m^2 + \frac{\lambda}{1+m}\right).$$

Le point O étant le sommet de cette parabole, son rayon de courbure en ce point est égal à son paramètre, c'est-à-dire que

$$R = \frac{(1+m^2)(1+m)}{2(m^3+m^2+\lambda)}.$$

Faisons varier m de $-\infty$ à $+\infty$ et étudions les variations de R.

Nous avons d'abord

$$R' = \frac{-2m^3 + m^2(3\lambda - 4) + 2m(\lambda - 1) + \lambda}{2(m^3+m^2+\lambda)^2},$$

R' s'annule pour les racines de l'équation

(1) $$2m^3 - m^2(3\lambda - 4) - 2m(\lambda - 1) - \lambda = 0.$$

Considérons l'équation dérivée,

$$3m^2 - m(3\lambda - 4) - (\lambda - 1) = 0,$$

laquelle admet pour racines $\lambda - 1$ et $-\frac{1}{3}$, et formons la suite de Rolle avec les signes des résultats de substitution dans l'équation (1).

1° $\lambda > \frac{2}{3}$, nous avons la suite :

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\lambda - 1$	$+\infty$
$-$	$-(9\lambda + 4)$	$-\lambda$	$+$

λ étant positif, nous avons une racine réelle positive.

2° $\lambda < \frac{2}{3}$, nous avons la suite

$-\infty$	$\lambda - 1$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-$	$-\lambda$	$-(9\lambda + 4)$	$+$

de là résulte :

$0 < \lambda < \frac{2}{3}$ une racine réelle positive ;

$-\frac{4}{9} < \lambda < 0$ trois racines réelles négatives ;

$\lambda < -\frac{4}{9}$ une racine réelle négative.

Considérons maintenant les valeurs de m qui rendent R infini ; les plans correspondants coupent alors la surface suivant une droite du plan des xy et une droite à l'infini. Ces valeurs de m sont racines de l'équation

(2) $$m^3 + m^2 + \lambda = 0.$$

L'équation dérivée $3m^2 + 2m = 0$ admet les racines 0 et $-\frac{2}{3}$; la suite de Rolle est alors

$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
$-$	$\frac{4}{27}+\lambda$	λ	$+$

de sorte que, si :

$\lambda > 0$ une racine réelle négative ;

$-\frac{4}{27} < \lambda < 0$ trois racines réelles dont une positive et deux négatives ;

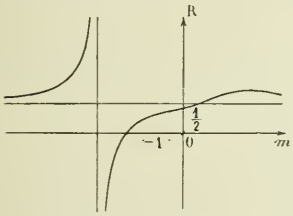
$\lambda < -\frac{4}{27}$ une racine réelle positive.

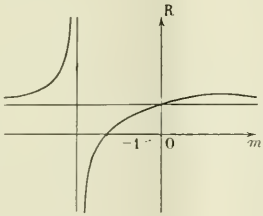
D'autre part, $R = 0$ pour $m = -1$; pour $m = 0$, nous avons $R = \frac{1}{2\lambda}$.

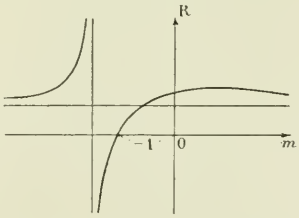
Considérons R et m comme les coordonnées d'un point et construisons la courbe représentant les variations de R.

Cette courbe admet une asymptote parallèle à Om, d'équation $R = \frac{1}{2}$; le point de rencontre à distance finie de la courbe avec cette asymptote a pour abscisse $m = \lambda - 1$.

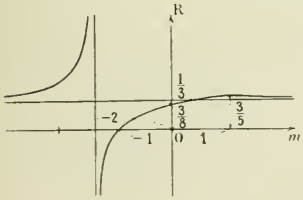
1° $\lambda > 0$. L'équation (1) a une racine réelle positive et l'équation (2) une racine réelle négative plus petite que -1. Nous avons une même forme de courbe que nous pouvons diviser en trois cas selon que $\lambda - 1 \gtrless 0$, c'est-à-dire selon que le point de rencontre de la courbe avec l'asymptote $R = \frac{1}{2}$ a une abscisse positive, nulle ou négative.

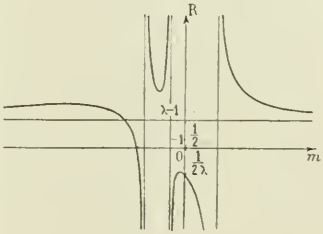






Lorsque $\lambda = \frac{4}{3}$, la courbe a la forme, figurée ci-contre, du 1er cas. L'abscisse du maximum est égale à 1, la valeur de ce maximum est égale à $\frac{3}{5}$, le point de rencontre avec Oy a pour ordonnée $\frac{3}{8}$ et le point de rencontre avec l'asymptote pour abscisse $\frac{1}{3}$.

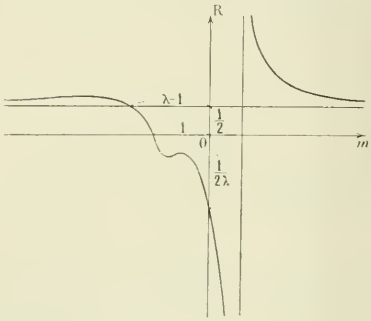




2° $-\frac{4}{27} < \lambda < 0$.

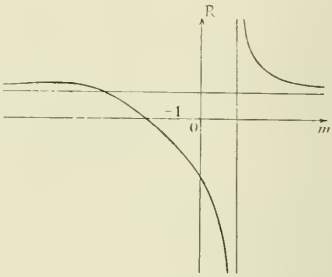
L'équation (1) a trois racines négatives dont une plus petite que -1 ; l'équation (2) a deux racines négatives plus grandes que -1 et une racine positive.

La courbe a la forme indiquée ci-dessus, à droite.



3° $-\frac{4}{9} < \lambda < -\frac{4}{27}$.

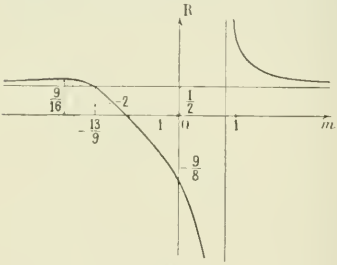
L'équation (1) a toujours trois racines réelles négatives tandis que l'équation (2) n'a plus qu'une racine réelle positive ; d'où la courbe ci-contre, à gauche.



4° $\lambda < -\frac{4}{9}$.

L'équation (1) a une racine réelle négative plus petite que -1 et l'équation (2) une racine réelle positive ; d'où la courbe ci-dessus, à droite.

Dans le cas particulier où $\lambda = -\frac{4}{9}$, l'équation (1) admet la racine double $-\frac{1}{3}$ dont nous pouvons faire abstraction, et la racine simple -2 à laquelle correspond le maximum $\frac{9}{16}$.



Le point de rencontre de la courbe avec l'asymptote $R = \frac{1}{2}$ a pour abscisse $-\frac{13}{9}$ et le point de rencontre avec Oy pour ordonnée $-\frac{9}{8}$, enfin l'équation (2) a dans ce cas une racine réelle positive plus petite que 1, d'où la courbe ci-contre.

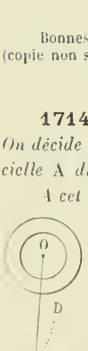
Pour $m = -\frac{1}{3}$, il y a un point d'inflexion à tangente horizontale.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; A. Duby, à Dijon ; Amblard, à Ruines ; X (copie non signée).

1714. — *On veut utiliser un baromètre, bien qu'on ne connaisse pas la valeur ρ de son rayon intérieur. On décide de mesurer ρ et de calculer la dépression capillaire du baromètre connaissant la tension superficielle A du mercure, l'angle de raccordement α du mercure et du verre et la donnée expérimentale ρ.*

A cet effet, d'un point C, défini par sa distance OC = D à l'axe du tube, on mesure le diamètre apparent 2φ du canal intérieur.



1° Trouver l'expression de ρ en fonction de D, de φ et de l'indice n du verre du baromètre (indice moyen pour la lumière blanche). Cette relation sera désignée dans ce qui suit sous le nom de relation (1).

2° La distance D étant souvent difficile à évaluer exactement, il est plus commode de mesurer en même temps le diamètre apparent $2\varphi'$ du contour extérieur du tube vu du point C. Trouver la relation (2) qui donne ρ en fonction de n, φ, φ' et du rayon extérieur R du tube barométrique. R étant directement mesurable, il suffit donc de déterminer les angles φ et φ' pour pouvoir calculer ρ.

3° *Les angles* φ *et* φ' *étant petits dès que* D *atteint quelques décimètres, montrer qu'on peut se dispenser de les mesurer en opérant comme il suit :*

Plaçant l'œil au point C *et le tube barométrique vertical étant convenablement éclairé, on applique horizontalement contre lui une règle graduée en demi-millimètres. Il suffit de lire directement sur cette règle (en estimant à l'œil les dixièmes de millimètre) les largeurs apparentes* a *de l'enveloppe extérieure et* b *du canal central.*

Montrer ce que devient la relation (2) *quand on y introduit* a *et* b *au lieu de* φ *et* φ' *et qu'on prend* $n = 1,5$. *La nouvelle relation sera la relation* (3).

4° *Discuter la relation primitive* (2) *et montrer que la méthode précédente n'est applicable qu'aux baromètres à paroi épaisse ; pour la plupart des baromètres, qui sont à paroi mince, la colonne mercurielle semble remplir complètement le tube.*

5° *Pour rendre possible l'observation du canal intérieur dans ce dernier cas, imaginons que l'on entoure le baromètre d'un second tube (rayon intérieur* ρ_1, *rayon extérieur* R_1) *parfaitement cylindrique et concentrique au premier, et que l'on remplisse d'eau le canal annulaire ainsi constitué; soit toujours* 2φ *le diamètre apparent du canal intérieur vu avec ce dispositif du point* C. *Montrer que la relation* (4) *qui lie* ρ, n, D, φ *n'est autre que la relation* (1) *et ne dépend nullement de l'eau, ni du tube extérieur, les enveloppes concentriques que l'on a introduites n'ayant d'autre rôle que de rendre visibles les bords du canal intérieur.*

Comme dans le paragraphe 2°, *on peut éliminer la distance* D *soit à l'aide de la relation* (2), *soit à l'aide de la relation analogue obtenue en mesurant le diamètre apparent* $2\varphi_1$, *sous lequel du point* C *on voit le tube extérieur de rayon* R_1.

6° *Applications numériques. On a* $n = 1,5$, $2\varphi = 2^\circ\, 46' \frac{2}{3}$, $2\varphi' = 2^\circ\, 13' \frac{1}{3}$, $R = 1^{cm},2$.

On fera les calculs sans table de logarithmes, en faisant les approximations habituelles relatives aux petits angles.

Ayant calculé ρ *et* D, *on calculera aussi* a *et* b. *On déduira de la relation* (3) *l'erreur relative commise sur* ρ, *connaissant les erreurs relatives de* n, a, b, *et l'on démontrera que* ρ *peut être connu à* $\frac{1}{10}$ *de millimètre près. (On supposera l'incertitude sur l'indice égale en valeur absolue à* 0,01).

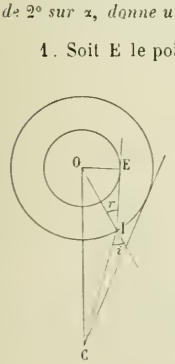
7° *Cela étant, on calculera la dépression capillaire du baromètre, sachant que l'on a*

$A = 510 \frac{dynes}{cm}$, δ = *densité du mercure* = 13, 6 ; g = *accélération de la pesanteur* = $981 \frac{cm}{sec^2}$;

α = *angle de raccordement du mercure et du verre* = 45°.

On vérifiera qu'une erreur d'un dixième de millimètre sur le rayon intérieur ρ, *superposée à une erreur de* 2° *sur* α, *donne une variation de la dépression capillaire inférieure au dixième de millimètre.*

1. Soit E le point du canal qu'on voit à l'extrémité d'un diamètre apparent, EIC le rayon visuel, tangent en E au cercle de rayon ρ, r et i ses angles d'incidence et d'émergence en I, R le rayon extérieur du tube. On peut écrire les relations



$$\sin i = n \sin r, \quad \frac{R}{\sin \varphi} = \frac{D}{\sin i}, \qquad \rho = R \sin r,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \rho = \frac{D \sin \varphi}{n}.$$

2. On peut remplacer D à l'aide de la relation évidente

$$D = \frac{R}{\sin \varphi'},$$

d'où

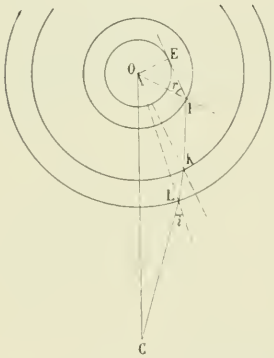
$$(2) \qquad \rho = \frac{R}{n} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}.$$

3. Lorsque le point C est éloigné du tube, les angles φ et φ' sont petits et le rapport de leurs sinus peut être remplacé par celui de leurs tangentes, de telle sorte que la relation (2) devient

$$\rho = \frac{R}{1,5}\frac{b}{a}. \tag{3}$$

4. L'angle φ doit être nécessairement inférieur à φ'; (2) indique alors que l'on doit avoir $\rho < \frac{R}{n}$. D'ailleurs, pour émerger, un rayon tel que EI doit arriver en I sous un angle inférieur à l'angle limite, ce qui exige que $\frac{\rho}{R}$ soit inférieur à $\frac{1}{n}$. La relation (1) n'est donc applicable que dans cette hypothèse. Si $n = 1,5$, cela suppose $\rho < \frac{2}{3}R$ ou l'épaisseur du tube supérieure au tiers du rayon extérieur.

5. Soit EIKLC le rayon visuel déterminant le diamètre apparent du canal intérieur, $r, \alpha, \beta, \gamma, \delta, i$, ses angles successifs d'incidence et de réfraction, n' l'indice de l'eau et n'' l'indice du manchon. On a successivement :



dans le triangle OEI $\quad \rho = R \sin r$,

au point I $\quad n \sin r = n' \sin \alpha$,

dans le triangle OIK $\quad \frac{\sin \alpha}{\rho_1} = \frac{\sin \beta}{R}$,

au point K $\quad n' \sin \beta = n'' \sin \gamma$,

dans le triangle OKL $\quad \frac{\sin \gamma}{R_1} = \frac{\sin \delta}{\rho_1}$,

au point L $\quad n'' \sin \delta = \sin i$,

dans le triangle OLC $\quad \frac{\sin i}{D} = \frac{\sin \varphi}{R_1}$.

Multiplions ces égalités membre à membre, et il vient

$$\rho = \frac{D \sin \varphi}{n}. \tag{4}$$

C'est la relation (1), maintenant applicable même quand on a $\rho > \frac{R}{n}$.

L'angle φ' est toujours donné par $\sin \varphi' = \frac{R}{D}$ et l'on peut écrire la relation (2); mais l'angle φ n'est pas nécessairement inférieur à φ', c'est-à-dire que le canal, vu avec le manchon, peut paraître plus gros que le tube sans manchon. On peut aussi introduire $\sin \varphi_1$ à l'aide de la relation $\sin \varphi_1 = \frac{R_1}{D}$, et l'on a

$$\rho = \frac{R_1}{n}\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1},$$

φ étant nécessairement inférieur à φ_1.

6. L'angle φ donné étant supérieur à φ', on se trouve dans le cas $\rho > \frac{R}{n}$. Remplaçons, dans la relation (2), les sinus par les angles

$$\varphi = 1°23'20'' = 5000'',$$
$$\varphi' = 1°6'40'' = 4000'',$$
$$\rho = \frac{1,2}{1,5} \times \frac{5}{4} = 1.$$

Le tube a 2^{cm} de diamètre intérieur et $0^{cm},2$ d'épaisseur.

D'autre part, (4) donne $D = \frac{n\rho}{\sin \varphi}$, où l'on peut remplacer $\sin \varphi$ par φ en l'évaluant en radians:

$$D = \frac{1,5 \times 10800 \times 60}{5000 \times \pi} = 62^{cm}.$$

La longueur a est donnée par l'égalité $a = 2(D - R)\operatorname{tg}\varphi' = 2^{cm},36$. La largeur apparente b du canal central est identique à a, puisqu'on est dans le cas où $\varphi > \varphi'$ et la relation (3) n'est pas applicable.

Si a et b sont mesurés en dehors du manchon, la relation (3) est applicable sous la forme

$$\rho = \frac{R_1}{n}\frac{b}{a}.$$

On en déduit
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dR_1}{R_1} - \frac{dn}{n} + \frac{db}{b} - \frac{da}{a}.$$

Les longueurs a et b seront voisines de 2^{cm} et chacune des erreurs possibles $\frac{da}{a}$ et $\frac{db}{b}$ voisine de $\frac{1}{200}$; l'erreur possible $\frac{dn}{n}$ vaut $\frac{1}{150}$; en supposant R_1 connu exactement, on a donc $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{150} + \frac{1}{100}$ et, comme ρ vaut 1^{cm}, on en déduit

$$d\rho = \frac{1}{60} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6} \quad \text{de millimètre.}$$

7. Si l'on désigne par S le rayon de courbure au sommet du ménisque, la dépression est donnée par la formule
$$h = \frac{2A}{S\delta g}.$$

Si l'on pouvait admettre que le ménisque eût partout la même courbure, on aurait

$$S = \frac{\rho}{\cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{2A\cos\alpha}{\rho\delta g},$$

expression dont la différentielle permet de calculer facilement l'erreur possible. L'application numérique donne pour h :
$$h = 0^{cm},05.$$

F. MIQUEL

Remarque. — En réalité, le calcul de la dépression capillaire dans un tube de 2^{cm} de diamètre ne peut se faire d'une façon élémentaire. On ne pourrait calculer que la dépression moyenne par la formule

$$\pi\rho^2 x\delta g = 2\pi\rho A\cos\alpha, \qquad \text{qui donne ici} \qquad x = 0^{cm},057.$$

L'évaluation de l'erreur possible donne

$$\frac{dx}{x} = \operatorname{tg}\alpha\, d\alpha + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{57} + \frac{1}{100},$$

soit environ $\frac{5}{100}$, d'où $dx = 0,0028$. Mais ce calcul n'est d'aucune utilité pratique. En réalité, la dépression au sommet du ménisque dans un tube de cette largeur n'est guère que $0^{cm},003$.

Au surplus, la difficulté que présente la solution complète et raisonnable du problème proposé, ainsi que les obscurités que l'énoncé laisse subsister sur les quantités a et b, proviennent de fautes d'impression dans le texte qui fut distribué aux candidats, que nous avons reproduit tel quel et dont les épreuves n'avaient pas été soumises au professeur, auteur de l'énoncé.

Groupe II.

1716. — *Un collimateur et une lunette, tous deux achromatiques, ont respectivement pour distances focales de leurs objectifs, 15 centimètres et 30 centimètres. La fente a une hauteur de 3 millimètres.*

Un observateur, qui ne voit nettement que des objets très éloignés, vise la fente du collimateur à travers la lunette.

1° A quel endroit de l'appareil doit-on introduire une plaque sensible pour y obtenir une photographie de la fente, et quelles sont les dimensions de cette image?

2° *Entre le collimateur et la lunette, on place un prisme de 60 degrés. On constitue ainsi un spectroscope que l'on règle au minimum de déviation.*

Si la fente est alors éclairée en lumière monochromatique, quelle est la largeur de son image photographique (on se contentera de l'approximation obtenue en considérant la largeur de la fente comme une quantité très petite)?

3° *Si la fente est éclairée par de la lumière blanche, quelle est la largeur de l'image photographique du spectre, entre deux couleurs pour lesquelles les indices du prisme sont* $n_1 = 1{,}53$ *et* $n_2 = 1{,}51$ *(on se contentera encore de l'approximation obtenue en considérant la différence* $n_1 - n_2$ *et toutes les variations des angles comme des quantités très petites)?*

4° *Si la lumière était seulement formée de deux couleurs simples très voisines, quelle différence devrait-il exister, au moins, entre leurs indices, pour obtenir deux raies distinctes dans le spectre?*

5° *L'appareil étant de nouveau éclairé en lumière monochromatique, la largeur de l'image de la fente changera-t-elle si, au lieu de placer le prisme au minimum de déviation, on l'oriente de manière que la lumière lui arrive sous l'incidence rasante?*

1° La plaque doit être placée au foyer principal de l'objectif de la lunette. La distance focale de la lunette étant double de celle du collimateur, l'image de la fente aura des dimensions doubles de celles de la fente, une hauteur de 6^{mm} et une largeur 2ε, si ε désigne la largeur de la fente.

2° Au minimum de déviation, une rotation infiniment petite du rayon incident dans le plan d'incidence produit une rotation égale du rayon émergent; l'image aura donc la même largeur que sans le prisme, c'est-à-dire 2ε.

3° La largeur du spectre sera proportionnelle à la différence des angles d'émergence correspondant, pour les deux couleurs considérées, à une même incidence. Considérons les relations connues

$$\sin i = n \sin r, \qquad r + r' = A, \qquad \sin i' = n \sin r',$$

et différentions-les, l'angle i étant supposé constant :

$$0 = n \cos r dr + \sin r dn, \qquad dr + dr' = 0, \qquad \cos i' di' = n \cos r' dr' + \sin r' dn.$$

On en déduit

$$di' = \frac{\sin r \cos r' + \cos r \sin r'}{\cos r \cos i'} dn = \frac{\sin(r + r')}{\cos i' \cos r} dn = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r} dn.$$

Comme on est au minimum de déviation, $r = \frac{A}{2}$ et $\sin i' = n \sin \frac{A}{2}$.

$$di' = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos i'} dn = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} dn.$$

Remplaçons A par sa valeur et n par sa valeur moyenne 1,52 :

$$di' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}} dn = \frac{2}{\sqrt{4 - n^2}} dn = \frac{2}{1{,}3} dn = 1{,}54 dn.$$

En remplaçant dn par la différence des indices 0,02, nous aurons l'angle de dispersion

$$di = 0{,}0308.$$

La largeur du spectre sera le produit de cet angle par la distance focale de la lunette, augmenté, en toute rigueur, de la largeur d'une image monochromatique, soit

$$0^{cm}{,}924 + 2\varepsilon.$$

4° Pour que deux couleurs simples voisines donnent deux raies distinctes, c'est-à-dire pour que les deux images correspondantes de la fente ne chevauchent pas, il est nécessaire que l'écart dû à la dispersion soit supérieur à la largeur d'une image monochromatique :

$$30 \times 1{,}54 dn > 2\varepsilon, \qquad dn > 0{,}043\varepsilon.$$

ε étant exprimé en centimètres. Par exemple, si la fente a un dixième de millimètre,

$$dn > 0{,}00043.$$

5° Si la lumière incidente est rasante, une petite variation de l'angle d'incidence ne produit qu'une variation insensible de l'angle de réfraction, qui est alors égal à l'angle limite. Les rayons représentant les axes secondaires des deux bords de la fente sortent sensiblement dans la même direction et l'image de la fente aura une largeur insensible.

Groupes I et II.

1717. — 1° *Calculer la valeur de l'intégrale* $I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, *où n désigne un entier positif.*

2° *Calculer la valeur de l'intégrale* $I = \int_0^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(1+x^2)^3}\,dx$.

1° En appliquant à l'intégrale $J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ la formule d'intégration par parties,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

et posant

$$u = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \qquad v = x,$$

on a de suite

$$J_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La dernière intégrale se transforme aisément de la façon suivante :

$$\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = J_n - J_{n+1},$$

et l'on a ainsi la formule de récurrence

$$2nJ_{n+1} = (2n-1)J_n + \frac{x}{(x^2+1)^n}.$$

Intégrons maintenant de 0 à $+\infty$ et remarquons que $\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^\infty = 0$; nous aurons

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de n. Donnons alors à n les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, et remarquons que

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons

$$2I_2 = \frac{\pi}{2},$$
$$2.2I_3 = 3.I_2,$$
$$2.3I_4 = 5.I_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$2(n-1)I_n = (2n-3)I_{n-1};$$

par suite

$$2^{n-1}(n-1)!\,I_n = 1.3.5\ldots(2n-3)\frac{\pi}{2},$$

et

$$I_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n(n-1)!}\pi.$$

2° L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(1+x^2)^3}\,dx$$

se décompose aisément en intégrales plus simples, en ajoutant et retranchant au numérateur $ax+b$;

on obtient ainsi

$$\int_0^\infty \frac{axdx}{(x^2+1)^2} + (c-a)\int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)^3} + bI_2 + (d-b)I_3.$$

Or $$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}; \qquad \text{et} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2};$$

en intégrant de 0 à $+\infty$, on a

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{xdx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, nous avons vu antérieurement que

$$I_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad I_3 = \frac{3\pi}{16};$$

donc l'intégrale demandée a pour valeur

$$\frac{a}{2} + \frac{c-a}{4} + \frac{\pi}{4}\left[b + 3\frac{(d-b)}{4}\right],$$

ou enfin

$$\frac{a+c}{4} + \frac{3d+b}{16}\pi.$$

G. LACH, à Denain.

Bonnes solutions : MM. R. Manen, à Albi ; J. Miquel ; J. Desbats, lycée de Bordeaux ; L. Montaut, à Alger ; A. Wiener, lycée Hoche ; Mozziconacci, à Nemours ; J. Vérots, à Lyon ; G. Foucry, à Reims ; L. Sire.

1718. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + a^2 y = \sin x,$$

où a désigne une constante positive, différente de un.

2° *Déterminer une intégrale particulière de l'équation précédente par la condition que cette intégrale et sa dérivée première s'annulent pour $x = 0$.*

3° *Rechercher ce que devient cette intégrale particulière lorsque a tend vers un et en déduire l'intégration de l'équation (1) dans le cas particulier où $a = 1$.*

1° On sait que l'intégrale générale de l'équation sans second membre $y'' + a^2 y = 0$, s'obtient en posant $y = e^{rx}$ et prenant pour r les deux racines de l'équation caractéristique $r^2 + a^2 = 0$; on trouve ainsi comme solutions particulières les deux fonctions indépendantes e^{iax} et e^{-iax},

ou $$\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2}.$$

L'équation $y'' + a^2 y = 0$ admet donc les deux solutions indépendantes

$$y = \cos ax \quad \text{et} \quad y = \sin ax$$

et la solution générale est

$$y = A\cos ax + B\sin ax,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Si a est différent de ± 1, nous aurons une solution particulière de l'équation avec second membre en posant $y = \lambda \sin x$, λ étant une constante. Nous avons ainsi

$$\lambda = \frac{1}{-1+a^2}$$

et la solution générale de l'équation complète est

$$y = A\cos ax + B\sin ax + \frac{\sin x}{a^2-1}.$$

2° Nous avons

$$y' = -Aa \sin ax + Ba \cos ax + \frac{\cos x}{a^2 - 1};$$

pour $x = 0$, $y = A$ et $y' = Ba + \frac{1}{a^2 - 1}$.

Pour la solution indiquée, nous aurons donc

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{a(a^2 - 1)}, \qquad \text{et} \qquad y = \frac{a \sin x - \sin ax}{a(a^2 - 1)}.$$

3° Pour $a = 0$, le numérateur et le dénominateur sont nuls ; nous aurons la limite de y quand a tend vers 0 en prenant le quotient des dérivées par rapport à a. Ceci nous donne

$$\frac{\sin x - x \cos ax}{3a^2 - 1},$$

et la limite pour $a = 1$ est

$$y = \frac{\sin x - x \cos x}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation $y'' + y = \sin x$ est donc

$$y = A \cos x + B \sin x - \frac{x \cos x}{2}.$$

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; R. Manen, à Albi ; J. Desbats, lycée de Bordeaux ; L. Montaut, P. Favre, à Lyon ; E. Berthelot, à Cholet ; Léon Michel, à Brive ; Amblard, à Ruines ; J. Vérots ; Mozziconacci ; H. Janois, à Nantes ; G. Foucry, à Reims.

1719. — *On donne trois axes rectangulaires oxyz et le parallélépipède rectangle* (P) *dont les six faces ont pour équations* $x = \pm 6$, $y = \pm 11$, $z = \pm 16$.

Une sphère solide (S), *de rayon* 1, *se meut à l'intérieur de* (P). *Le mouvement du centre de* (S) *est rectiligne et uniforme tant que la surface de* (S) *ne vient pas en contact avec une face de* (P) *; lorsqu'un tel contact se produit, la vitesse de ce centre conserve la même valeur absolue, mais sa direction se modifie suivant la loi physique de la réflexion, c'est-à-dire que la normale commune aux surfaces en contact est l'une des bissectrices de l'angle formé par les deux vitesses du centre, avant et après le contact.*

A l'époque $t = 0$, *le centre de* (S) *est à l'origine des coordonnées. Les projections de sa vitesse sur les axes sont alors respectivement égales à* 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. *On demande :*

1° *Les coordonnées* x, y, z *de ce centre à l'époque* $t = 10$;

2° *La coordonnée* z *à l'époque* $t = 1\,000$.

On calculera les résultats à un centième près.

Il est évident que tout se passe comme si la sphère était réduite à un point, mobile d'après les mêmes lois, et situé à l'intérieur d'un parallélépipède dont les six faces ont pour équations

$$x = \pm 5, \qquad y = \pm 10, \qquad z = \pm 15.$$

Quand le point, qui se meut d'abord sur la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}}$, vient rencontrer une face, le mouvement se réfléchit, reste uniforme et s'effectue avec la même vitesse sur une droite symétrique de OM par rapport à cette face.

Considérons alors les divers plans

$x = 5, 15, 25, 35\ldots$

$y = 10, 30, 50\ldots$

$z = 15, 45, 75\ldots$

et ceux qui sont symétriques de ceux-ci par rapport au centre O ; ils divisent l'espace en parallélépipèdes égaux au 1er et ayant leurs côtés parallèles. Ces parallélépipèdes peuvent se représenter, sans qu'il soit nécessaire d'insister, par les numéros (000), (100) ...(pqr),...

Le point M se meut d'abord à l'intérieur du premier parallélépipède (000), suivant les lois

$$x = t, \qquad y = t\sqrt{2}, \qquad z = t\sqrt{3}.$$

Il rencontre le plan $x = 5$ au bout du temps $t = 5$; il rencontrerait le plan $y = 10$ au temps $t = 5\sqrt{2}$, et le plan $z = 15$ au temps $t = 5\sqrt{3}$. C'est donc la face $x = 5$ qui est rencontrée la première. Alors le point se réfléchit, et reste symétrique du point idéal M qui continue à parcourir la droite OM et qui entre, lui, dans le parallélépipède (100). Quand ce point idéal rencontre le plan $y = 10$, le point réel le rencontre aussi, et ainsi de suite. Soient

$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les plans $x = 5, \quad 5 + 10, \quad \ldots, \quad 5 + (n-1)10, \quad \ldots;$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ les plans $z = 10, \quad 10 + 20, \quad \ldots, \quad 10 + (n-1)20,$

et $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ les plans $z = 15, \quad z = 15 + 30, \quad \ldots, \quad z = 15 + (n-1)30.$

Si l'on envisage un point idéal qui parcourt la droite

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}}$$

avec la vitesse constante $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, quand il rencontrera le plan P_n, ou Q_n, ou R_n, le point réel se réfléchira sur la première ou la seconde face du parallélépipède de même nature, suivant que n est impair ou pair.

Au temps $t = 10$, le mobile a rencontré déjà les trois faces $x = 5$, $y = 10$, $z = 15$ du parallélépipède et, en tenant compte des réflexions sur ces faces, on a

$$x = 5 - (t - 5),$$
$$y = 10 - \sqrt{2}(t - 5\sqrt{2}),$$
$$z = 15 - \sqrt{3}(t - 5\sqrt{3}) ;$$

si on y fait $t = 10$, on a

$$x = 0, \qquad y = 20 - 10\sqrt{2}, \qquad z = 30 - 10\sqrt{3}.$$

Au temps $t = 1000$, il y aura eu autant de chocs sur les faces parallèles au plan des xy, qu'il y a d'unités dans le nombre entier n le plus grand pour lequel on ait

$$15 + (n-1)30 < 1000\sqrt{3},$$

Or $\sqrt{3} = 1{,}732$; nous avons donc à prendre la partie entière de

$$\frac{1732 - 15}{30} ;$$

c'est 57, $\qquad n - 1 = 57, \qquad n = 58.$

Il y a eu 58 chocs ; le dernier a eu lieu sur la face inférieure $z = -15$, et, après, en appelant t_1 l'époque où ce choc a eu lieu, on a

$$z = -15 + (t - t_1)\sqrt{3},$$

tant qu'il n'y a pas de nouveau choc sur une face horizontale. Ici $t = 1000$, t_1 est donné par

$$t_1\sqrt{3} = 15 + 30 \times 57 \qquad \text{ou} \qquad t_1 = 575.\sqrt{3}.$$

On a donc finalement

$$z = -15 + (1000 - 575\sqrt{3})\sqrt{3},$$
$$z = 1000\sqrt{3} - 1740 = -7{,}95.$$

AMBLARD, conducteur des Ponts et Chaussées, à Huines.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1908.

Mathématiques spéciales.

1720. — *Un contour convexe est formé des côtés parallèles* AB, A'B', *de longueur* $2l$, *d'un rectangle* ABB'A' *et des demi-cercles de rayon* r *décrits sur les deux autres côtés* AA' *et* BB' *comme diamètres. Il se déplace dans son plan d'une façon continue en restant tangent extérieurement à un demi-cercle fixe de rayon* R

et à la droite indéfinie D *qui limite ce demi-cercle. On suppose que* AB *était sur* D *au début du mouvement et que* A'B' *vient sur cette même droite à la fin du mouvement, après avoir touché le demi-cercle fixe.*

1° *Construire la trajectoire* Γ *du centre* M *du rectangle et reconnaître si elle est convexe.*

2° *Calculer l'aire limitée par* Γ, *dans l'hypothèse* $R = r$, $l = r(\sqrt{3} - 1)$.

3° *On suppose que l'angle dont tourne le contour est proportionnel au temps ; on demande de placer le contour à un instant donné et de construire le vecteur vitesse du point* M *à cet instant.*

4° *Le côté* A'B' *étant tangent au demi-cercle fixe, trouver à un instant donné l'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points du contour. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter en supposant* $R = r = l$.

NOTE. — Les constructions (3°) devront être effectuées avec la règle et le compas.

1. Soit O le centre du demi-cercle fixe, O_1 et O_2 les centres des cercles qui ont pour diamètres AA' et BB'. Nous prendrons comme axe des x la droite D et pour axe des y le rayon perpendiculaire du cercle O.

Le mouvement du contour comporte trois phases, suivant que le cercle O est tangent soit au cercle O_1, soit au côté A'B', soit au cercle O_2.

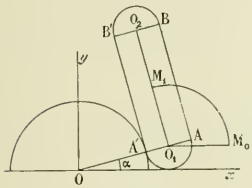


Fig. 1.

PREMIÈRE PHASE. *Le cercle* O *est tangent au cercle* O_1.

Le point O_1 reste fixe, à la distance r de Ox et à la distance $R + r$ du point O. Donc le point M décrit un arc de cercle M_0M_1, de centre O_1 et de rayon l ; l'angle au centre correspondant $M_0O_1M_1$ est égal à $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (*fig.* 1), α désignant l'angle aigu qui est défini par la relation

$$\sin \alpha = \frac{r}{R + r}.$$

DEUXIÈME PHASE. *Le cercle* O *est tangent à* A'B'.

Nous désignerons par ω l'angle que fait Ox avec le rayon OC qui passe par le point de contact (*fig.* 2).

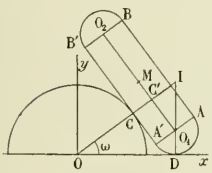


Fig. 2.

Le point M est situé sur la droite O_1O_2, qui a pour équation

$$x \cos \omega + y \sin \omega = R + r,$$

et son ordonnée est égale à $l \cos \omega + r$; par suite les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{R + r - r \sin \omega}{\cos \omega} - l \sin \omega, \qquad y = l \cos \omega + r.$$

Comme la droite O_1O_2 reste tangente au cercle de centre O et de rayon $R + r$, et que le point O_1 décrit une parallèle à Ox, l'angle ω croît de α à la valeur β qui correspond au cas où le point de contact est B' (*fig.* 3). Pour déterminer cet angle β, considérons le rectangle KO_2PQ, dans lequel on a $O_2K = PQ$, ce qui nous donne

$$(R + r) \sin \beta = 2l \cos \beta + r ;$$

et cette relation définit un seul angle β compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

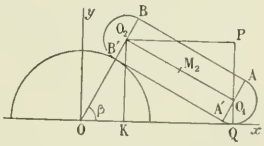


Fig. 3.

Prenons les dérivées de x et y par rapport à ω, nous avons

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{(R + r) \sin \omega - r}{\cos^2 \omega} - l \cos \omega, \qquad \frac{dy}{d\omega} = -l \sin \omega.$$

Quand ω croît de α à β, y décroît ; d'autre part, $\frac{dx}{d\omega}$ a le signe de la fonction

$$\varphi(\omega) = (R + r) \sin \omega - r - l \cos^3 \omega,$$

qui est croissante dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pour $\omega = \alpha$, $\varphi(\alpha) = -l \cos^3 \alpha < 0$; pour $\omega = \beta$,

$$\varphi(\beta) = (R + r)\sin\beta - r - l\cos^3\beta = 2l\cos\beta - l\cos^3\beta = l\cos\beta(2 - \cos^2\beta) > 0.$$

Donc $\frac{dx}{d\omega}$ s'annule pour une valeur comprise entre α et β; donc x passe par un minimum. Soit M′ le point correspondant.

Nous obtenons ainsi l'arc de courbe $M_1M'M_2$ (*fig.* 5).

La courbe ne présente pas d'inflexion. En effet, soit m le coefficient angulaire de la tangente en un point; nous avons

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{l\sin\omega\cos^2\omega}{l\cos^3\omega + r - (R + r)\sin\omega},$$

et

$$\frac{dm}{d\omega} = l\cos\omega\,\frac{l\cos^3\omega + 2R\sin^3\omega + r(2\sin\omega + 1)(1 - \sin\omega)^2}{[l\cos^3\omega + r - (R + r)\sin\omega]^2}.$$

Par suite, $\frac{dm}{d\omega}$ est toujours positif, m croît. La courbe est convexe vers Oy de M_1 à M′, concave de M′ à M_2.

Au point M_1 le coefficient angulaire de la tangente est

$$m_1 = \frac{l\sin\alpha\cos^2\alpha}{l\cos^3\alpha + r - (R + r)\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

ce qui montre que la courbe se raccorde en M_1 avec l'arc de cercle M_0M_1, et cela était à prévoir d'après les propriétés du centre instantané de rotation.

Au point M_2, on a

$$m_2 = \frac{l\sin\beta\cos^2\beta}{l\cos^3\beta + r - (R + r)\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta - 2}.$$

Troisième phase. *Le cercle O est tangent au cercle* O_2.

Désignons toujours par ω l'angle de Ox avec A′A, et soit θ l'angle de Ox avec la droite OO_2 qui passe par le point de contact (*fig.* 4). On voit aisément que θ est lié à ω par la formule

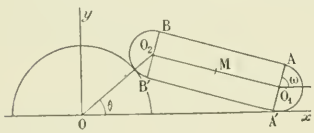


Fig. 4.

(1) $$(R + r)\sin\theta - 2l\cos\omega - r = 0,$$

et que les coordonnées du point M sont

$$x = (R + r)\cos\theta + l\sin\omega, \qquad y = r + l\cos\omega.$$

L'angle ω croît de β à $\frac{\pi}{2}$, tandis que θ décroît de β à α.

Il en résulte que y décroît et x croît; on obtient l'arc M_2M_0 (*fig.* 5).

Le coefficient angulaire de la tangente est

$$m = \frac{-l\sin\omega}{l\cos\omega - (R + r)\sin\theta\,\frac{d\theta}{d\omega}};$$

et comme de la relation (1) on tire

$$\frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{2l\sin\omega}{(R + r)\cos\theta},$$

on a

$$m = -\frac{\sin\omega\cos\theta}{\cos\omega\cos\theta + 2\sin\omega\sin\theta}.$$

Au point M_2, $\theta = \omega = \beta$, $m = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta - 2}$; la courbe se raccorde avec l'arc $M'M_2$.

Au point d'arrivée M_0, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \alpha$, $m = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha$.

On a

$$\frac{dm}{d\omega} = \frac{2\sin^2\omega\,\frac{d\theta}{d\omega} - \cos^2\theta}{[\cos\omega\cos\theta + 2\sin\omega\sin\theta]^2}.$$

Comme $\frac{d\theta}{d\omega}$ est négatif, $\frac{dm}{d\omega}$ est aussi négatif, m décroît. Par suite, l'arc M_2M_0 est concave vers Oy.

Il n'y a aucun point d'inflexion, la courbe $M_0M_1M'M_2M_0$ est entièrement convexe.

2. L'aire cherchée A est donnée par

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4,$$

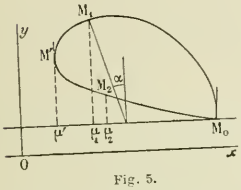


Fig. 5.

en posant (*fig.* 5)

$$A_1 = \text{aire } M_0M_1\mu_1, \qquad A_2 = \text{aire } M_1M'\mu'\mu_1,$$
$$A_3 = \text{aire } M'\mu'\mu_2M_2, \qquad A_4 = \text{aire } M_2\mu_2M_0.$$

Nous avons

$$A_1 = \frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{l^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$A_2 = \int_{M'}^{M_1}(y - r)dx, \qquad A_3 = \int_{M'}^{M_2}(y - r)dx,$$

x et y ayant les valeurs de la seconde phase.

On a donc

$$A_2 - A_3 = \int_{M'}^{M_1} - \int_{M}^{M_2} = \int_{M_2}^{M'} + \int_{M'}^{M_1} = \int_{M_2}^{M_1},$$

ou

$$A_2 - A_3 = \int_{\beta}^{\alpha}(y - r)dx,$$

ou encore, en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de ω,

$$A_2 - A_3 = l\int_{\beta}^{\alpha}\left[(R + r)\operatorname{tg}\omega - \frac{r}{\cos\omega} - l\cos^2\omega\right]d\omega.$$

L'intégrale indéfinie est égale à

$$l\left[-(R + r)L\cos\omega - 2L\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) - \frac{l\omega}{2} - \frac{l\sin 2\omega}{4}\right],$$

et par suite $$A_2 - A_3 = l\left[(R + r)L\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + rL\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{l(\beta - \alpha)}{2} + l\frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{4}\right].$$

Enfin, nous avons

$$A_4 = \int_{M_2}^{M_0}(y - r)dx,$$

x et y ayant les valeurs de la troisième phase, c'est-à-dire

$$A_4 = \int_{M_2}^{M_0} l\cos\omega\left[l\cos\omega - (R + r)\sin\theta\frac{d\theta}{d\omega}\right]d\omega.$$

L'élément différentiel peut s'écrire

$$l^2\cos^2\omega d\omega - l(R + r)\sin\theta\cos\omega d\theta,$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$l^2\cos^2\omega d\omega - (R + r).\frac{(R + r)\sin\theta - r}{2}\sin\theta d\theta,$$

ou encore $$\frac{l^2}{2}(1 + \cos^2\omega)d\omega - \frac{(R + r)^2}{4}(1 - \cos 2\theta)d\theta + \frac{(R + r)r}{2}\sin\theta d\theta.$$

L'intégrale indéfinie est donc

$$\frac{l^2}{2}\left(\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right) - \frac{(R + r)^2}{4}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] - \frac{(R + r)r}{2}\cos\theta.$$

Au point M_2, $\omega = \theta = \beta$; au point M_0, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \alpha$.

Donc

$$A_1 = \frac{l^2\pi}{4} - \frac{(R+r)^2}{4}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \frac{(R+r)r}{2}\cos\alpha - \frac{l^2}{2}\left(\beta + \frac{\sin 2\beta}{2}\right)$$
$$+ \frac{(R+r)^2}{4}\left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\right) + \frac{(R+r)r}{2}\cos\beta.$$

Il est alors facile de calculer A.

Si l'on fait $R = r$, $l = r(\sqrt{3}-1)$, on a $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ et on trouve

$$A = r^2\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}(7 - 4\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)L\frac{3+2\sqrt{3}}{9}\right].$$

3. Désignons toujours par ω l'angle de la demi-droite Ox avec la demi-droite A'A ; cet angle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ pendant la durée du mouvement. Il s'agit de placer le contour, connaissant ω.

Dans la première phase, $-\frac{\pi}{2} < \omega < \alpha$, la construction ne présente aucune difficulté puisque O_1 est fixe.

Dans la seconde, $\alpha < \omega < \beta$, (fig. 2), l'axe O_1O_2 du rectangle est tangent au cercle de centre O et de rayon $R+r$ au point C', tel que l'angle de Ox avec OC' soit égal à ω. Le centre O_1 est à l'intersection de cet axe et de la parallèle à Ox à la distance r.

Le centre instantané de rotation I est le point de rencontre du rayon OC' et de la normale à Ox au point de contact D avec le cercle O_1. On en déduit la construction du vecteur vitesse.

D'ailleurs, les projections de ce vecteur sont

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{(R+r)\sin\omega - r}{\cos^2\omega} - l\cos\omega\right]\frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = -l\sin\omega\frac{d\omega}{dt};$$

donc le vecteur vitesse est la somme géométrique du vecteur $\frac{(R+r)\sin\omega - r}{\cos^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{dt}$ parallèle à Ox, et du vecteur qui a pour projections $-l\cos\omega\frac{d\omega}{dt}$ et $-l\sin\omega\frac{d\omega}{dt}$.

Considérons maintenant la troisième phase, $\beta < \omega < \frac{\pi}{2}$. Connaissant ω, on construit aisément θ. Le point O_2 est sur le cercle de centre O et de rayon $R+r$, et l'angle de Ox avec OO_2 est égal à θ. De plus, O_1 est sur la parallèle à Ox à la distance r, et la longueur O_1O_2 est égale à $2l$.

On peut encore construire le vecteur vitesse au moyen du centre instantané de rotation, ou remarquer que les projections de ce vecteur sur les axes sont

$$\frac{dx}{dt} = \left[l\cos\omega - (R+r)\sin\theta\frac{d\theta}{d\omega}\right]\frac{d\omega}{dt} = \left[l\cos\omega + \frac{2l\sin\theta\sin\omega}{\cos\theta}\right]\frac{d\omega}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = -l\sin\omega\frac{d\omega}{dt}.$$

4. Les normales aux trajectoires des différents points du contour passent par le centre instantané de rotation I ; les tangentes enveloppent les antipodaires des côtés AB, A'B' et des deux demi-cercles O_1 et O_2 ; ce sont des arcs de conique, et il est aisé de voir que ces arcs se raccordent.

Considérons en effet la tangente en A ; elle est tangente à la parabole qui a pour foyer le point I et pour tangente au sommet la droite AB. Si on désigne par N le point de contact, cette tangente est bissectrice de l'angle formé par NI et par la perpendiculaire NH à AB. D'autre part, la conique relative au cercle O_1 a pour foyer I et pour centre O_1 ; son second foyer I' est donc sur NH, et N est encore point de contact pour cette conique.

Discussion. — Relativement à AB et A'B' on aura toujours des paraboles, à moins que le point I ne soit sur l'une de ces droites ; les tangentes aux trajectoires des points de cette droite sont alors parallèles.

Relativement aux cercles O_1 et O_2, on aura des hyperboles ou des ellipses suivant que I sera extérieur ou intérieur aux cercles.

La distance du centre O_2 à la parallèle à Oy menée par O_1 est $2l\sin\omega$, quantité supérieure à r, puisque nous avons $\sin\omega > \frac{1}{2}$ et $l = r$. Le cercle O_2 donnera donc une hyperbole, puisque le point I est extérieur à ce cercle.

Le point I a pour abscisse $\frac{R + r - r\sin\omega}{\cos\omega}$ et pour ordonnée $\frac{R + r - r\sin\omega}{\cos\omega}\operatorname{tg}\omega$; il sera à l'intérieur du cercle O_1 si l'on a

$$(R + r)\sin\omega - r\sin^2\omega < 2r\cos^2\omega,$$

ou

$$r\sin^2\omega + (R + r)\sin\omega - 2r < 0,$$

ou, en faisant $R = r$,

$$\sin^2\omega + 2\sin\omega - 2 < 0.$$

Le premier membre est d'abord négatif, il croît ; sa valeur pour $\omega = \alpha = \frac{\pi}{6}$ est négative. Pour $\omega = \beta$, elle est égale à $\sin^2\beta + 2\sin\beta - 2$; mais comme nous avons $2\cos\beta - 2\sin\beta + 1 = 0$, $\sin^2\beta + 2\sin\beta - 2$ est égal à $2\cos\beta - \cos^2\beta$ qui est positif.

L'angle ω_1 défini par $\sin\omega_1 = -1 + \sqrt{3}$ est donc compris entre α et β.

Nous avons donc au départ le cercle O_1 qui est sa propre antipodaire ; puis un arc d'ellipse, puis pour la valeur ω_1, le centre instantané est sur le cercle, les tangentes aux trajectoires passent par un point fixe. Ensuite, nous avons un arc d'hyperbole.

Il reste à examiner si le point I peut être sur AB, car il ne peut être sur A'B'.

Il sera sur AB si son ordonnée est égale à $r + \frac{r}{\sin\omega}$, c'est-à-dire si l'on a

$$r + \frac{r}{\sin\omega} = \frac{(R + r)\sin\omega - r\sin^2\omega}{\cos^2\omega},$$

ou

$$3\sin^2\omega - \sin\omega - 1 = 0.$$

La racine positive est inférieure à β, elle convient.

QUESTIONS PROPOSÉES

1783. — On donne une sphère S et une droite D ; par la droite, on fait passer un plan variable et l'on considère toutes les quadriques circonscrites à la sphère le long de la courbe d'intersection de la sphère et du plan.

1° Le lieu des pôles d'un plan fixe P par rapport aux quadriques considérées est un plan qui tourne autour d'une droite fixe Δ, quand la droite D se déplace dans un plan passant par le centre de la sphère.

2° On fait alors pivoter le plan P autour d'un point A ; trouver le lieu du point de rencontre de ce plan avec la droite Δ. Ce lieu est une quadrique Σ bitangente à la sphère S. Etudier la nature de cette quadrique, quand le point A varie.

3° Trouver l'enveloppe des plans des courbes communes à la sphère et à la quadrique Σ, quand le point A décrit un plan ou une sphère.

Étude géométrique de la question.

BROS.

1784. — Un point lumineux très brillant, A, est fixé à l'une des branches d'un diapason qui vibre verticalement en faisant $N = 800$ vibrations par seconde. Vis-à-vis, se trouve un miroir plan P, argenté sur ses deux faces et mobile autour d'un axe vertical I situé dans son plan. Dans le plan horizontal passant par la position moyenne du point A et dans une direction IO normale à AI, se trouve l'axe d'une lunette ; l'objectif O est à une distance $IO = IA$ et la lunette est mise au point pour une distance double de IO ; son champ angu-

laire est alors 7°,2 et ce champ est plus que rempli par le miroir P quand celui-ci est à 45° de AI. Que verra-t-on dans la lunette quand le nombre n de tours accompli par le miroir en une seconde ira en augmentant progressivement ? Que verra-t-on en particulier quand le miroir fera par seconde : 1° 8 tours ; 2° 8 tours et $\frac{1}{500}$ de tour ; 3° 8 tours moins $\frac{1}{500}$ de tour ?

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1722. — *Les deux coniques* $S \equiv 2y^2 - px + p^2 - px_1 = 0$, $S' \equiv 2xy + py_1 = 0$ *se coupent aux trois sommets du triangle normal circonscrit à la parabole* $y^2 - 2px = 0$, *qui touche celle-ci aux pieds des trois normales abaissées du point* (x_1, y_1) *sur la parabole.*

1° *Les sommets du triangle conjugué commun à* S *et* S' *sont sur les mêmes diamètres de la parabole que ceux du triangle normal circonscrit.*

2° *Quand un sommet du second triangle décrit un diamètre de la parabole, l'axe radical du cercle* (C) *qui passe aux pieds des trois normales et du cercle* (C') *qui passe aux sommets du triangle normal circonscrit, tourne autour d'un point fixe* α. *Trouver le lieu de* α, *quand le diamètre de la parabole varie. Ce lieu est l'enveloppe de l'axe radical quand le point* (x_1, y_1) *décrit la développée de la parabole.*

3° *Mêmes questions pour l'axe radical de* (C') *et du cercle* (C'') *circonscrit au triangle conjugué commun à* S *et à* S'.

Je considère les deux coniques

$$S \equiv 2y^2 - px + p^2 - px_1 = 0, \qquad S' \equiv 2xy + py_1 = 0.$$

Je dis que ces deux coniques se coupent aux sommets du triangle normal circonscrit relatif au point (x_1, y_1).

Les pieds des normales abaissées de ce point sur la parabole sont les intersections de la parabole et de l'hyperbole d'Apollonius :

$$P \equiv y^2 - 2px = 0, \qquad H \equiv xy + (p - x_1)y - py_1 = 0.$$

Soit (α, β) un des sommets du triangle normal circonscrit. La polaire de ce point par rapport à la parabole est $p\alpha - \beta y + px = 0$. Or cette polaire constitue, avec le diamètre de la parabole passant par le troisième pied de normale, un des couples de sécantes communes à P et H. On a donc, pour une certaine valeur de λ,

$$\lambda(y^2 - 2px) + xy + (p - x_1)y - py_1 \equiv (p\alpha - \beta y + px)(uy + v).$$

En identifiant, nous obtenons les cinq relations :

$$(1) \qquad \lambda = -u\beta, \qquad 1 = pu, \qquad -2\lambda = v, \qquad p - x_1 = p\alpha u - \beta v, \qquad -y_1 = \alpha v.$$

Les trois premières donnent

$$u = \frac{1}{p}, \qquad \lambda = -\frac{\beta}{p}, \qquad v = \frac{2\beta}{p};$$

alors les deux dernières deviennent

$$p - x_1 = \alpha - \frac{2\beta^2}{p} \qquad \text{et} \qquad -y_1 = \frac{2\alpha\beta}{p},$$

ou, en remplaçant α, β par les coordonnées courantes x, y,

$$2y^2 - px + p(p - x_1) = 0, \qquad 2xy + py_1 = 0.$$

Ce sont précisément les coniques S et S'.

1° Les ordonnées des trois sommets du triangle normal circonscrit sont données par l'équation aux y, que l'on obtient en éliminant x entre les équations S et S' :

$$(2) \qquad 4y^3 + 2p(p - x_1)y + p^2y_1 = 0.$$

Or les sommets du triangle conjugué commun à S et S' sont les points doubles du faisceau $S + \lambda S' = 0$; on les obtient en annulant les trois dérivées partielles :

$$\begin{cases} -p + 2\lambda y = 0, \\ 4y + 2\lambda x = 0, \\ -px + 2p(p - x_1) + 2\lambda p y_1 = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad (2') \begin{cases} \lambda = \dfrac{p}{2y}, \\ px = -4y^2, \\ pxy - 2p(p - x_1)y - p^2y_1 = 0. \end{cases}$$

Portons dans la troisième équation les valeurs de λ et x tirées des deux premières, nous aurons

$$4y^3 + 2p(p - x_1)y + p^2y_1 = 0.$$

C'est précisément l'équation (2). Les sommets des deux triangles sont donc bien sur les mêmes diamètres.

2° La parabole P et l'hyperbole H se coupent aux trois pieds de normales et au point à l'infini $y = 0$, $z = 0$. Eliminons cette solution entre P et H :

$$P \equiv y.y - 2px.z = 0, \qquad H \equiv x.y + [(p - x_1)y - py_1].z = 0.$$

Les trois autres points sont sur la conique obtenue en annulant le déterminant

$$\Sigma = y[(p - x_1)y - py_1] + 2px_2 = 0.$$

Le cercle passant aux pieds des normales est un cercle du faisceau $\Sigma + \lambda P = 0$. On l'obtient en faisant $\lambda = p + x_1$:

$$C \equiv (p + x_1)P + \Sigma \equiv 2(x^2 + y^2) - 2(p + x_1)x - yy_1 = 0.$$

De même les deux coniques S et S' se coupent aux trois sommets du triangle normal circonscrit et au point à l'infini $y = 0$, $z = 0$. Eliminons ce point entre

$$S \equiv 2y.y - [px - p^2 + px_1]z = 0, \qquad S' \equiv 2x.y + py_1z = 0.$$

Les trois sommets sont sur la conique

$$\Sigma' \equiv 2pyy_1 + 2x(px - p^2 + px_1) = 0.$$

Le cercle C' passant aux trois sommets est un cercle du faisceau $\Sigma' + \lambda S = 0$. On l'obtient en faisant $\lambda = p$:

$$C' \equiv pS + \Sigma' = 2(x^2 + y^2) - (3p - 2x_1)x + 2yy_1 + p(p - x_1) = 0.$$

L'axe radical des deux cercles est

$$C - C' \equiv (4x_1 - p)x + 3y_1y + p(p - x_1) = 0.$$

Or soit (α, β) un des sommets du triangle normal circonscrit. De S et S' l'on tire

$$y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}, \qquad x_1 = \frac{2\beta^2 - p\alpha + p^2}{p}.$$

L'axe radical a donc pour équation $x(3p^2 - 4p\alpha + 8\beta^2) - 6\alpha\beta y + p(p\alpha - 2\beta^2) = 0$.

Lorsque le sommet se déplace sur un diamètre de la parabole, β reste fixe, et cet axe passe par un point fixe donné par $x(3p^2 + 8\beta^2) - 2p\beta^2 = 0$, $\quad -4px - 6\beta y + p^2 = 0$.

Lorsque β varie, le point fixe décrit un lieu que l'on obtient en éliminant β entre ces deux équations : $\beta = \dfrac{p^2 - 4px}{6y}$, puis $(8x - 2p)\dfrac{(p^2 - 4px)^2}{36y^2} + 3p^2x = 0$,

ce qui, toutes réductions faites, donne la cubique

$$(3) \qquad 54xy^2 + (4x - p)^3 = 0.$$

Ce lieu est d'ailleurs l'enveloppe de l'axe radical lorsque (x_1, y_1) décrit la développée de la parabole. En effet on a cette enveloppe en éliminant (x_1, y_1) entre les équations de l'axe et de la développée et l'équa-

tion obtenue en égalant les rapports des dérivées de ces deux équations par rapport à x_1 et y_1 :

$$(4)\qquad \begin{cases} (p-4x_1)x-3y_1y-p(p-x_1)=0, \\ 27py_1^2-8(x_1-p)^3=0, \\ \dfrac{-4x+p}{-3y}=\dfrac{-24(x_1-p)^2}{54py_1}. \end{cases}$$

La troisième donne

$$y_1=\frac{4y(x_1-p)^2}{3p(p-4x)},\qquad \text{puis la seconde devient}\quad 27p\,\frac{16y^2(x_1-p)^4}{9p^2(p-4x)^2}=8(x_1-p)^3,$$

$$x_1=p+\frac{p(p-4x)^2}{6y^2},\qquad \text{par suite}\qquad y_1=\frac{p(p-4x)^3}{27y^3}.$$

Portons dans la première équation, nous aurons

$$\left[-3p-\frac{4p(p-4x)^2}{6y^2}\right]x-\frac{3py(p-4x)^3}{27y^3}+\frac{p^2(p-4x)^2}{6y^2}=0,$$

ou en réduisant

$$54xy^2+(4x-p)^3=0.$$

C'est bien l'équation (3), lieu du point fixe α.

3° Le système d'équations (2') nous montre que les sommets du triangle conjugué commun à S et S' sont les points d'intersection à distance finie des deux coniques

$$Q\equiv 4y^2+pxz=0,\qquad Q'\equiv px.y-[2p(p-x_1)y+p^2y_1]\,z=0.$$

En éliminant le point à l'infini $y=0$, $z=0$, on voit que les trois autres sont sur la conique

$$\Sigma''\equiv 4y[2p(p-x_1)y+p^2y_1]+p^2x^2=0.$$

Le cercle circonscrit au triangle conjugué commun est un cercle du faisceau $\lambda Q+\Sigma''=0$.

On l'obtient en faisant

$$\lambda=\frac{8px_1-7p^2}{4};$$

$$C''\equiv 4(x^2+y^2)+(8x_1-7p)x+16yy_1=0.$$

L'axe radical des cercles C' et C'' est

$$(p-4x_1)x-12y_1y+2p(p-x_1)=0.$$

Remplaçons x_1, y_1 par leurs valeurs en fonction de α et β. L'axe radical devient

$$(4p\alpha-8\beta^2-3p^2)x+24\alpha\beta y+2p(p\alpha-2\beta^2)=0.$$

Il passe par un point fixe α_1 défini par les équations

$$4px+24\beta y+2p^2=0,\qquad -(8\beta^2+3p^2)x-4p\beta^2=0.$$

Lorsque β varie, ce point α_1 décrit un lieu qu'on obtient en éliminant β entre ces deux équations.

Ce lieu est la cubique

$$(5)\qquad (p+2x)^3+108xy^2=0.$$

On démontre exactement comme tout à l'heure que ce lieu est l'enveloppe de l'axe radical lorsque (x_1, y_1) décrit la développée de la parabole.

Il faut pour cela éliminer x_1 et y_1 entre les trois équations

$$\begin{cases} (p-4x_1)x-12y_1y+2p(p-x_1)=0, \\ 27py_1^2-8(x_1-p)^3=0, \\ \dfrac{-4x-2p}{12y}=\dfrac{-24(x_1-p)^2}{54py_1}. \end{cases}$$

Nous avons d'abord $y_1=\dfrac{-p(2x+p)^3}{12+18y^3}$, $x_1=p+\dfrac{p(2x+p)^2}{24y^2}$; puis, en portant dans la première équation,

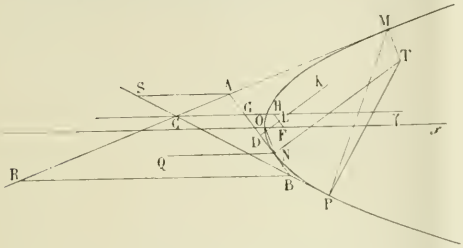
$$\left[-3p-\frac{p(2x+p)^2}{6y^2}\right]x+\frac{p(2x+p)^3}{18y^2}-\frac{p^2(2x+p)^2}{12y^2}=0,$$

ou

$$(p+2x)^3+108xy^2=0.$$

C'est bien l'équation (5), lieu du point fixe α_1.

Remarques géométriques. — 1. — Il est facile de montrer que les sommets du triangle conjugué commun aux coniques S et S′ sont sur les mêmes diamètres de la parabole que ceux du triangle normal circonscrit.



En effet, les sommets du triangle conjugué commun sont les points diagonaux du quadrangle des points d'intersection des deux coniques.

Or S et S′ ont un point commun à l'infini dans la direction Ox. Le quadrangle se compose donc des trois côtés AB, AC, BC et des trois parallèles à Ox menées par les points A, B et C.

Les sommets du triangle conjugué seront sur ces trois diamètres de la parabole.

2. — Supposons que le sommet C décrit le diamètre $C\gamma$. Je dis que l'axe radical des cercles circonscrits à ABC et MNP passe par un point fixe.

Chacun de ces cercles passe en effet par deux points qui restent fixes quand C se déplace sur le diamètre.

Le cercle circonscrit à MNP est un cercle de Joachimsthal. Son quatrième point d'intersection avec la parabole est le symétrique du pied de la quatrième normale abaissée de $T(x_1, y_1)$ sur la parabole par rapport au centre de cette conique. Ce quatrième pied de normale ainsi que le centre sont à l'infini ; le symétrique est donc le sommet O de la parabole, premier point fixe.

Mais les cordes ON et MP sont également inclinées sur l'axe. Or quand C se déplace sur $C\gamma$, la direction MP, conjuguée du diamètre $C\gamma$ reste fixe. Donc la direction ON est fixe et comme O est fixe, le point N restera fixe.

Le cercle circonscrit à MNP passe donc par les points fixes O et N. On voit en même temps que, lorsque C décrit $C\gamma$, le point $T(x_1, y_1)$ décrit la normale NT.

Le cercle circonscrit au triangle ABC passe au foyer, car la tangente au sommet est une droite de Simson du triangle ABC, et c'est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de F sur les tangentes à la parabole. De plus sur la tangente fixe AB les tangentes CM et CP déterminent des points A et B qui se correspondent homographiquement : A et B décrivent sur AB une involution dont les points à l'infini se correspondent. Le milieu du couple AB est donc fixe. C'est le milieu D de NG. Le cercle circonscrit à ABC passe donc par un deuxième point fixe qui est le symétrique de F par rapport à DK, perpendiculaire élevée à AB par D.

Ce symétrique est d'ailleurs le point H où la parallèle FH menée par F à AB coupe le diamètre $C\gamma$. En effet

$$\widehat{FND} = \widehat{DNQ} \quad \text{(propriété de la tangente)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{DNQ} = \widehat{DGH}.$$

Donc GHFN est un trapèze isocèle et HL = LF.

Nous avons donc ici deux faisceaux de cercles qui peuvent être mis sous la forme

$$C + \lambda C' = 0 \quad \text{pour le premier,} \qquad C_1 + \lambda_1 C_1' = 0 \quad \text{pour le second,}$$

λ et λ_1 sont des fonctions linéaires des quantités x_1 et y_1.

Mais ces cercles ne sont pas indépendants, car x_1 et y_1 sont liés par une relation linéaire, puisque le point (x_1, y_1) décrit la normale NT.

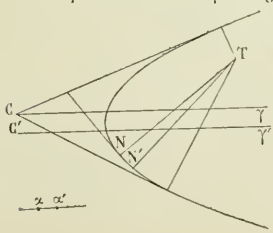
On peut donc finalement mettre ces faisceaux sous la forme canonique

$$C + x_1 C' = 0 \quad \text{pour le premier,} \qquad C_1 + x_1 C_1' = 0 \quad \text{pour le second.}$$

Leur axe radical sera $\quad k(C + x\,C') - (C_1 + x_1 C_1') \equiv C_2 + x_1 C_2' = 0,$

k étant un coefficient convenablement choisi pour éliminer les termes du second degré. Il restera une équation de droite ne dépendant que d'un unique paramètre x_1. Ce paramètre n'y entrant qu'au premier degré, l'enveloppe est de première classe : c'est un point, α.

Lorsque le diamètre $C\gamma$ change, le point α décrit un lieu. Je dis que c'est l'enveloppe de l'axe radical quand (x, y_1) décrit la développée de la parabole.



En effet lorsque C décrit le diamètre $C\gamma$, le point M décrit la normale TN et l'axe radical passe par le point α.

Lorsque C décrit le diamètre infiniment voisin γ', le point M décrit la normale TN′ et l'axe radical passe par le point fixe α'.

Soit T le point de rencontre de deux normales infiniment voisines, l'axe radical correspondant au point M doit passer par α et α'. C'est la droite $\alpha\alpha'$.

Lorsque $C'\gamma'$ tend vers $C\gamma$, la normale N′T tend vers NT. Leur point de rencontre T tend vers le point de contact de la normale avec la développée de la parabole et la droite $\alpha'\alpha$ tend vers la tangente en α au lieu du point α.

3. — Le cercle circonscrit à SRG passe par l'origine et le point G, qui reste fixe lorsque C se déplace sur Cγ. Comme dans le cas précédent, on montrera que l'axe radical de ce cercle et d'un des cercles précédents passe par un point fixe et que le lieu de ce point est l'enveloppe de l'axe radical lorsque (x_1, y_1) décrit la développée de la parabole.

M. DANBON.

Très bonnes solutions de MM. L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; G. Foucry, à Roanne ; Benoit-Gonin, à Dijon.

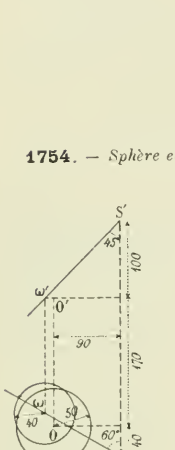
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1754. — *Sphère et cône de révolution. — La sphère de centre* O, O′ *a* 50^{mm} *de rayon. — Le cône a son sommet* S, S′ *à* 90^{mm} *à droite,* 100^{mm} *au-dessus et* 40^{mm} *en avant de* O, O′.

Les projections de l'axe du cône font des angles de 45° *et de* 60° *avec les lignes de rappel. La sphère inscrite dans le cône et dont le centre* ω, ω′ *est à la même cote que* O, O′ *a* 40^{mm} *de rayon.*

Représenter le solide formé par l'ensemble du cône indéfini et de la sphère.

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne, concours de 1908.*)

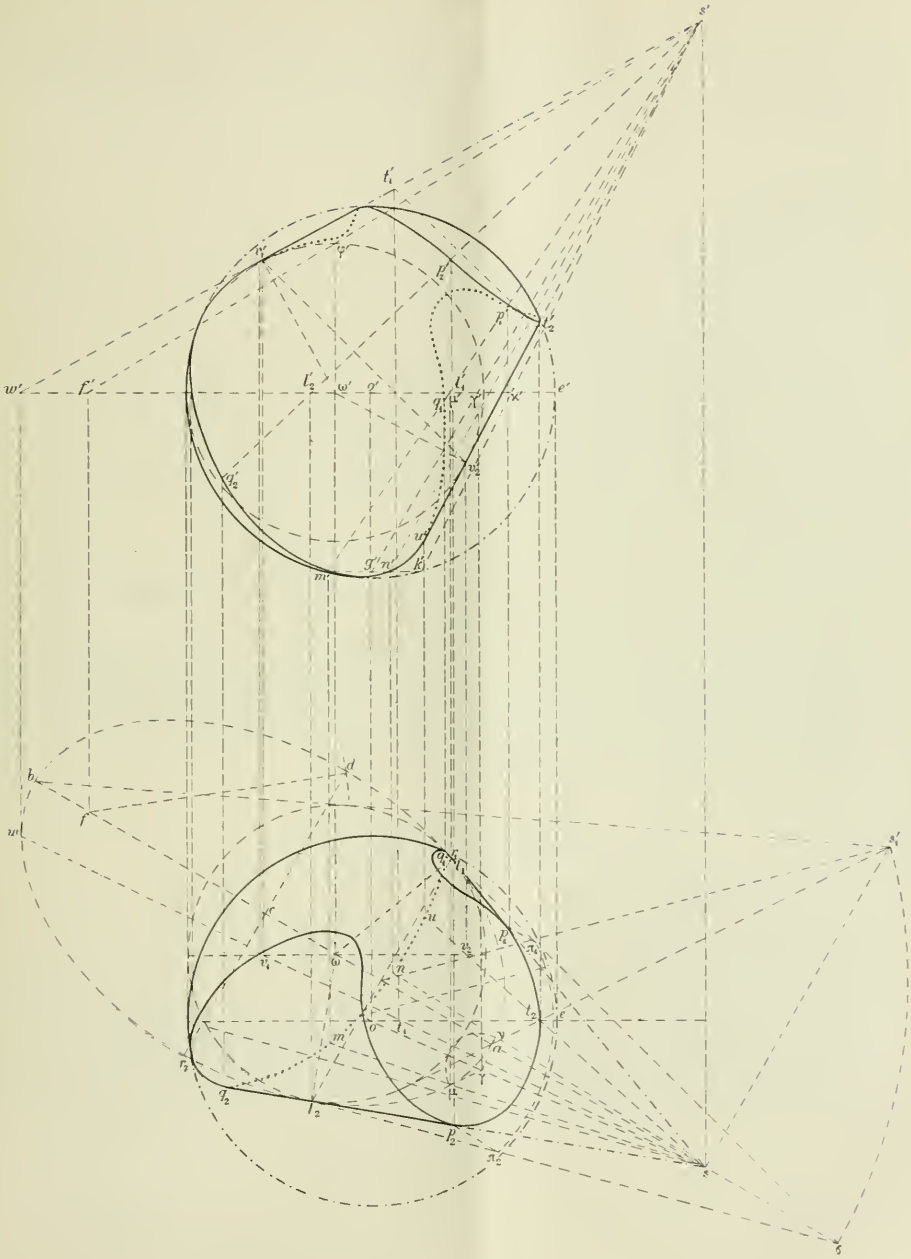


L'énoncé donne immédiatement les contours apparents des deux surfaces. Pour obtenir le solide formé par leur ensemble, il faut chercher la courbe d'intersection du cône et de la sphère. La méthode des sphères auxiliaires ayant leur centre au point de rencontre de l'axe du cône et d'un diamètre de la sphère donnée exigerait ici un changement de plans de projection conduisant à des constructions compliquées. Nous couperons donc simplement les deux surfaces par une série de plans horizontaux : chacun d'eux donnera sur la sphère une circonférence et sur le cône une ellipse dont les points d'intersection seront des points de la courbe cherchée. Nous pouvons éviter la construction de toutes ces ellipses en traçant, une fois pour toutes et très exactement, la section du cône par un plan horizontal déterminé, par exemple celui du centre de la sphère O; nous projetterons ensuite sur ce plan toutes les sections auxiliaires, en prenant le sommet du cône S comme point de vue, de manière que toutes les ellipses aient pour projection commune la base du cône ; les sections de la sphère se projetteront suivant des cercles dont les centres sont sur la droite d'intersection du plan de base du cône avec le plan vertical SO qui contient toutes les projetantes des différents centres de ces sections, et dont on aura très facilement les rayons. Il suffira donc de prendre l'intersection de tous ces cercles avec l'ellipse, puis, par chaque point ainsi obtenu, mener la génératrice du cône, qui rencontrera le parallèle auxiliaire correspondant au point cherché.

Base du cône. — Nous avons construit la base elliptique du cône en déterminant ses deux axes de symétrie : le grand axe ab a pour extrémités les traces des génératrices, section du cône par le plan méridien vertical $s\omega$ que nous avons rabattu en s'_1ab sur le plan de l'ellipse, les deux génératrices étant les tangentes menées par s'_1 au grand cercle de la sphère a qui coïncide avec son contour apparent. Pour obtenir la longueur du petit axe, qui est perpendiculaire sur ab en son milieu c, nous avons déterminé l'un des foyers de l'ellipse qui n'est autre que la projection conique du foyer de la section horizontale menée par le point le plus haut φ' de la sphère inscrite, soit f, f', et du point f comme centre, avec un rayon égal au demi grand axe cb, nous avons décrit un arc de cercle coupant la perpendiculaire cd à ce grand axe au point d, sommet cherché.

Point courant de l'intersection. — Soit $g'k'$ un parallèle auxiliaire de la sphère donnée. Sa projection conique est la circonférence de centre γ', γ et de rayon $\gamma'x'$; cette circonférence coupe l'ellipse, base du cône, aux points μ et ν. Chacun d'eux définit une génératrice telle que $s\mu$, $s'\mu'$ qui coupe le parallèle auxiliaire en un point m, m' de l'intersection. En répétant cette construction autant de fois que l'on veut, on obtient chaque fois autant de points de l'intersection qu'il y a de points communs au cercle auxiliaire et à l'ellipse.

Points remarquables. — Dans la pratique il vaut toujours mieux commencer la construction de la courbe par la détermination des points remarquables. Ici ce sont les points sur les contours apparents et les points doubles de chaque projection. Pour avoir les points sur le contour apparent horizontal du cône, par exemple, nous avons considéré le plan de ces deux génératrices et l'avons rabattu sur le plan horizontal du centre de la sphère autour de sa trace l_1l_2 suivant zl_1l_2. Nous avons rabattu en même temps la section de la sphère par ce plan ; c'est un cercle dont le centre se projette et se rabat très près du point o, en sorte que nous n'avons pas



figuré les constructions qui donnent son rabattement, mais nous avons tracé la circonférence rabattue qui coupe en π_1 et π_2 les deux génératrices du cône. Ces points se relèvent en p_1 et p_2, qui sont les points cherchés sur le contour apparent horizontal du cône. La même circonférence donnait sur les mêmes génératrices deux autres points q_1 et q_2 dont la construction n'a pas été mise à l'encre pour ne pas compliquer l'épure inutilement.

Une construction analogue permet d'obtenir les points sur le contour apparent vertical du cône, par le rabattement du plan de ces génératrices, sur le plan de front du centre de la sphère et du cercle de section de la sphère par ce plan.

Quant aux points situés sur les contours apparents de la sphère, on peut les obtenir en traçant la courbe d'intersection du cône par le plan horizontal, puis par le plan de front menés par ce centre, mais seulement dans le voisinage immédiat des points où les deux courbes coupent chacun des contours apparents. Nous avons déjà ici les points r_1 et r_2 sur le contour apparent horizontal ; il suffit donc d'un seul tracé complémentaire de l'ellipse que donne le plan de front *oe* sur le cône. On a d'ailleurs facilement les deux axes de cette ellipse en appliquant la construction qui a donné ceux de l'ellipse *abd*. Nous n'avons pas indiqué ces constructions dans la mise à l'encre pour la projection verticale.

Points doubles. — La ligne des points doubles de la projection horizontale est la trace du plan des génératrices de contour apparent du cône sur le plan horizontal du centre de la sphère, $l_1 l_2$; elle coupe ici la projection de la courbe d'intersection en deux points réels. Sur la projection verticale la ligne des points doubles est la trace $t'_1 t'_2$ du plan des génératrices de contour apparent vertical sur le plan de front *oe* du centre de la sphère donnée ; nous l'avons déterminée en prenant simplement les traces de chacune des génératrices sv_1 et sv_2 sur ce plan de front. Cette droite ne coupe la projection verticale de la courbe qu'en un point qui est le seul point double de cette projection.

On trace la courbe en ayant soin de joindre les points dans l'ordre où ils se présentent sur les génératrices définies par les positions successives d'un mobile qui parcourrait l'ellipse, base du cône, d'un mouvement continu et toujours dans le même sens. On détermine ainsi sans aucune difficulté les points de la courbe situés en avant ou en arrière et au-dessus ou au-dessous de la surface par rapport aux génératrices de contour apparent et on en déduit la ponctuation telle qu'elle est figurée sur l'épure.

Si l'on veut avoir la tangente en l'un des points courants, il suffit de joindre ce point au point d'intersection de deux horizontales de même cote choisies dans chacun des plans tangents au cône et à la sphère en ce point. On pourra mener la tangente à l'ellipse au pied de la génératrice qui passe par le point considéré, et on prendra la trace de la ligne de front du plan tangent à la sphère en ce point sur le plan de base du cône ; la perpendiculaire menée par cette trace à la projection horizontale du rayon de la sphère donnera la seconde horizontale qui coupe la tangente à l'ellipse au point cherché.

QUESTIONS PROPOSÉES

1785. — On connaît la base BC d'un triangle ABC, en grandeur et en position ; on sait en outre que l'une des bissectrices de l'angle A, limitée au côté BC, AD, satisfait à la relation

$$AD.BC = AB.AC.$$

Trouver le lieu du sommet A et l'enveloppe de la bissectrice AD.

(G. F.)

1786. — 1° On considère un point fixe O et un plan fixe P qui ne passe pas au point O. Etudier le complexe des droites D qui rencontrent le plan P en un point A tel que OA soit perpendiculaire à D.

2° On considère un système de forces Σ appliquées à un corps solide. Etudier le complexe formé par les droites pour lesquelles le moment du système est égal à une constante donnée *k*.

3° On considère une droite fixe D. Etudier le complexe des droites Δ qui ont un moment donné par rapport à D.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 10. Juillet 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE.

A propos de la question 1720.

Question **1720** (*). — 1° Dans la troisième phase du mouvement (p. 231, ligne 1) m décroît quand le point M décrit l'arc M_2M_0; m varie donc en sens contraire de x, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif. Il en résulte que l'arc M_2M_0 est *convexe* vers Oy, et, par suite, *le point* M_2 *est un point d'inflexion.*

2° La valeur de A (p. 232, ligne 6) doit être rectifiée de la façon suivante :

$$A = r^2\left[\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + \frac{\pi}{6}(7 - 4\sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)L\frac{3 + 2\sqrt{3}}{9}\right].$$

DECERF, étudiant à la faculté des sciences de Lille.

A propos de la question 1741.

L'énoncé de la question **1741** n'est pas correct. On doit dire qu'une courbe *roule* sur une surface lorsqu'elle reste tangente à la trajectoire du point de contact : dans le cas contraire il y a *dérapage* ; le roulement étant supposé, il y a roulement *sans glissement* si l'arc de courbe est égal à l'arc de trajectoire qui lui correspond. Ces définitions étant admises, le mouvement de l'ellipse considérée dans l'énoncé dont il s'agit est défini en disant que cette ellipse *roule* sur le plan, son centre étant maintenu fixe ; il n'y a pas à dire qu'elle roule sans glisser, et ce fait, qui est exact, constitue une propriété du mouvement de la figure.

(G. F.)

Sur le rayon de courbure des polaires réciproques.

Paris, le 13 Juin 1909.

MONSIEUR,

Me sera-t-il permis de faire remarquer que la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques par rapport à un cercle, donnée récemment par M. Sire dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (n° de Juin, p. 213), se trouve déjà dans une note que j'ai fait paraître en 1887 dans les *Annales de l'École normale supérieure* (3e série, t. IV, p. 314) ?

Dans la même note, je rappelle la relation analogue, antérieurement connue, pour le cas de l'inversion, que donne aussi M. Sire (*loc. cit.*), et je généralise la formule applicable aux polaires réciproques pour le cas où la conique directrice est quelconque au lieu d'être un cercle.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

M. D'OCAGNE.

(*) Voir la solution dans le n° de juin 1909, p. 228.

TRAJECTOIRES DES DIVERS POINTS D'UNE DROITE

par M. **A. Sainte-Laguë**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

La plupart des propriétés qui suivent ne font point partie explicite des programmes de Mathématiques spéciales. On les trouve éparses dans divers volumes de Géométrie supérieure. Nous avons cru bon d'en donner pour les élèves un résumé succinct.

Prenons d'abord le cas d'une droite mobile dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires xOy. Un point quelconque de cette droite a pour coordonnées

$$x = x_0 + \alpha r, \qquad y = y_0 + \beta r,$$

en désignant par x_0, y_0 un point quelconque de la droite, α et β les cosinus des angles de la droite avec les axes et r la distance du point considéré au point x_0, y_0. Toutes ces quantités, quand la droite se déplace, sont fonctions d'une même variable t, par rapport à laquelle seront prises les dérivées. Si r est indépendant de t, cela veut dire que le point considéré est à une distance invariable de x_0, y_0. Remarquons encore que si θ est l'angle de la droite avec Ox, on a $\theta = \text{arc tg}\,\frac{\beta}{\alpha}$ et par suite,

$$d\theta = \alpha.d\beta - \beta.d\alpha.$$

I. *Enveloppe.* — Cherchons le point (x, y) de la droite qui décrit l'enveloppe, c'est-à-dire dont le déplacement dx, dy est parallèle à la droite. On doit avoir pour ce point

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta},$$

ou

$$\frac{dx_0 + r.d\alpha + \alpha.dr}{\alpha} = \frac{dy_0 + r.d\beta + \beta.dr}{\beta},$$

qui donne

$$\beta\, dx_0 - \alpha.dy_0 = r(\alpha.d\beta - \beta.d\alpha) = r.d\theta.$$

Cette équation fournit r sans intégration, comme on devait s'y attendre. La droite étant tangente à son enveloppe, on a pour l'élément d'arc ds de cette enveloppe :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \beta.$$

Si en particulier c'est le point (x_0, y_0) qui décrit l'enveloppe, on a bien la condition

$$\frac{dx_0}{\alpha} = \frac{dy_0}{\beta}.$$

II. *Courbure de l'enveloppe.* — Le rayon de courbure est donné par $R = \frac{ds}{d\theta}$. Les deux termes de la fraction sont connus en fonction de dx, dy, α, β, $d\alpha$, $d\beta$. Il existe une formule importante reliant le rayon de courbure aux cosinus directeurs α', β' de la normale, le sens positif sur la normale étant celui qui va vers le centre de courbure. La condition $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donne par différenciation

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0,$$

qui montre que $d\alpha$ et $d\beta$ sont proportionnels à α' et β'. On a d'autre part

$$d\theta = \alpha.d\beta - \beta.d\alpha = \frac{ds}{R}$$

Ajoutons ces deux égalités après élévation au carré :

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{ds^2}{R^2},$$

qui, comparée à $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$, donne les formules cherchées

$$\alpha' = \mathrm{R}\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \beta' = \mathrm{R}\frac{d\beta}{ds}.$$

III. *Trajectoires orthogonales.* — Ecrivons que (x, y) décrit une courbe orthogonale à la droite, c'est-à-dire que dx, dy est un déplacement perpendiculaire à la droite :

$$\alpha(dx_0 + r.d\alpha + \alpha.dr) + \beta(dy_0 + r.d\beta + \beta.dr) = 0$$

ou

$$\alpha.dx_0 + \beta.dy_0 + dr = 0.$$

Si en particulier le point (x_0, y_0) décrit l'enveloppe, on trouve aisément, en introduisant l'arc ds_0 de l'enveloppe,

$$ds_0 + dr = 0$$

ou, en intégrant après un choix convenable de l'origine et du sens pour les arcs s_0,

$$s_0 + r = 0,$$

ce qui montre comme on devait s'y attendre que les trajectoires orthogonales sont des développantes de l'enveloppe de leurs normales.

IV. *Arc d'une trajectoire.* — Cherchons l'élément d'arc ds de la trajectoire que décrit un point (x, y) quelconque de la droite. On a

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx_0 + r.d\alpha + \alpha.dr)^2 + (dy_0 + r.d\beta + \beta.dr)^2 \\ &= dx_0^2 + dy_0^2 + r^2(d\alpha^2 + d\beta^2) + dr^2 + 2r(dx_0.d\alpha + dy_0.d\beta) + 2dr(\alpha dx_0 + \beta dy_0). \end{aligned}$$

Si l'on suppose que (x_0, y_0) décrit l'enveloppe, on a, en tenant compte des calculs qui précèdent, de nombreuses simplifications et il reste :

$$ds^2 = ds_0^2 + r^2\frac{ds_0^2}{\mathrm{R}^2} + dr^2 + 2dr.ds_0 = (ds_0 + dr)^2 + r^2\frac{ds_0^2}{\mathrm{R}^2}.$$

En particulier, cette formule donne pour l'élément d'arc d'une trajectoire orthogonale (en tenant compte de $ds_0 + dr = 0$)

$$ds = r\frac{ds_0}{\mathrm{R}} = r.d\theta$$

que l'on peut d'ailleurs vérifier géométriquement.

V. *Variation de longueur d'un segment.* — Nous allons établir une formule très importante en introduisant les angles de la droite mobile avec les trajectoires de deux de ses points, par exemple x_0, y_0 et x, y. Prenons pour angle V_0 l'angle de la direction x_0, y_0 ; x, y avec la direction des arcs croissants s_0 sur la trajectoire de x_0, y_0, le sens ainsi considéré sur la droite étant celui qui sert déjà à compter r. Prenons pour V l'angle de la direction x, y ; x_0, y_0 inverse de la précédente avec le sens des arcs s croissants sur la trajectoire de x, y. Remarquons enfin que l'angle V de deux directions de cosinus directeurs α, β; α', β' est donné par $\cos \mathrm{V} = \alpha.\alpha' + \beta.\beta'$. On a donc ici

$$\cos \mathrm{V}_0 = \alpha\frac{dx_0}{ds_0} + \beta\frac{dy_0}{ds_0}.$$

ou encore,

$$ds_0.\cos \mathrm{V}_0 = \alpha.dx_0 + \beta.dy_0,$$

et de même

$$\begin{aligned} ds.\cos \mathrm{V} &= -(\alpha.dx + \beta.dy) = -(\alpha(dx_0 + r.d\alpha + \alpha.dr) + \beta(dy_0 + r.d\beta + \beta dr) \\ &= -ds_0.\cos \mathrm{V}_0 - dr. \end{aligned}$$

On a donc la formule

$$dr = -ds.\cos \mathrm{V} - ds_0.\cos \mathrm{V}_0.$$

Ses applications sont très nombreuses. Par exemple si (x_0, y_0) décrit l'enveloppe, on a $\cos V_0 = 1$. Si l'on suppose en outre que (x, y) décrit une trajectoire orthogonale, on a $\cos V = 0$ et la formule devient

$$dr + ds = 0,$$

résultat déjà obtenu précédemment.

Si l'on suppose que (x_0, y_0) et (x, y) décrivent deux trajectoires orthogonales, on trouve $dr = 0$ ou $r = C^{te}$, ce qui est une propriété connue des courbes parallèles, propriété d'ailleurs identique à celle qui précède, sur les développantes.

Cette formule permet encore de construire la tangente en un point d'une courbe définie en coordonnées bipolaires par ses distances à deux courbes fixes : $f(r, r') = 0$. En désignant par V et V' les angles avec la tangente au lieu et par ds l'élément d'arc du lieu, on a

$$dr = -ds.\cos V, \qquad dr' = -ds.\cos V'.$$

D'autre part l'équation du lieu en coordonnées bipolaires donne

$$f'_r.dr + f'_{r'}.dr' = 0$$

et, par élimination de dr et dr', on a

$$f'_r.\cos V + f'_{r'}.\cos V' = 0.$$

On en déduit aisément la construction classique qui suit : On porte sur le rayon vecteur r, à partir du point du lieu, et sur le rayon vecteur r', à partir du même point, des segments proportionnels aux valeurs algébriques de f'_r et $f'_{r'}$ et l'on cherche leur somme géométrique : elle donne la direction de la normale.

VI. *Aire balayée par un segment.* — Désignons par dA la différentielle de l'aire balayée par le segment qui va de (x_0, y_0) à (x, y). Si l'on considère le quadrilatère formé par deux positions infiniment voisines de ce segment, il a pour sommets : x_0, y_0 ; $x_0 + dx_0$, $y_0 + dy_0$ d'une part et x, y ; $x + dx$, $y + dy$ d'autre part. Décomposons-le en deux triangles en joignant par exemple x_0, y_0 et $x + dx$, $y + dy$. On a

$$2.dA = (r + dr)ds_0.\sin(V_0 - d\theta) + r.ds.\sin V$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$2.dA = r(ds_0.\sin V_0 + ds.\sin V),$$

qui est la formule cherchée.

Appliquons par exemple cette formule à l'évaluation de l'aire comprise entre deux courbes fermées parallèles. On a ici : $2dA = r(ds_0 + ds)$. Mais en tenant compte de la formule qui donne l'arc d'une trajectoire orthogonale, on trouve

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

qui, pour une courbe fermée, donne $A = \pi r^2$.

Si le point (x_0, y_0) décrit l'enveloppe, il est aisé de voir que l'on a aussi la formule

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Si par exemple on cherche le point de contact avec son enveloppe d'une corde détachant sur une courbe donnée un segment d'aire constante on trouve en désignant par r et r' les deux segments de cette corde de part et d'autre du point de contact :

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r'^2 d\theta$$

et l'on voit que ce point est au milieu de la corde considérée.

VII. *Extensions à l'espace.* — La plupart des propriétés qui précèdent peuvent s'étendre à l'espace.

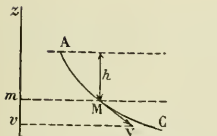
Par exemple les formules donnant α' et β' sont encore exactes et donnent ici les trois cosinus directeurs de la normale principale à une courbe gauche en fonction du rayon de courbure. Les développantes de courbes gauches donnent des formules et des résultats de tous points comparables. Ces formules se prêtent encore à l'étude d'une surface réglée engendrée par une droite mobile dans l'espace. Signalons, pour terminer, la formule qui exprime que la surface a même plan tangent tout le long d'une même génératrice, c'est-à-dire que la surface est développable :

$$dx(\beta.d\gamma-\gamma.d\beta)+dy(\gamma.d\alpha-\alpha.d\gamma)+dz(\alpha.d\beta-\beta.d\alpha)=0.$$

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours spéciaux*).

Concours de 1908.

1723. — *On demande de déterminer une courbe plane* AC *par la condition suivante :*



La courbe étant supposée tracée dans un plan vertical, et un point pesant, partant de la position initiale A, *étant astreint à la suivre, on veut que la vitesse* MV *de ce point ait une projection* mv *de grandeur constante sur la verticale.*

On sait que la vitesse v *d'un point pesant est liée à sa vitesse initiale* v_0 *par la relation* $v^2=v_0^2+2gh$,
h *désignant la hauteur de chute, c'est-à-dire la distance verticale qui sépare la position initiale* A *du point mobile de sa position* M *à l'instant considéré.*

Nous supposons que l'axe Ox est horizontal, et l'axe Oz vertical et dirigé vers le haut. Soient (x_0, z_0) les coordonnées de la position initiale A et v_0 la vitesse initiale. Le théorème des forces vives nous donne

$$v^2-v_0^2=2g(z_0-z),$$

ou, en remplaçant v^2 par $\dfrac{dx^2+dz^2}{dt^2}$,

$$\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}=v_0^2+2gz_0-2gz. \tag{1}$$

Mais, par hypothèse, on a $\dfrac{dz}{dt}=k$, k désignant une constante. Nous en tirons $dt=\dfrac{dz}{k}$, et si nous remplaçons dt par cette valeur dans la relation (1), nous obtenons

$$k^2\left(\frac{dx^2}{dz^2}+1\right)=v_0^2+2gz_0-2gz,$$

ou

$$kdx=\pm\sqrt{v_0^2+2gz_0-k^2-2gz}\,dz.$$

L'intégration est alors immédiate et nous donne

$$kx+C=\pm\frac{(v_0^2+2gz_0-k^2-2gz)^{\frac{3}{2}}}{3g},$$

ou, en élevant au carré,

$$9g^2(kx+C)^2=(v_0^2+2gz_0-k^2-2gz)^3.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée. La constante C est déterminée en écrivant que la courbe passe au point A, ce qui donne

$$9g^2(kx_0+C)^2=(v_0^2-k^2)^3.$$

Pour construire la courbe, on peut transporter l'origine au point qui a pour coordonnées

$$x = -\frac{C}{k}, \qquad z = \frac{v_0^2 + 2gz_0 - k^2}{2g};$$

l'équation devient

$$9k^2x^2 = -8gz^3,$$

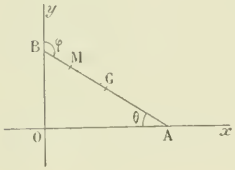
et la courbe est aisée à construire. La nouvelle origine est un point de rebroussement, où la tangente est verticale.

Charles GUILLERME, lycée de Bourg.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Rennes; Benoit-Gonin; G. Bouligand, lycée de Nantes; J. Desbats, lycée de Bordeaux; G. Fourcy, à Reims; G. Lach, à Denain; Louis Montaut, lycée d'Alger; R. Manen, à Albi; Jean Mourret; Eugène Silbermann, à Zurich; L. Simon, à Châlons; Louis Sirp, à Lyon.

1724. — *Mouvement d'une barre homogène pesante* AB *de masse* m *et de longueur* $2l$, *qui glisse sans frottement dans le plan* xOy *sur une droite horizontale fixe* Ox *et une droite verticale fixe* Oy. *On prendra comme inconnue l'angle* $BAO = \theta$.

La position de la barre dépend du seul paramètre θ; par suite, pour étudier le mouvement, une seule équation suffit; elle nous sera fournie par le théorème des forces vives. Soit M un point quelconque de la barre; posons $BM = \lambda$. Les coordonnées du point M sont



$$x = \lambda \cos\theta, \qquad y = (2l - \lambda)\sin\theta;$$

nous en tirons

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda \sin\theta \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = (2l - \lambda)\cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

et, en désignant par v la vitesse du point M,

$$v^2 = [\lambda^2 + 4l(l - \lambda)\cos^2\theta]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \int_0^{2l} [\lambda^2 + 4l(l - \lambda)\cos^2\theta]d\lambda,$$

ρ désignant la densité linéaire de la barre, ou

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{4l^3}{3}\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

D'autre part, le centre de gravité G de la base a pour ordonnée $l \sin\theta$; la masse de la barre est égale à $2l\rho$. Il en résulte que le travail de la pesanteur pour un déplacement infiniment petit est égal à $-2l^2\rho g \cos\theta d\theta$.

Le théorème des forces vives nous donne l'équation

$$d.\frac{4l^3}{3}\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -2l^2\rho g \cos\theta d\theta,$$

et en intégrant nous avons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2l}(h - \sin\theta),$$

la constante h étant définie par les conditions initiales,

$$h = \frac{2l}{3g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0^2 + \sin\theta_0.$$

On en déduit

$$dt = \pm\sqrt{\frac{2l}{3g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{h - \sin\theta}};$$

c'est une intégrale elliptique.

Prenons comme variable l'angle $ABy = \varphi$, nous avons $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$, et l'équation précédente devient

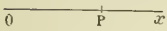
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2l}(h + \cos\varphi).$$

On en conclut que l'angle φ varie comme l'angle d'écart d'un pendule simple de longueur $\frac{4l}{3}$.

Le mouvement est oscillatoire si h est compris dans l'intervalle $(-1, +1)$, et révolutif si h est extérieur à cet intervalle.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines; Esteben, à Bordeaux; G. Foucay, à Reims.



1725. — *Mouvement sur la droite Ox d'un point P attiré par l'origine proportionnellement à la distance et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse.*

Soit x l'abscisse du point P; la force attractive qui sollicite ce point est dirigée suivant la droite Ox et a pour valeur algébrique $X = -mk^2x$, m désignant la masse du point P. D'autre part, la résistance est proportionnelle à la vitesse $\frac{dx}{dt}$ et dirigée en sens contraire; donc sa valeur algébrique peut être mise sous la forme $-2mh\frac{dx}{dt}$, h étant une constante positive.

L'équation du mouvement est donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2x - 2mh\frac{dx}{dt},$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0,$$

et différents cas sont à examiner suivant la nature des racines de cette équation.

Premier Cas. $h^2 - k^2 > 0$.

L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives α et β $(\alpha < \beta)$, et l'intégrale générale de l'équation différentielle est

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}.$$

Pour déterminer les constantes A et B, écrivons que pour $t = 0$ x est égal à x_0 et $\frac{dx}{dt}$ à v_0; nous avons les équations

$$x_0 = A + B, \qquad v_0 = A\alpha + B\beta.$$

Nous en tirons

$$A = -\frac{v_0 - \beta x_0}{\beta - \alpha}, \qquad B = \frac{v_0 - \alpha x_0}{\beta - \alpha},$$

et par suite

$$x = \frac{1}{\beta - \alpha}[(v_0 - \alpha x_0)e^{\beta t} - (v_0 - \beta x_0)e^{\alpha t}],$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\beta - \alpha}[\beta(v_0 - \alpha x_0)e^{\beta t} - \alpha(v_0 - \beta x_0)e^{\alpha t}].$$

On peut toujours supposer $x_0 > 0$, cela revient à choisir convenablement la direction positive de l'axe Ox.

Cela posé, cherchons si la vitesse peut s'annuler pour une valeur positive de t. On doit avoir

$$e^{(\beta-\alpha)t} = \frac{\alpha(v_0 - \beta x_0)}{\beta(v_0 - \alpha x_0)};$$

pour que cette équation ait une racine positive, il faut que le second membre soit supérieur à 1, ce qui donne la condition

$$\frac{\alpha(v_0 - \beta x_0)}{\beta(v_0 - \alpha x_0)} - 1 > 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{(\alpha - \beta)v_0}{\beta(v_0 - \alpha x_0)} > 0,$$

ou, comme β et $\alpha - \beta$ sont négatifs,

$$v_0(v_0 - \alpha x_0) > 0,$$

ce qui revient à dire que v_0 doit être extérieur à l'intervalle $(\alpha x_0, 0)$.

1° $-\infty < v_0 < \alpha x_0$. La vitesse v s'annule pour une valeur positive de t, soit t_1, et change de signe. On en déduit le tableau suivant :

t	0		t_1		$+\infty$
v	v_0	$-$	0	$+$	
x	x_0	décroît	x_1	croît	0

Comme pour $t = +\infty$ x est nul, on voit que la valeur x_1 correspondant à $t = t_1$ est négative.

Le point P part de P_0 dans le sens négatif, atteint le point P_1 ($x = x_1$), et se déplace ensuite dans le sens positif vers le point O où il n'arrive qu'en un temps infini.

2° $\alpha x_0 < v_0 < 0$. La vitesse v est sans cesse négative ; x décroît de x_0 à 0. Le point P se dirige du point P_0 vers le point O où il arrive en un temps infini.

3° $v_0 > 0$. La vitesse v s'annule pour une valeur positive de t, soit t_1.

t	0		t_1		$+\infty$
v	v_0	$+$	0	$-$	
x	x_0	croît	x_1	décroît	0

On en déduit aisément le mouvement du point P.

Deuxième Cas. $h^2 - k^2 = 0$.

L'équation caractéristique admet la racine double négative $-h$, et l'intégrale générale de l'équation différentielle est

$$x = (A + Bt)e^{-ht}.$$

On trouve aisément

$$A = x_0, \qquad B = v_0 + hx_0,$$

et, par suite,

$$x = [x_0 + (v_0 + hx_0)t]e^{-ht},$$

et

$$v = \frac{dx}{dt} = [v_0 - h(v_0 + hx_0)t]e^{-ht}.$$

Pour que la vitesse s'annule pour une valeur positive de t, il faut qu'on ait $v_0(v_0 + hx_0) > 0$.

On aura donc trois hypothèses à faire successivement : $v_0 < -hx_0$, $-hx_0 < v_0 < 0$, $v_0 > 0$, et on aura une discussion analogue à la précédente.

Troisième Cas. $h^2 - k^2 < 0$.

L'équation caractéristique admet deux racines imaginaires conjuguées $-h \pm \mu i$ $(\mu^2 = k^2 - h^2)$, et l'intégrale générale de l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$x = e^{-ht}[A \cos \mu t + B \sin \mu t].$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht}[(B\mu - Ah)\cos \mu t - (A\mu + Bh)\sin \mu t].$$

Remarquons que la vitesse s'annule périodiquement. Pour simplifier la discussion, nous prendrons pour origine des temps le moment où la vitesse s'annule pour la première fois. Soit P_0 la position du point à cet instant, et x_0 l'abscisse de ce point. Nous avons alors

$$x = e^{-ht}\left(x_0 \cos \mu t + \frac{hx_0}{\mu} \sin \mu t\right),$$

et

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{x_0(h^2 + \mu^2)}{\mu} e^{-ht} \sin \mu t.$$

Le mobile partant de P_0 se dirige vers le point O et décrit un segment P_0P_1 ; il arrive en un point

P_1 où la vitesse s'annule, au temps $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$, l'abscisse de ce point étant $x_1 = -x_0 e^{-\frac{h\pi}{\mu}}$. Le mobile revient ensuite sur ses pas jusqu'au point P_2, au temps $t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$, $x_2 = +x_0 e^{-\frac{2h\pi}{\mu}}$, et ainsi de suite. Les points P_1, P_2,... se rapprochent du point O, et les oscillations sont isochrones.

Louis SIRE, à Lyon.

Solutions incomplètes par MM. Jean Bing, élève à l'école nationale supérieure des mines ; G. Esteben, à Bordeaux : G. Foucay, à Reims ; L. Simon, à Châlons.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1721. — *On considère une famille de cercles* (C) *homothétiques par rapport à l'origine et ayant leurs centres sur* Oy.

1° *Trouver les trajectoires orthogonales* (T) *de ces courbes.*

2° *Construire les différentes formes que peuvent prendre ces courbes.*

3° *Condition pour que les courbes* (T) *soient algébriques ; elles sont alors unicursales ; trouver leur degré.*

4° *Construire les développées de ces courbes. Elles sont algébriques et unicursales en même temps que les courbes* (T). *Trouver leur degré.*

5° *Si l'on fait tourner chaque trajectoire orthogonale autour de la ligne des centres d'un angle variant suivant une loi arbitraire quand on passe d'une trajectoire à une autre, la surface obtenue coupe le plan de chaque trajectoire sous un angle constant.*

1° On peut d'abord voir, de deux façons différentes, que la détermination des courbes (T) se ramène nécessairement à une quadrature. Cela résulte en effet de ce que les courbes (C) sont homothétiques et

aussi de ce que ce sont des cercles ayant leurs centres en ligne droite (voir deux notes insérées dans la Revue, p. 68, 69). Cette remarque nous donne en même temps deux méthodes pour trouver les courbes (T). Nous allons employer celle qui sert à déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles (voir note citée) et qui n'est autre que celle utilisée par M. Cotty dans sa solution de la question 1635. Soit m le rapport constant et positif du rayon d'un cercle (C) à la distance de son centre I à l'origine. Si α désigne l'ordonnée du point I, les coordonnées d'un point quelconque M du cercle considéré peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} x = m\alpha\cos\varphi, \\ y = \alpha(1 + m\sin\varphi), \end{cases}$$

où φ désigne l'angle polaire de la demi-droite IM ou de la demi-droite MI, suivant le signe de α. Si l'on fait varier α et φ en les faisant dépendre d'un seul et même paramètre, le point M décrira une certaine courbe. Pour que cette courbe soit une trajectoire orthogonale des cercles (C), il faut et suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{dx}{\cos\varphi} = \frac{dy}{\sin\varphi}$$

ou

$$(3)\qquad [m\cos\varphi.d\alpha - m\alpha\sin\varphi.d\varphi]\sin\varphi - [d\alpha(1 + m\sin\varphi) + m\alpha\cos\varphi.d\varphi]\cos\varphi = 0,$$

ou

$$(4)\qquad m\alpha.d\varphi + \cos\varphi.d\alpha = 0,$$

équation qui s'intègre bien par une quadrature :

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -m\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

D'où

$$\log(\pm\alpha) = \log C - m\log\left[\pm\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

ou

$$(5)\qquad \alpha = \pm\frac{C}{\left[\pm\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^m},$$

C désignant une constante arbitraire.

En portant cette valeur de α dans les équations (1), on aura les équations paramétriques d'une courbe (T). En faisant varier C, on aura toutes les courbes (T). On voit qu'elles sont toutes homothétiques, comme on le savait *a priori*.

2° Nous allons nous borner à construire la courbe (T) obtenue en donnant à C la valeur un et en prenant le signe + devant le second membre de (5), les autres courbes se déduisant de celle-là par homothétie.

Il nous faut faire varier l'angle φ dans un intervalle de 2π, par exemple de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{3\pi}{2}$. Mais si l'on change φ en $\pi - \varphi$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ se change en $-\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et si l'on convient de conserver le double signe qui se trouve devant cette tangente, on peut dire que α ne change pas. En se reportant aux équations (1), on voit alors que x se change en $-x$ et que y ne change pas. Ceci indique une symétrie par rapport à Oy (évidente *a priori*), et nous permet de réduire l'intervalle de variation de φ, de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Quant au double signe de $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, nous pouvons encore nous en débarrasser. Si m est incommensurable ou de la forme $\frac{2p+1}{2q}$, il faut prendre le signe + pour avoir des points réels. Si m est de la forme $\frac{p}{2q+1}$, nous pouvons ne prendre que le signe +, car

en prenant le signe — on retomberait sur le même arc de courbe ou sur l'arc de courbe symétrique par rapport à l'origine, suivant que p est pair ou impair. En résumé, nous allons construire la courbe (T') décrite par le point de coordonnées

$$x = \frac{\cos\varphi}{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m}, \qquad y = \frac{1+m\sin\varphi}{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m}, \tag{6}$$

quand φ croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; nous prendrons sa symétrique par rapport à Oy, et nous aurons une courbe (T). En faisant ensuite toutes les homothéties de centre O, nous aurons toutes les courbes (T_1).

Arrivons donc à la construction de la courbe (T)'. En nous servant de (3) et (4), nous avons immédiatement

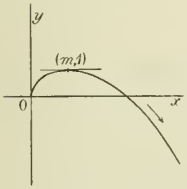
$$dx = m(\cos\varphi.d\alpha - \alpha\sin\varphi.d\alpha) = -m\alpha(m+\sin\varphi).d\varphi, \tag{7}$$

puis

$$dy = dx\operatorname{tg}\varphi = -m\alpha(m+\sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi.d\varphi. \tag{8}$$

Comme α reste positif dans l'intervalle considéré, il nous suffit d'avoir le signe de $(m+\sin\varphi)$. D'où deux cas à distinguer :

1er *cas :* $m > 1$. — Alors $(m+\sin\varphi)$ est toujours plus grand que 0. On peut immédiatement dresser le tableau suivant :

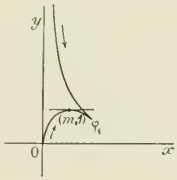


φ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
x	$+\infty$	décroît	m	décroît	0
y	$-\infty$	croît	1	décroît	0

Si l'on remarque que l'angle polaire de la demi-tangente positive au point de paramètre φ est l'angle φ lui-même, si l'on choisit un sens de parcours convenable comme sens positif, on peut de suite construire la courbe (T)', qui a la forme ci-dessus.

2e *cas :* $m < 1$. — Alors $(m+\sin\varphi)$ change de signe pour $\sin\varphi = -m$. Soit φ_1 la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 qui remplit cette condition. Le point correspondant sera un point de rebroussement, comme le montre le tableau suivant :

φ	$-\frac{\pi}{2}$		φ_1		0		$+\frac{\pi}{2}$
x	0	croît	x_1	décroît	m	décroît	0
y	$+\infty$	décroît	y_1	croît	1	décroît	0



d'où l'on déduit la courbe ci-contre.

3° Posons $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = t$. Nous avons alors

$$x = \frac{2mt^{1-m}}{1+t^2}, \qquad y = \frac{(1-m)+(1+m)t^2}{(1+t^2)t^m}, \tag{9}$$

formules qui permettraient aussi très aisément de construire la courbe.

Pour que la courbe soit algébrique, il faut évidemment que x par exemple soit une fonction algébrique du rapport $\frac{x}{y}$, et par suite de t, puisque $\frac{x}{y}$ est algébrique en t. Ceci exige que m soit commensurable. Cette condition nécessaire est suffisante. En effet, soit $\frac{p}{q}$ la fraction irréductible qui est

alors égale à m. Posons $t = \theta^q$; les équations (9) deviennent

$$x = \frac{2m\theta^{(q-p)}}{1+\theta^{2q}}, \qquad y = \frac{(1-m)+(1+m)\theta^{2q}}{(1+\theta^{2q})\theta^p}, \tag{10}$$

formules qui montrent que la courbe est non seulement algébrique, mais unicursale.

Pour avoir son degré, coupons par une droite quelconque $ux+vy+w=0$. Nous obtenons l'équation en θ suivante :

$$u.2m.\theta^q + v[1-m+(1+m)\theta^{2q} + w\theta^p(1+\theta^{2q}) = 0, \tag{11}$$

équation de degré $p+2q$ et qui, sauf le cas de $m=1$, n'admet que des racines variables avec u, v, w et donnant des points distincts sur la courbe (T). Donc, à part le cas de $m=1$, la courbe est de degré $p+2q$.

Si $m=1$, l'équation (11), débarrassée de sa racine nulle, se réduit au second degré. Mais les formules (6) et (9) montrent que la courbe (T) est un cercle tangent en O à Oy, ce qui est d'ailleurs évident géométriquement.

4° La mesure algébrique R du rayon de courbure sur la demi-droite d'angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$ est donnée par exemple par la formule $dx = \mathrm{R}\cos\varphi\, d\varphi$.

En tenant compte de (7), nous avons immédiatement $\mathrm{R} = -\dfrac{m\alpha(m+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$.

Les coordonnées du centre de courbure sont alors

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - \mathrm{R}\sin\varphi = \frac{m\alpha(1+m\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{my}{\cos\varphi}, \\ y_1 &= y + \mathrm{R}\cos\varphi = (1-m^2)\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Telles sont les équations paramétriques de la développée.

Pour la construire, il y a lieu de faire d'abord les mêmes remarques préliminaires que pour la construction de la courbe (T).

Les variations de y_1 sont évidentes. Pour celles de x_1, nous avons

$$dx_1 = \frac{\cos\varphi.dy + y\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = m(1-m^2).\frac{\alpha.\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi. \tag{13}$$

Ceci permet de dresser les tableaux de variation suivants :

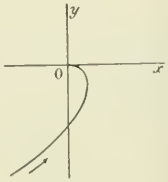
1er cas. $m > 1$.

φ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
x	$-\infty$	cr.	m	déc.	0
y	$-\infty$	cr.	$1-m^2$	cr.	0

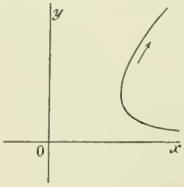
2e cas. $m < 1$.

φ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
x	$+\infty$	déc.	m	cr.	$+\infty$
y	$+\infty$	déc.	$1-m^2$	déc.	0

d'où les deux formes de courbe obtenues en remarquant qu'au point de paramètre φ, la tangente a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$.



$m > 1$.



$m < 1$.

En posant $\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=t$, on verrait, comme pour la courbe (T), que la développée est algébrique dans le cas où m est commensurable et dans ce cas seulement. En supposant $m=\frac{p}{q}$ et posant ensuite $t=\theta^q$, on obtient

$$x_1=\frac{m}{2}\,\frac{(1-m)+(1+m)\theta^{2q}}{\theta^{p+q}},\qquad y_1=\frac{(1-m^2)}{\theta^p},$$

ce qui montre que la courbe est alors unicursale. En coupant par une droite quelconque, on obtient l'équation

$$u\frac{m}{2}[1-m+(1+m)\theta^{2q}]+v(1-m^2)\theta^q+w\theta^{p+q}=0.$$

Cette équation nous montre que le degré de la développée est $p+q$ si $m>1$ et $2q$ si $m<1$.

Si $m=1$, on a $x_1=1$, $y_1=0$; la développée se réduit à un point, ce qui concorde bien avec ce qui a été déjà vu.

5° Supposons maintenant trois axes de coordonnées rectangulaires OXYZ. Traçons dans le plan passant par OZ et qui a pour angle polaire u, la courbe (T) pour laquelle la constante C a pour valeur $f(u)$, $f(u)$ désignant une fonction quelconque de u. Nous supposons de plus que dans ce plan l'axe OZ joue le rôle de Oy et la trace sur XOY joue le rôle de Ox. Quand u varie, la courbe ainsi tracée engendre une certaine surface S. dont les équations paramétriques sont

$$X=x.f(u)\cos u=\frac{m\cos v}{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m}\cdot f(u)\cos u,$$

$$Y=x.f(u)\sin u=\frac{m\cos v}{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m}\cdot f(u)\sin u,\qquad Z=y\,f(u)=\frac{1+m\sin v}{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m}\cdot f(u).$$

Soient (a, b, c) les cosinus directeurs de la normale à S au point (u, v). Il faut montrer que la quantité $A=-a\sin u+b\cos u$ est indépendante de v.

Or, en écrivant successivement que la normale est perpendiculaire aux tangentes des courbes $v=c^{te}$ et $u=c^{te}$, on obtient

$$x[Af(u)+Bf'(u)]+yf'(u).c=0, \tag{14}$$

$$B\frac{dx}{dv}+c\frac{dy}{dv}=0, \tag{15}$$

en posant

$$B=a\cos u+b\sin u. \tag{16}$$

Mais, en tenant compte de (2), l'équation (15) devient $B=-c\operatorname{tg}v$.

En portant cette valeur dans (14), on a $Af(u)=c.f'(u)\left[-\frac{y}{x}+\operatorname{tg}v\right]=-\frac{cf'(u)}{m\cos v}$.

Tout revient donc à montrer que $\frac{c}{\cos v}$ ne dépend que de u. Or, on a la troisième équation

$$A^2+B^2+c^2=1,\qquad \text{ou}\qquad \frac{c^2}{\cos^2 v}\cdot\frac{f'^2}{m^2f^2}+c^2\operatorname{tg}^2 v+c^2=1,$$

ou

$$\frac{c^2}{\cos^2 v}\left[\frac{f'^2}{m^2f^2}+1\right]=1,$$

ce qui démontre bien la propriété annoncée.

Remarque. — Disons pour terminer cette question que toutes les remarques faites par M. Durand au sujet de la question 1635, s'appliquent visiblement aux courbes (T) que nous venons d'étudier.

J. HAAG.

CONCOURS DE 1909 (*Suite*).

ECOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

1787. — Étant donnée la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ de la variable réelle x.

1. Etudier les variations de cette fonction et les représenter par une courbe.

2. Calculer l'intégrale indéfinie $\int y\,dx$.

3. Soit $F(x)$ l'une quelconque des fonctions primitives de y :
Trouver trois constantes P, Q, R, telles que la fonction

$$\Phi(x) = F(x) - Px^2 - Qx - R\log.|x|$$

reste finie lorsque x devient infini, et prouver qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs des constantes P, Q, R satisfaisant à cette condition.

Nota. — La notation $\log|x|$ désigne le logarithme népérien de la valeur absolue de x.

4. Les constantes P, Q, R étant celles qui satisfont à la condition précédente, et $F(x)$ désignant la fonction $F(x) = \int_3^x y\,dx$, déterminer, d'une manière précise, ce que devient la fonction $\Phi(x)$, lorsque x devient infini.

(*1er juin, de 7 h. à 11 h.*)

Géométrie analytique et Mécanique.

1788. — On considère une hélice (H) tracée sur un cylindre de révolution ayant Oz pour axe. Soit a le rayon du cercle de base et h le pas réduit, c'est-à-dire que $2\pi h$ est la longueur interceptée par deux spires consécutives sur toute génératrice du cylindre. Sur l'hélice (H) on prend deux points L et N, et l'on considère le centre de gravité G de l'*arc* LN supposé homogène.

1. On suppose que l'arc LN varie en conservant le même milieu M.
Démontrer que, dans ces conditions, le point G décrit une droite rencontrant normalement Oz.

2. On demande le lieu du point G, quand l'arc LN varie de telle manière que la *corde* LN reste parallèle à un plan fixe quelconque.

3. Appelons (S) la surface lieu du point G lorsque L et N varient arbitrairement sur l'hélice. Montrer que le plan tangent en G à la surface (S) n'est autre que le plan π mené par les extrémités L, N de l'arc et par son milieu M.
Comment varie ce plan tangent lorsque l'arc varie en conservant le même milieu ?

4. On suppose que chaque élément ds de l'arc LN attire un point fixe, P, proportionnellement à la distance r de ce point à l'élément et proportionnellement à la longueur ds elle-même, en sorte que l'attraction exercée par l'élément ds sur le point P a pour expression $\mu r\,ds$, où μ désigne une constante positive.
On demande de démontrer que les attractions exercées sur le point P par l'ensemble des éléments ds ont pour résultante une force linie F dirigée vers le point G.
Dire quelle est l'expression de cette résultante F.

5. Avec quelle vitesse faudrait-il lancer le point P, à partir du point L pour qu'il décrive, sous l'influence de la force F, le cercle ω qui a pour centre le point G et qui passe non seulement au point L, mais encore au point N ?

(*2 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Epure.

1789. — Ombres, au flambeau, d'une demi-sphère creuse. — Une sphère de centre o, o' et de rayon R, est coupée par son plan méridien de front ; on ne laisse subsister que la demi-sphère située du côté du plan vertical de projection.

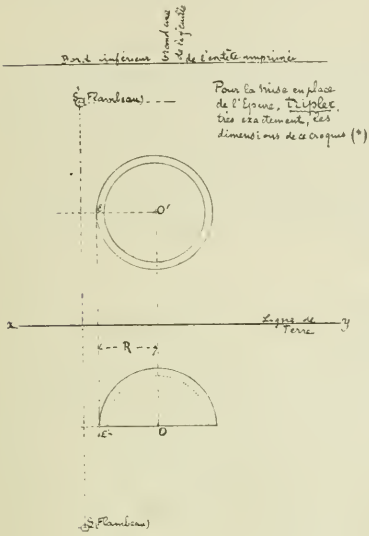
On creuse cette dernière suivant une autre demi-sphère concentrique à la première et d'un rayon tel que l'épaisseur du solide creux ainsi constitué soit ε (voir croquis).

On éclaire ce solide par un flambeau s, s' et on demande :

1° de déterminer, par ses deux projections, la séparatrice extérieure d'ombre propre du solide ;

2° de tracer les ombres portées par ce solide sur les deux plans de projection dont xy est la ligne de terre ;

3° de déterminer, par ses deux projections, l'ombre portée dans la partie creuse du solide par sa méridienne de front.



Nota. — *a*) Les lignes existantes (Limites du solide et contours apparents, ombres propres, ombres portées) seront figurées en trait noir *plein* pour les lignes vues, *ponctué* pour les lignes cachées.

b) Les parties dans l'ombre seront recouvertes de hachures bleues, fines et pas trop serrées, mais seulement si elles sont vues.

c) Les lignes de construction seront tracées en rouge.

d) Les plans des courbes planes seront mis le mieux possible en évidence et on déterminera les éléments caractéristiques des ellipses (axes, diamètres conjugués, etc.).

f) On déterminera les tangentes aux points les plus importants et, particulièrement, aux points où les lignes d'ombre portées rencontreront la ligne de terre xy.

(Pour la facilité des constructions on se servira utilement du plan de front et du plan horizontal qui passeraient par le centre de la sphère.)

(*3 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Calcul.

Dans un triangle on donne deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 548^{m},75, \qquad c = 315^{m},62, \qquad A = 66^{grades},6467.$$

1. Calculer a, B, C, à l'aide des formules $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$, $a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$.
2. Calculer la surface S en hectares.
3. Calculer le rayon du cercle inscrit.

(*3 juin, de 5 h. à 6 h.*)

Physique.

I. Télescope de Foucault.

II. Mesure du moment magnétique d'un barreau par la méthode des oscillations.

III. — **1790.** — Une bulle est soufflée avec de l'air en prenant un liquide dont la tension superficielle est exprimée par le nombre 29,4 dans le système C. G. S. Le volume de cette bulle est $33^{cm3},510$; la pression extérieure est 75,5 centimètres de mercure supposé à zéro ; la température est de 15°.

On demande : 1° le poids en grammes de l'air renfermé dans la bulle ; 2° la différence, en dynes par centimètre carré, des pressions supportées par les faces intérieure et extérieure de la bulle ; 3° l'énergie totale de la bulle en ergs et en kilogrammètres ; 4° ce qu'il arrivera si l'on vient à chauffer la bulle de 15° à T°. Ecrire, sans chercher à les résoudre, les relations entre le rayon R′ de la bulle et la pression de l'air intérieur dans ce nouvel état, en supposant (ce qui n'est pas exact) que la tension superficielle ne varie pas avec la température.

N. B. — Données : poids du litre d'air normal $1^{g},29$: coefficient de dilatation de l'air, 0,00366 : on supposera que l'air est sec et que c'est un gaz parfait.

(*1er juin, de 2 h. à 5 h.*)

(*) Le croquis remis au candidat est reproduit ici à l'échelle $\frac{2}{3}$. Ce qui a 2 comme longueur ici doit donc être exécuté à la longueur 9.

Chimie.

I. — Préparations et propriétés chimiques de l'azote pur.

II. — **1791.** — 1° Un échantillon de permanganate de potassium en poudre fine est souillé d'autres sels de potassium dénués de propriétés oxydantes et sans action sur lui. 1g,264 de ce sel, placé dans un ballon, est additionné peu à peu, à l'aide d'un entonnoir à robinet, d'un excès d'acide chlorhydrique concentré et pur (20g). On termine l'opération en portant le liquide à l'ébullition pendant quelques minutes Le chlore, qui se dégage dans la réaction (1), mêlé d'acide chlorhydrique, est dirigé dans 150 centimètres cubes d'eau distillée refroidie extérieurement. L'opération terminée on étend la solution chlorée à 200 centimètres cubes.

On dissout d'autre part 9g,90 d'anhydride arsénieux dans 100 centimètres cubes d'acide chlorhydrique concentré et pur, et l'on étend la solution à 1 litre. On prélève 10 centimètres cubes de cette solution arsénieuse qu'on additionne de quelques gouttes d'une solution sulfurique d'indigo, et l'on y fait tomber peu à peu, à l'aide d'une burette graduée, la solution chlorée en agitant constamment. On constate que la coloration bleue disparaît dès qu'on a ajouté 12,5 centimètres de solution chlorée.

On demande le titre du permanganate.

2° Une solution d'eau oxygénée est telle que 5 centimètres cubes dégagent, au contact du bioxyde de manganèse en poudre, 111,5 centimètres cubes d'oxygène. (On ne tiendra pas compte des corrections dues à la présence d'humidité, à la température et à la pression.)

On prend 5 centimètres cubes de cette eau oxygénée, on l'additionne d'un excès d'acide sulfurique à 20 % (5^{cm3}) et l'on y fait tomber, goutte à goutte, à l'aide d'une burette graduée, une solution de 6g, 32 du même permanganate que ci-dessus (1°) dans un litre d'eau distillée (2).

On demande quel est le volume de la solution manganique qui sera décoloré. (Les candidats qui n'auront pu faire la 1re partie pourront déterminer ce volume en fonction du titre t du permanganate.)

Nota. — On donne les poids atomiques : $O = 16$, $S = 32$, $H = 1$, $As = 75$, $K = 39$, $Cl = 35,5$ $Mn = 55$; le poids du litre d'air, 1g,293, la densité de l'hydrogène par rapport à l'air 0,0695.

(1) $$2MnO^4K + 16HCl = 2MnCl^2 + 2KCl + 8H^2O + 5Cl^2.$$

(2) Réaction : $$2MnO^4K + 4SO^4H^2 + 5H^2O^2 = 2SO^4Mn + 2SO^4KH + 8H^2O + 5O^2.$$

(*2 juin, de 2 h. à 4 h.*)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Concours de 1908.

1727. — *Soit un trapèze isocèle* ABCD, *où l'on a* $DA = BC$, *et où l'on connaît la longueur* $R = DA + AB + BC$ *et l'inclinaison* α *du côté* BC *sur la petite base* AB. *Déterminer le trapèze de façon que son aire* S *soit maximum.*

Soit S_1 *le maximum de* S :

1° *Calculer* S_1, *les côtés et la hauteur lorsque* $\alpha = 45°$ *et* $R = 5^m,00$.

2° *L'aire* S_1 *est une fonction de* α : *trouver la valeur de* α *qui rend* S_1 *maximum, et calculer* S_1 *pour cette valeur de* α.

Désignons $DA = BC$ par x et AB par y ; nous aurons $y + 2x = R$.

D'autre part, $DC = y + 2x \cos\alpha$, et la hauteur h est égale à $h = x \sin\alpha$; par conséquent, l'aire du trapèze est

$$S = \frac{AB + DC}{2} h, \qquad \text{ou} \qquad S = h(y + x\cos\alpha),$$

ce qui donne finalement

$$S = x\sin\alpha[R + x(\cos\alpha - 2)],$$

S est donc un trinome en x dont le premier terme est négatif et dont une racine est nulle ; ce trinome passe par un maximum pour une valeur de x égale à la demi-somme des racines, c'est-à-dire, pour $x = x_1 = \frac{R}{2(2 - \cos\alpha)}$. En outre, des considérations géométriques évidentes nous montrent que x ne peut varier que de 0 à R ; la valeur précédente est acceptable pour x et nous voyons que si x croît de 0 à x_1, S croît de 0 à $\frac{R^2 \sin\alpha}{4(2 - \cos\alpha)}$, et que, lorsque x croît de x_1 à $\frac{R}{2}$, S décroît depuis $\frac{R^2 \sin\alpha}{4(2 - \cos\alpha)}$ jusqu'à $\frac{R^2}{4} \sin\alpha \cos\alpha$.

1° Si l'on suppose $\alpha = 45°$ et $R = 5$, on a $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et
$$x_1 = \frac{5}{4 - \sqrt{2}} = \frac{5}{14}(4 + \sqrt{2}) ;$$
puis
$$S_1 = \frac{25}{28}(1 + 2\sqrt{2}).$$

On trouve alors de suite, en remarquant que $AB = 5 - 2x$ et $CD = AB + 2x_1 \cos\alpha$, le tableau suivant :

$$AD = BC = \frac{5}{14}(4 + \sqrt{2}), \qquad AB = \frac{5}{14}(6 - 2\sqrt{2}), \qquad CD = \frac{5}{14}(8 + 2\sqrt{2}),$$
$$h = \frac{5}{14}(1 + 2\sqrt{2}), \qquad \text{et} \qquad S_1 = \frac{25}{28}(1 + 2\sqrt{2}).$$

Il serait facile de calculer tous ces nombres à $\frac{1}{1000}$ près par exemple ; mais ce calcul ne me semble pas utile, ni exigé.

2° On a
$$S_1 = \frac{R^2}{4} \frac{\sin\alpha}{2 - \cos\alpha} ;$$
c'est une fonction de α que l'on doit étudier quand α croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

La dérivée de cette fonction est
$$\frac{dS_1}{d\alpha} = \frac{R^2}{4} \frac{2\cos\alpha - 1}{(2 - \cos\alpha)^2} ;$$
elle est nulle pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou 60° (en degrés) ; elle est positive avant et négative après. Donc la fonction S_1 croît d'abord, puis décroît ; elle passe par un maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et l'on a alors
$$S_1' = \frac{R^2}{4} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{12}.$$

C'est le maximum demandé.

A. DARMON.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; E. Silbermann, à Zurich ; Guillerme, à Bourg ; R. Manen, à Albi ; Montaut, à Alger ; J. Desbats, à Bordeaux ; L. Bouillon, à Auch ; A. Rousseau, à Landrecies ; P. Martin ; L. Simon.

1728. — *Trouver* $\int \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\, dx$, *où* $a > 0$.

1. Posons $\frac{x}{2a - x} = u^2$, d'où $x = \frac{2au^2}{1 + u^2}$, $dx = \frac{4au\,du}{(1 + u^2)^2}$;

l'intégrale devient $\quad J = 4a\int\frac{u^2du}{(1+u^2)^2} = 4a\int\frac{du}{1+u^2} - 4a\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$;

on connaît $\int\frac{du}{1+u^2} = \text{arc tg}\, u$; pour calculer $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$, partons de

$$d\frac{u}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du = \frac{2du}{(1+u^2)^2} - \frac{du}{1+u^2},$$

d'où

$$\frac{u}{1+u^2} = 2\int\frac{du}{(1+u^2)^2} - \text{arc tg}\, u,$$

$$\int\frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{1+u^2} + \text{arc tg}\, u\right],$$

$$J = 4a.\,\text{arc tg}\, u - 2a\left[\frac{u}{1+u^2} + \text{arc tg}\, u\right] = 2a\,\text{arc tg}\, u - \frac{2au}{1+u^2}$$

ou, en revenant à la variable x,

$$J = 2a\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{2a-x}} - \sqrt{x(2a-x)} + C.$$

2. Remarquons que pour que l'élément différentiel soit réel, il faut que

$$x(2a-x) > 0, \qquad \text{d'où} \qquad 0 < x < 2a.$$

Posons

$$x = 2a\sin^2\varphi, \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$dx = 4a\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$\frac{x}{2a-x} = \frac{2a\sin^2\varphi}{2a\cos^2\varphi} = \text{tg}^2\varphi,$$

$$J = \int\text{tg}\,\varphi\,.\,4a\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \int 4a\sin^2\varphi\, d\varphi = 2a\int(1-\cos 2\varphi)d\varphi,$$

$$J = 2a\varphi - a\sin 2\varphi + C = 2a\varphi - 2a\sin\varphi\cos\varphi + C,$$

ou

$$J = 2a\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a\sqrt{\frac{x}{2a}}\sqrt{1-\frac{x}{2a}} + C,$$

ou enfin

$$J = 2a\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}} - \sqrt{x(2a-x)} + C.$$

3. On peut encore obtenir l'intégrale de la façon suivante. On a

$$\int\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int\frac{xdx}{\sqrt{x(2a-x)}} = \int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \int\frac{(x-a)dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} + a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}},$$

$$\int\frac{(x-a)dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = -\sqrt{a^2-(x-a)^2} = -\sqrt{x(2a-x)},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x-a}{a},$$

$$J = a.\,\text{arc sin}\,\frac{x-a}{a} - \sqrt{x(2a-x)} + C.$$

Pour comparer ces trois résultats, posons

$$y_1 = 2\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \qquad (0 < y_1 < \pi)$$

$$y_2 = 2\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{2a}}, \qquad (0 < y_2 < \pi)$$

$$y_3 = \text{arc sin}\,\frac{x-a}{a}, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y_3 < +\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où $$\frac{x}{2a-x} = \operatorname{tg}^2 \frac{y_1}{2}, \qquad \frac{x}{2a} = \sin^2 \frac{y_2}{2}, \qquad \frac{x-a}{a} = \sin y_3.$$

Éliminant x entre les deux premières relations, il vient

$$\operatorname{tg}^2 \frac{y_1}{2} = \frac{2a \sin^2 \frac{y_2}{2}}{2a - 2a \sin^2 \frac{y_2}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{y_2}{2},$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{y_1}{2} \right| = \left| \operatorname{tg} \frac{y_2}{2} \right|.$$

Les arcs $\frac{y_1}{2}$, $\frac{y_2}{2}$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, leurs tangentes ayant même valeur absolue sont égales et par suite $\frac{y_1}{2} = \frac{y_2}{2}$, $y_1 = y_2$.

Faisons de même pour les deux dernières ; nous aurons

$$2a \sin^2 \frac{y_2}{2} = a(1 + \sin y_3),$$

$$\sin y_3 = 2 \sin^2 \frac{y_2}{2} - 1 = -\cos y_2,$$

ou $$\cos y_2 = -\sin y_3 = \cos\left(y_3 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Les arcs y_2 et $y_3 + \frac{\pi}{2}$ étant compris entre 0 et π, on en déduit $y_2 = y_3 + \frac{\pi}{2}$.

P. L.

Bonnes solutions : MM. Amblard ; L. Sire ; P. Martin ; A. Darmon ; C. Jacquet ; L. Simon ; J. Mourret ; G. Lach ; R. Manen ; E. Silbermann ; L. Montaut ; J. Vérots ; Ch. Guillermé ; L. Bouillon ; G. Esteben.

1729. — *Trouver à l'aide des tables de logarithmes la valeur numérique de l'intégrale*

$$J = \int_0^\alpha \cos^3 \omega d\omega, \quad \textit{pour} \quad \alpha = 53°27'11''.$$

Quelle doit être la valeur de α *pour que* J *soit égal à* $\frac{2}{3}$?

Posons $\sin \omega = u$, d'où $du = \cos \omega d\omega$, il vient

$$\int \cos^3 \omega d\omega = \int (1 - \sin^2 \omega) . \cos \omega d\omega = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} = \sin \omega - \frac{1}{3} \sin^3 \omega,$$

donc $$J = \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha.$$

Faisant le calcul avec des tables à cinq décimales, on obtient

$$\sin \alpha = 0{,}80337$$

$$\sin^3 \alpha = 0{,}5185, \qquad \frac{1}{3} \sin^3 \alpha = 0{,}17283$$

$$J = 0{,}63054$$

Pour que $J = \frac{2}{3}$, il faudrait que $\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha = \frac{2}{3}$,

$$\sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 = 0.$$

L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet comme racines $x = 1$ (racine double) et $x = -2$

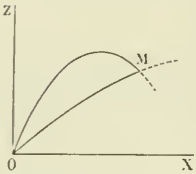
(racine simple). Il faut prendre

$$\sin \alpha = 1, \qquad \alpha = 90^\circ. \qquad \text{P.L.}$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; L. Simon, à Châlons ; C. Jacquet ; P. Martin ; Amblard, à Ruines ; Ch. Guillerme ; E. Silbermann, à Zurich

---

1730. — *Deux projectiles assimilables à de simples points matériels sont lancés d'un même point O et dans un même plan vertical ZOX à des époques données t_0 et t_1 et avec des vitesses initiales de grandeurs et de directions connues.*



On demande à quelles conditions ces données devront satisfaire pour que le second projectile rencontre le premier.

Examiner les cas particuliers qui peuvent se présenter ; déterminer notamment le lieu du point de rencontre M lorsque les vitesses initiales étant les mêmes pour les deux projectiles, la différence $(t_1 - t_0)$ est constante.

Soient t_0, v_0, α_0 les données initiales relatives au premier projectile : époque du départ, vitesse et angle de cette vitesse avec OX. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg\,;$$

elles donnent de suite

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha_0, \qquad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 - g\,(t - t_0)\,;$$

puis

$$x = v_0 \cos \alpha_0\,(t - t_0), \qquad z = v_0 \sin \alpha_0\,(t - t_0) - \frac{g}{2}\,(t - t_0)^2.$$

On a de même, pour le second mobile,

$$x_1 = v_1 \cos \alpha_1\,(t - t_1), \qquad z_1 = v_1 \sin \alpha_1\,(t - t_1) - \frac{g}{2}\,(t - t_1)^2.$$

Pour que les projectiles se rencontrent à l'époque t, il faut que l'on ait $x = x_1$, $z = z_1$ pour une même valeur de t. La première équation donne

$$\frac{t - t_0}{v_1 \cos \alpha_1} = \frac{t - t_1}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{t_1 - t_0}{v_1 \cos \alpha_1 - v_0 \cos \alpha_0}\,;$$

si $v_0 \cos \alpha_0 \neq v_1 \cos \alpha_1$, ce calcul nous fournit les valeurs de $t - t_0$ et de $t - t_1$; en portant ces valeurs dans l'équation $z = z_1$, on obtient la relation qui doit exister entre les conditions initiales pour que les deux mobiles se rencontrent :

$$(1) \qquad 2v_0v_1 \sin (\alpha_0 - \alpha_1) = g(t_1 - t_0)(v_0 \cos \alpha_0 + v_1 \cos \alpha_1).$$

Si l'on suppose $\alpha_0 = \alpha_1$, $t_0 = t_1$, elle est remplie ; les deux mobiles partent alors en même temps du point O, dans la même direction ; ils se rencontrent en un point infiniment voisin du point O. Si $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, les mobiles se meuvent tous deux sur Oz, ils se rencontrent encore, au moins théoriquement.

Lorsque $v_0 \cos \alpha_0 = v_1 \cos \alpha_1$ et $t_1 \neq t_0$, la rencontre n'a lieu qu'au bout d'un temps infini ; en réalité, elle n'a pas lieu. Si $v_0 \cos \alpha_0 = v_1 \cos \alpha_1$ et $t_1 = t_0$, on a toujours $x = x_1$, et l'équation $z = z_1$ montre que la rencontre n'a lieu qu'au point O et à l'infini.

Posons maintenant $v_0 = v_1 = v$ et $t_1 - t_0 = k$, la condition (1) deviendra

$$2v \sin (\alpha_1 - \alpha_0) = gk(\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1)$$

et elle montre que α_1 est une fonction de α_0; par conséquent, les coordonnées du point (x, y) ne dépendent que d'un paramètre, α_0, et le point décrit une ligne. Nous obtiendrons cette ligne sans faire usage de cette relation : il nous suffira d'écrire que $x = x_1$, $z = z_1$.

$$x = v \cos \alpha_0 (t - t_0), \qquad x = v \cos \alpha_1 (t - t_1),$$

$$z = v \sin \alpha_0 (t - t_0) - \frac{g}{2} (t - t_0)^2, \qquad z = v \sin \alpha_1 (t - t_1) - \frac{g}{2} (t - t_1)^2.$$

En éliminant $\cos \alpha_0$ et $\sin \alpha_0$ entre deux de ces équations et $\cos \alpha_1$, $\sin \alpha_1$ entre les deux autres, nous avons

$$x^2 + \left[z + \frac{g}{2} (t - t_0)^2\right]^2 = v^2 (t - t_0)^2, \qquad x^2 + \left[z + \frac{g}{2} (t - t_1)^2\right]^2 = v^2 (t - t_1)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{g^2}{4} (t - t_0)^4 + [gz - v^2] (t - t_0)^2 + x^2 + z^2 = 0, \qquad \frac{g^2}{4} (t - t_1)^4 + [gz - v^2] (t - t_1)^2 + x^2 + z^2 = 0.$$

Il faut éliminer t entre ces deux équations; il suffit pour cela de remarquer que l'équation

$$\frac{g^2}{4} u^2 + (gz - v^2) u + x^2 + z^2 = 0$$

admet pour racines $(t - t_0)^2$ et $(t - t_1)^2$.

Ceci nous donne

$$(t - t_0)^2 + (t - t_1)^2 = 4 \frac{v^2 - gz}{g^2},$$

$$(t - t_0)^2 (t - t_1)^2 = 4 \frac{x^2 + z^2}{g^2}, \qquad \text{ou} \qquad (t - t_0)(t - t_1) = \frac{2}{g} \sqrt{x^2 + z^2};$$

par conséquent on a de suite

$$[(t - t_0) - (t - t_1)]^2 = 4 \frac{v^2 - gz}{g^2} - \frac{4}{g} \sqrt{x^2 + z^2},$$

ou

$$\frac{4}{g} \sqrt{x^2 + z^2} = 4 \frac{v^2 - gz}{g^2} - k^2.$$

En élevant cette relation au carré, on a le lieu demandé

$$\frac{16}{g^2} (x^2 + z^2) = \frac{(4v^2 - g^2k^2 - 4gz)^2}{g^4},$$

ou

$$(2) \qquad 16g^2(x^2 + z^2) = (4v^2 - g^2k^2 - 4gz)^2.$$

On voit donc que le lieu est une parabole ayant son foyer au point O et ayant pour axe l'axe des z.

Mais il pourrait se faire que $(t - t_0)^2$ fût égal à $(t - t_1)^2$ et l'équation

$$\frac{g^2}{4} u^2 + (gz - v^2) u + x^2 + z^2 = 0$$

n'aurait plus qu'une racine acceptable; l'élimination ne pourrait pas se faire ainsi.

Dans ce cas, on a

$$2t (t_1 - t_0) = t_1^2 - t_0^2,$$

et, par suite,

$$t = \frac{t_1 + t}{2}, \qquad t - t_0 = \frac{t_1 - t_0}{2} = \frac{k}{2}.$$

En portant cette valeur dans la première équation, on trouve pour lieu

$$x^2 + z^2 + \frac{k}{2} (gz - v^2) + \frac{g^2k^2}{16} = 0;$$

c'est un cercle ayant son centre sur Oz.

Voyons maintenant si ce lieu est compatible avec les hypothèses ; pour cela écrivons

$$t = \frac{t_1 + t_0}{2}, \qquad \text{ou} \qquad t - t_0 = \frac{k}{2};$$

cela nous donne

$$\frac{kv_1 \cos \alpha_1}{v_1 \cos \alpha_1 - v_0 \cos \alpha_0} = \frac{k}{2},$$

c'est-à-dire $v_1 \cos \alpha_1 + v_0 \cos \alpha_0 = 0$, et, comme ici $v_0 = v_1$,

$$\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1 = 0.$$

La relation (1) donne en outre $\sin(\alpha_1 - \alpha_0) = 0$.

Il faut donc prendre $\alpha_1 = \alpha_0 + \pi$.

Dans ce cas, les deux mobiles décrivent la même parabole avec des sens contraires, et passent avec la même vitesse en un même point de cette parabole.

Si $t_0 < t_1$, le second mobile arrive à l'origine après le premier et ils se sont rencontrés antérieurement, à l'époque $\frac{t_0 + t_1}{2}$, en un point de cette parabole, où ils avaient, comme nous venons de le dire, des vitesses égales et opposées.

ALGÈBRE

1735. — *Montrer que si l'on effectue la division*

$$\frac{x^{3m} + x^{2m} + x^m + 1}{x^3 + x^2 + x + 1},$$

elle se fera exactement pour m impair. Si m est pair, il y aura deux cas : 1° Si m est un multiple de 4, le reste de la division sera 4, quel que soit x ; 2° si m est un multiple de 4 augmenté de 2, le reste de la division sera $2(x^2 + 1)$.

On peut écrire
$$\frac{x^{3m} + x^{2m} + x^m + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \equiv \frac{(x^{2m} + 1)(x^m + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)}.$$

Si m est impair, $x^{2m} + 1$ est divisible par $x^2 + 1$ et $x^m + 1$ par $x + 1$; la division se fait exactement.

Supposons m pair. Le reste de la division du polynome $f(x) \equiv (x^{2m} + 1)(x^m + 1)$ par le produit $(x^2 + 1)(x + 1)$ est un trinome $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ prenant les mêmes valeurs que $f(x)$ pour les valeurs -1, i et $-i$ de x.

On a donc
$$\alpha - \beta + \gamma = 4,$$
$$-\alpha + \beta i + \gamma = 2(i^m + 1),$$
$$-\alpha - \beta i + \gamma = 2[(-i)^m + 1].$$

Si m est divisible par 4, $i^m + 1$ et $(-i)^m + 1$ sont égaux à 2, et ces équations ont pour solution $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 4$.

Le reste est donc égal à 4.

Si m est un multiple de 4 plus 2, $i^m + 1$ et $(-i)^m + 1$ sont nuls ; on a $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$; le reste est $2(x^2 + 1)$.

R. BOUVAIST.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines (Cantal) ; A. Delens, lycée de Rouen ; J. Desbats, lycée de Bordeaux ; André Duby, lycée de Dijon ; E. Duhamel, à Paris ; G. Foucry, à Reims ; G. Lach, à Denain ; R. Levy-Lambert, collège Chaptal ; Paul Moraud, lycée Saint Louis ; Jean Mourret, lycée de Marseille ; A. C. Pétridi ; Joseph Plank, lycée de Clermont ; A. Rousseau, à Landrecies ; L. Simon, section normale, Châlons-sur-Marne ; Louis Sire, à Lyon ; T. V. et F. L., lycée de Poitiers ; Joseph Vérots, école des Anglais, à Lyon.

CONCOURS DE 1909

ÉCOLE CENTRALE

Géométrie analytique et mécanique.

I. — **1792**. — Donner sans démonstration : 1° la condition d'équilibre d'un solide invariable assujetti à tourner librement autour d'un axe fixe, mais sans glisser le long de cet axe. On fixe l'axe en fixant deux de ses points. 2° Le calcul des réactions de l'axe en ses deux points fixes.

Application. — On considère trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, dont l'un OZ, est vertical. Un triangle OAB rectangle et isocèle, de dimensions invariables, homogène et de poids P, peut tourner librement autour de son hypoténuse OA qui coïncide avec OY, mais sans glisser le long de OY. Les deux points O et A de l'axe sont fixes. Au sommet B est attaché un fil élastique dont l'autre extrémité est fixe en un point C de OX. On néglige le poids de ce fil qui reste rectiligne, et on suppose que sa tension est exprimée en grammes par le même nombre que celui qui exprime la longueur BC en centimètres.

On donne OA = 20 centimètres, OC = 100 centimètres et P = 225 grammes ; on demande :

1° Dans la position d'équilibre du triangle où le sommet B est au-dessous du plan horizontal XOY, de calculer la tangente de l'angle que fait le plan AOB avec le plan XOY ;

2° Dans cet état d'équilibre, de calculer les composantes suivant les axes des réactions en O et en A de l'axe OY, en supposant qu'en A la réaction est normale à cet axe.

II. — **1793**. — On considère un point M mobile dans un plan et dont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires fixes dans ce plan sont liées au temps t par les formules

$$x = a\sqrt{3}\cos^3 t, \qquad y = -2a\sqrt{2}\sin^3 t,$$

où a est une longueur positive donnée :

1° On demande de tracer la trajectoire de ce point et d'indiquer le sens du mouvement sur cette trajectoire ;

2° On demande de distinguer sur cette trajectoire les portions qui sont décrites d'un mouvement accéléré de celles qui sont décrites d'un mouvement retardé. — Construire les points de séparation ;

3° La tangente en M à la trajectoire coupe OX en P et OY en Q ; on prend sur cette tangente le point S tel que

$$\frac{\text{segment SP}}{\text{segment SQ}} = \frac{3}{8}.$$

Loi du mouvement de S ; construire sa trajectoire. Construire le vecteur accélération pour une position de S ;

4° Démontrer que le vecteur vitesse de S est perpendiculaire à SM, et qu'il est moyen proportionnel entre SM et la projection orthogonale de SO sur SM.

(*9 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Physique et chimie.

I. — Oculaire négatif d'Huygens : cas de deux verres plan-convexes de distances focales f et $f = 3f$ et dont la distance est $a = 2f$.

II. — **1794**. — Deux sphères éloignées, de rayons R_1 et R_2, sont chargées de quantités d'électricité Q_1 et Q_2 ; que deviennent leur potentiel U, la charge et la densité superficielle de chaque sphère, après les avoir réunies par un fil long et fin.

$$R_1 = 2^{cm}, \qquad Q_1 = \frac{14}{3 \times 10^9} \text{ coulombs.}$$

$$R_2 = 5^{cm}, \qquad Q_2 = \frac{50}{3 \times 10^9} \text{ coulombs.}$$

Exprimer U dans le système électrostatique et dans le système pratique.

Etablir les formules définitives avant tout calcul numérique.

III. — L'acide hydrosulfureux.

IV. — **1795.** — 1° On brûle dans l'oxygène 8s d'un hydrocarbure saturé appartenant à la série forménique, dont la formule générale est C^nH^{2n+2}. On obtient une molécule d'eau. Quelle est la formule de cet hydrocarbure ?

2° Quel volume d'oxygène faudra-t-il employer pour brûler complètement l'hydrocarbure ? Quel poids de bichromate de potassium ($Cr^2O^7K^2$) devra-t-on traiter par l'acide sulfurique concentré, employé en excès, pour l'obtenir ?

3° Quel volume de chlore serait nécessaire pour la décomposition complète de l'hydrocarbure ? Quel poids de permanganate de potassium (MnO^4K) faudrait-il faire réagir sur l'acide chlorhydrique employé en excès, pour préparer ce chlore ?

On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de pertes.

On ne fera pas les corrections de température, pression, etc.

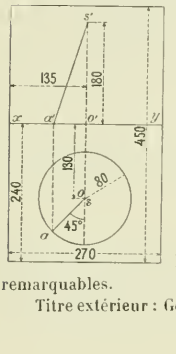
Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(9 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Epure de Géométrie descriptive.

CYLINDRE TANGENT A UN CONE ET AU PLAN HORIZONTAL.

1796. — Cadre 450mm sur 270mm. — Placer la ligne de terre xy parallèlement aux petits côtés du cadre et à 240mm du côté inférieur.



On considère :

1° Un cône de révolution d'axe vertical ; sa base située dans le plan horizontal est un cercle de 88mm de rayon ; le centre o de ce cercle est à égale distance des grands côtés du cadre et à 130mm au-dessous de xy ; le hauteur du cône est 180mm ;

2° Un cylindre de révolution de 60mm de rayon repose sur le plan horizontal par une de ses génératrices rectilignes ; il est tangent au cône en un point de la génératrice (sa, $s'a'$) et traverse le cône.

Après avoir déterminé les projections de la ligne commune aux deux surfaces, conique et cylindrique, on représentera l'ensemble des deux corps en limitant le cylindre à deux plans de section droite situés à 100mm de part et d'autre de l'axe du cône.

Dans la mise à l'encre, on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points et droites remarquables.

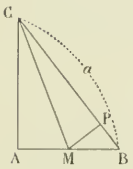
Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Cylindre tangent à un cône et au plan horizontal.

(10 juin, de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

PROBLÈME.

1797. — Soit ABC un triangle rectangle en A, dans lequel on désigne par a l'hypoténuse BC, par B l'angle ABC, par M le milieu du côté AB et par P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur l'hypoténuse BC.



1° Evaluer les longueurs MP et CP en fonction de l'hypoténuse a et de l'angle B, puis étudier la variation de la différence CP — MP de ces deux longueurs quand l'angle B varie, a restant constant.

2° Déterminer l'angle B de façon que le rapport $\frac{MP + CP}{BC}$ soit égal à un nombre donné k. Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.

3° Trouver la valeur du rapport $\frac{CM}{BC}$ dans le cas où l'angle BMC est triple de l'angle B.

CALCUL.

1798. — Calculer soit en grades, soit en degrés, trois angles aigus positifs, x, y, z, vérifiant les équations

$$\sin x = \sqrt{\frac{42538}{86864}}, \qquad \cos y = \frac{45286}{63435}, \qquad \operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 3x}{\sin 3y}.$$

(10 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 11. Août 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DE CERCLES

par M. **A. Durand**, professeur au lycée Saint-Louis.

Dans un n° précédent de la Revue (n° 4, janvier 1908), M. Haag a montré que les trajectoires orthogonales de cercles situés dans un plan et passant par un point fixe, s'obtiennent par une quadrature.

C'est un cas particulier d'un théorème plus général : il suffit d'une quadrature pour former les trajectoires orthogonales de cercles relativement auxquels un point fixe O a une puissance constante, ou, en d'autres termes, de cercles orthogonaux à un cercle fixe Γ (réel ou imaginaire).

On peut prévoir cette possibilité, en remarquant que l'équation qu'il faut intégrer est une équation de Riccati et que l'on connaît deux de ses solutions : ce sont les lieux des points de contact des tangentes au cercle variable menées de O. (Ces lieux sont un seul et même cercle, le cercle Γ, mais les deux points de contact étant distincts, les deux solutions sont différentes.)

Je vais d'ailleurs traiter la question directement et mener le calcul jusqu'au bout.

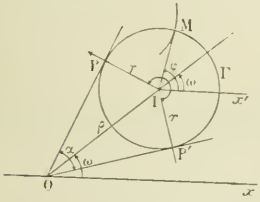
Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, l'origine étant le point O dont la puissance est constante.

1. — Supposons d'abord cette puissance positive, soit m^2. Appelons I le centre du cercle variable, r son rayon, ρ la distance OI, α l'angle que font avec OI les tangentes menées de O au cercle ; ces tangentes ont une longueur égale à m ; on aura

$$\rho = \frac{m}{\cos\alpha}, \qquad r = m \operatorname{tg}\alpha ;$$

faisons dans la suite $m = 1$.

Les coordonnées d'un point M du cercle sont :



$$x = \frac{\cos\omega}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\varphi, \qquad y = \frac{\sin\omega}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\varphi,$$

en appelant ω l'angle de OI avec Ox et φ celui de IM avec Ox.

Par hypothèse, il existe entre ω et α une relation connue. Si φ *seul* varie, M se déplace *sur le cercle*, les paramètres de ce premier déplacement sont :

$$(1) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = +\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi.$$

Si nous faisons varier α *en regardant* φ *comme une fonction (inconnue) de* α et ω comme une fonction connue de α, M se déplace sur une courbe quelconque et les paramètres de ce déplacement sont :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\alpha} = -\dfrac{\sin\omega}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{d\omega}{d\alpha} - \sin\varphi\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{d\varphi}{d\alpha} + \dfrac{\cos\omega\sin\alpha + \cos\varphi}{\cos^2\alpha} \\[2ex] \dfrac{dy}{d\alpha} = +\dfrac{\cos\omega}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{d\omega}{d\alpha} + \cos\varphi\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{d\varphi}{d\alpha} + \dfrac{\sin\omega\sin\alpha + \sin\varphi}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

Si l'on demande que les deux déplacements soient rectangulaires, il faut que

$$\frac{dx}{d\varphi}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dy}{d\varphi}\frac{dy}{d\alpha}=0,$$

ou

$$-\sin\varphi\frac{dx}{d\alpha}+\cos\varphi\frac{dy}{d\alpha}=0,$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$\operatorname{tg}\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha}+\frac{\cos(\omega-\varphi)}{\cos\alpha}\frac{d\omega}{d\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\sin(\omega-\varphi)=0.$$

Divisons par $\operatorname{tg}\alpha$, posons $\omega-\varphi=z$, d'où

$$\frac{d\omega}{d\alpha}-\frac{d\varphi}{d\alpha}=\frac{dz}{d\alpha};$$

enfin posons $\frac{d\omega}{d\alpha}=h$ (h est une fonction connue de α), l'équation devient

$$h\frac{\cos z}{\sin\alpha}+\frac{\sin z}{\cos\alpha}+h-\frac{dz}{d\alpha}=0.$$

On est amené à prendre pour variable $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$, pour rendre l'équation plus symétrique ; comme $d\beta=d\alpha$, la valeur de h ne change pas, mais h est exprimé en fonction de β (au lieu de α). On obtient ainsi l'équation

$$\left[1-\frac{\cos z}{\cos\beta}\right]h=\frac{\sin z}{\sin\beta}-\frac{dz}{d\beta}. \tag{3}$$

On aperçoit deux solutions évidentes : $z_1=+\beta$, $z_2=-\beta$: or le point pour lequel

$$\omega-\varphi=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

est le point de contact d'une des tangentes menées de O, le point pour lequel $\omega-\varphi=-\frac{\pi}{2}-\alpha$ est le point de contact de l'autre tangente. *Ce sont bien les solutions prévues.* En changeant la forme de l'équation, on l'intégrera sans peine : prenons comme variable $x=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ et comme fonction inconnue $y=\operatorname{tg}\frac{z}{2}$, h, fonction connue de β, devient une fonction connue de x, $\Pi(x)$, et par un calcul facile l'équation (3) devient

$$\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}=2\Pi(x).\frac{y^2-x^2}{1-x^2} \tag{4}$$

(elle admet les solutions $y_1=+x$, $y_2=-x$).

En écrivant l'équation sous la forme

$$2\frac{ydx-xdy}{y^2-x^2}=4\,\Pi(x)\frac{xdx}{1-x^4}, \tag{5}$$

le premier membre est la différentielle de $\mathrm{L}\frac{y+x}{y-x}$; l'intégrale cherchée est donc, en revenant aux variables primitives z et β,

$$\mathrm{L}.\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{z}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right]=\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}h(\beta)d\beta, \tag{6}$$

ou

$$\mathrm{L}\frac{\sin\frac{z+\beta}{2}}{\sin\frac{z-\beta}{2}}=\int_{\beta_0}^{\beta}\operatorname{tg}\beta\,h(\beta)d\beta.$$

II — Supposons maintenant que la puissance du point O soit négative. On peut faire un calcul tout à fait analogue, en employant les fonctions hyperboliques.

Comme $\overline{OI}^2 - r^2 = -m^2$ on pourra prendre $OI = \rho = \frac{m}{\operatorname{sh}\alpha}$, $r = m\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$; on peut encore prendre m pour unité de longueur.

Les coordonnées d'un point du cercle variable sont

$$x = \rho\cos\omega + r\cos\varphi = \frac{\cos\omega}{\operatorname{sh}\alpha} + \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\omega + r\sin\varphi = \frac{\sin\omega}{\operatorname{sh}\alpha} + \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\sin\varphi;$$

il y a entre α et ω une relation connue, soit $\frac{d\omega}{d\alpha} = k$ (fonction de α); en raisonnant comme on l'a fait précédemment, on est amené à l'équation

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} + k\frac{\cos(\omega-\varphi)}{\operatorname{ch}\alpha} - \frac{\sin(\omega-\varphi)}{\operatorname{sh}\alpha} = 0;$$

posons

$$\omega - \varphi = z, \qquad k - \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{dz}{d\alpha},$$

l'équation devient

$$(3') \qquad \left[1 + \frac{\cos z}{\operatorname{ch}\alpha}\right]k = \frac{dz}{d\alpha} + \frac{\sin z}{\sin\alpha};$$

elle admet les solutions $z_1 = \pi + i\alpha$, $z_2 = \pi - i\alpha$.

Nous la transformons, comme précédemment, en posant $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = y$, $\operatorname{th}\frac{\alpha}{2} = x$,

$$(1+y^2)\,dz = 2dy, \qquad (1-x^2)\,d\alpha = 2\,dx,$$

$k(\alpha)$ devient une fonction $K(x)$ et l'équation prend la forme

$$(5') \qquad 2K(x)\frac{1+x^2y^2}{1-x^4} = \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}$$

$\left(\text{elle admet les solutions } y_1 = +\frac{i}{x},\ y_2 = -\frac{i}{x}\right)$; en écrivant

$$\frac{xdy + ydx}{1+x^2y^2} = 2K(x)\frac{dx}{1-x^4},$$

on voit que l'intégrale est

$$(6) \qquad \operatorname{arc\,tg}(xy) = \int_{x_0}^{x} 2K(x)\frac{dx}{1-x^4},$$

en revenant aux variables α et z,

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\right) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} K(\alpha)\operatorname{th}\alpha\,d\alpha.$$

L'intégration se fait donc dans les deux cas par une quadrature.

Propriétés des trajectoires.

I. — Si l'on porte dans les valeurs de $\frac{dx}{d\alpha}$ et $\frac{dy}{d\alpha}$ la valeur trouvée pour $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, on trouve, après une réduction facile

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\cos^2\alpha}\left[1 + \sin\alpha\cos(\omega-\varphi) - h\cos\alpha\sin(\omega-\varphi)\right],$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\alpha}\left[1 + \sin\alpha\cos(\omega-\varphi) - h\cos\alpha\sin(\omega-\varphi)\right].$$

Si le crochet peut être nul pour une valeur de φ, le point correspondant est un point de rebroussement de la trajectoire à laquelle il appartient.

Pour que le crochet puisse être nul, il faut que

$$\sin^2\alpha + h^2\cos^2\alpha \geqslant 1,$$
$$|h| \geqslant 1.$$

On obtient d'ailleurs la même équation,

$$h\cos\alpha\sin(\omega-\varphi) - \sin\alpha\cos(\omega-\varphi) = 1,$$

en écrivant $\dfrac{dx}{d\varphi} : \dfrac{dx}{d\alpha} = \dfrac{dy}{d\varphi} : \dfrac{dy}{d\alpha}$, c'est-à-dire en cherchant les points où le cercle variable touche son enveloppe. Donc :

Si les cercles variables ont une enveloppe, cette enveloppe est le lieu des points de rebroussement des trajectoires.

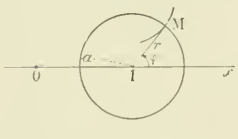
II. — En désignant par z_1 et z_2 deux solutions de l'équation (3), on aura

$$\mathrm{L}\frac{\operatorname{tg}\frac{z_1}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z_1}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} - \mathrm{L}\frac{\operatorname{tg}\frac{z_2}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} h(\beta)\operatorname{tg}\beta\, d\beta = \mathrm{C}^{\text{te}}.$$

Donc, P et P′ désignant les points de contact des tangentes menées de O à un cercle variable et M, M′ les points où ce cercle est coupé à angle droit par deux trajectoires différentes, le rapport anharmonique des quatre points P, P′, M, M′ est constant. (Cette propriété a lieu aussi dans le second cas, l'arc tangente pouvant être mis sous la forme d'un logarithme de nombre imaginaire.)

Il résulte de là que *si l'on considère quatre trajectoires orthogonales, les quatre points où elles coupent orthogonalement un des cercles variables ont un rapport anharmonique constant.*

Cas particulier. — Un cas intéressant est le cas limite où les cercles variables sont orthogonaux à une ligne droite, c'est-à-dire le cas où le lieu des centres est une ligne droite. Le calcul précédent ne s'applique pas à ce cas.



Prenons la droite pour axe des x, un point O de la droite pour origine ; soit I le centre du cercle variable, $\mathrm{OI} = a$, le rayon r est une fonction connue de a :

Coordonnées d'un point M du cercle : $x = a + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

Déplacement sur le cercle : $\dfrac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi$, $\dfrac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi$;

Déplacement quelconque, (φ fonction de a)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= 1 + \frac{dr}{da}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{da},\\ \frac{dy}{da} &= \frac{dr}{da}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{da}. \end{aligned}\right.$$

En écrivant
$$\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{dx}{da} + \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{dy}{da} = 0,$$

nous obtenons l'équation
$$-r\sin\varphi + r^2\frac{d\varphi}{da} = 0$$

ou

$$\frac{d}{da}\mathrm{L}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{r}, \qquad \mathrm{L}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \int_{a_0}^{a}\frac{da}{r}.$$

Applications de ce cas particulier.

1° Si $r = ma$ (m étant une c^te^), on aura les trajectoires de cercles homothétiques d'un cercle fixe, relativement à un point fixe ; lorsque $m < 1$ ces cercles sont inscrits dans un angle fixe (*).

2° Si $a^2 - r^2 = \pm k^2$ (k étant une constante), les cercles font partie d'un faisceau (passent par deux points réels ou ont deux points limites). On vérifiera aisément que les trajectoires sont des cercles formant un faisceau.

3° $a^2 \mp e^2 r^2 = \pm k^2$, les cercles seront bitangents à une conique à centre, ellipse ou hyperbole, les cercles faisant partie, soit du système qui comprend les foyers réels, soit de l'autre.

Applications du cas général :

1° Cercles tangents à deux cercles fixes donnés.

2° Cercles tangents à une quartique bicirculaire, anallagmatique.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

par M. **R. Bérard**, professeur au lycée de Besançon.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une fonction symétrique *entière* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$; on sait que l'on peut toujours trouver une fonction *entière* des variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$ qui devienne *identique* à $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ quand on y fait la substitution :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} s_1 = \Sigma x_1, \\ s_2 = \Sigma x_1 x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m-1} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{m-1}, \\ s_m = x_1 x_2 \ldots x_m. \end{array}\right.$$

Voici une démonstration directe de cette proposition. Admettons qu'elle soit exacte dans le cas de $m - 1$ variables : je vais montrer qu'elle est encore vraie dans le cas de m variables.

Ordonnons $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ par rapport à l'une quelconque des variables, x_m par exemple ; on a

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv A_0 x_m^2 + A_1 x_m^{2-1} + \ldots + A_2.$$

$A_0, A_1, \ldots A_2$ sont évidemment des fonctions symétriques entières des variables $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$; donc on pourra trouver des fonctions entières des variables $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{m-1}$, qui deviennent identiques à $A_0, A_1, \ldots A_2$ quand on y fait la substitution

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}, \\ \sigma_2 = x_1 x_2 + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{m-2} = x_1 x_2 \ldots x_{m-2} + \cdots, \\ \sigma_{m-1} = x_1 x_2 \ldots x_{m-1}. \end{array}\right.$$

Par suite, il existe une fonction entière de $x_m, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{m-1}$, qui devient identique à la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ par la substitution (2).

Effectuons le changement de variables défini par les égalités

$$\begin{array}{lcl} s_1 = x_m + \sigma_1, & & \sigma_1 = s_1 - x_m, \\ s_2 = x_m \sigma_1 + \sigma_2, & \text{d'où} & \sigma_2 = s_2 - s_1 x_m + x_m^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m-1} = x_m \sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}, & & \text{etc.} \end{array}$$

(*) Voir *Revue* : Problème 1595, pages 421 et 437.
Depuis la rédaction de cette note, une solution de cette question a été publiée (page 249, question 1721).

Nous obtiendrons ainsi une fonction entière de $x_m, s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, \varphi(x_m, s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})$ qui deviendra identique à $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ par la substitution (1). φ est un polynome entier en x_m; divisons-le par le polynome entier

$$x_m^m - s_1 x_m^{m-1} + s_2 x_m^{m-2} - \cdots + (-1)^m s_m$$

et soit $\psi(x_m, s_1, s_2, \ldots, s_m) \equiv B_0 x_m^{m-1} + B_1 x_m^{m-2} + \cdots + B_{m-1}$ le reste de la division; $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ sont des fonctions entières de $s_1, s_2, \ldots, s_m$. On voit immédiatement que les fonctions φ et ψ deviennent identiques quand on y fait la substitution (1); donc, par cette substitution, $\psi(x_m, s_1, s_2, \ldots, s_m)$ devient identique à $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Mais il est clair qu'il en sera de même des fonctions

$$\psi(x_1, s_1, \ldots, s_m), \psi(x_2, s_1, \ldots, s_m), \ldots \psi(x_{m-1}, s_1, \ldots s_m);$$

donc le polynome entier en $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$, obtenu en faisant la substitution (1) dans

$$B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \cdots + B_{m-1} - f(x_1, \ldots x_m).$$

est identiquement nul quand on fait $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_m$ et par suite est divisible par

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m).$$

Ceci exige que les coefficients des puissances de x soient identiquement nuls, car le polynome est de degré $m - 1$ par rapport à x tandis que le diviseur est de degré m.

En particulier, nous aurons

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) \equiv B_{m-1},$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction entière de $s_1, s_2, \ldots, s_m$ qui devient identique à $f(x_1, \ldots, x_m)$ quand on y fait la substitution (1). Comme la proposition est évidente pour $m = 1$, il résulte de ce qui précède qu'elle est vraie pour une valeur quelconque de m.

La démonstration précédente met aussi en évidence la propriété suivante :

Si les coefficients des divers termes de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ sont des nombres entiers, il en est de même des coefficients des termes de la fonction correspondante $F(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ car, si la proposition est vraie pour $m = p - 1$, elle l'est encore pour $m = p$; or elle est évidente pour $m = 1$.

Formules de Newton.

Soient m variables $x_1, x_2, \ldots x_m$; h désignant un entier positif quelconque, posons :

$$S_h = \Sigma x_1^h,$$
$$s_h = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_h,$$

en convenant que s_h est nul si $h > m$.

Ceci posé, considérons la fonction symétrique entière

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = S_p - s_1 S_{p-1} + s_2 S_{p-2} - \cdots + (-1)^{p-1} s_{p-1} S_1 + (-1)^p p . s_p.$$

p désignant un entier positif.

Je vais montrer que cette fonction est identiquement nulle.

Supposons d'abord $m \leqslant p$; posons $p = m + \mu$ et soit $\theta(x)$ le polynome entier

$$x^m - s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m s_m.$$

On a

$$x_1^\mu \theta(x_1) \equiv 0, \qquad x_2^\mu \theta(x_2) \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad x_m^\mu \theta(x_m) \equiv 0,$$

d'où, en additionnant,

$$S_p - s_1 S_{p-1} + \cdots + (-1)^m s_m S_\mu \equiv 0.$$

La fonction f est donc identiquement nulle si $m \leqslant p$.

Supposons $m = p + 1$; si dans f on annule une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, on obtient une fonction symétrique entière de p variables qui est identiquement nulle d'après ce qui précède; on en conclut que f est divisible par $x_1 x_2 \ldots x_{p+1}$. Or f est de degré p par rapport aux

variables $x_1, x_2, \ldots x_{p+1}$ tandis que le diviseur est de degré $p+1$; il faut donc que f soit identiquement nulle.

En supposant ensuite $m = p+2$, on démontrera de la même façon que la fonction f est encore identiquement nulle, etc.

De là, on déduit les formules de Newton :

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 - s_1 \equiv 0, \\ S_2 - s_1 S_1 + 2s_2 \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} - s_1 S_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1}(m-1)s_{m-1} \equiv 0, \\ S_m - s_1 S_{m-1} + \cdots + (-1)^m m s_m \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m+\mu} - s_1 S_{m+\mu-1} + \cdots + (-1)^m s_m S_\mu \equiv 0. \end{array}\right.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1726. — *On considère l'épicycloïde* S_0 *enveloppe des droites dont l'équation générale est*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \cos n\varphi$$

et l'épicycloïde S_V *enveloppe des droites qui coupent* S_0 *sous un angle donné* V.

Vérifier que S_V *passe aux points de rebroussement de* S_0 *et montrer que ces points constituent l'enveloppe de* S_V, *quand* V *varie.*

Lieu des points de rebroussement de la courbe S_V, *quand* V *varie.*

1. Le point de contact de la tangente (φ) à la courbe S_0 est donné par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = \cos n\varphi, \\ -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi = -n \sin n\varphi ; \end{array}\right. \qquad (x_0, \quad y_0)$$

l'équation d'une droite passant par ce point et inclinée de l'angle V sur la tangente est

$$x \cos(\varphi + V) + y \sin(\varphi + V) = x_0 \cos(\varphi + V) + y_0 \sin(\varphi + V),$$

ou

$$x \cos(\varphi + V) + y \sin(\varphi + V) = \cos V \cos n\varphi - n \sin V \sin n\varphi. \qquad (T_V)$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe S_V est donné par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \cos(\varphi + V) + y_1 \sin(\varphi + V) = \cos V \cos n\varphi - n \sin V \sin n\varphi, \\ -x_1 \sin(\varphi + V) + y_1 \cos(\varphi + V) = -n \cos V \sin n\varphi - n^2 \sin V \cos n\varphi. \end{array}\right. \qquad (x_1, y_1)$$

Les points de rebroussement de S_0 s'obtiennent en écrivant que

$$\cos n\varphi = 0.$$

d'où

$$n\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \sin n\varphi = (-1)^k.$$

Les équations (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deviennent alors

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = 0. \\ -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi = -n(-1)^k \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \cos(\varphi + V) + y_1 \sin(\varphi + V) = -n(-1)^k \sin V, \\ -x_1 \sin(\varphi + V) + y_1 \cos(\varphi + V) = -n(-1)^k \cos V ; \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} x_1 = x_0 = (-1)^k n \sin \varphi, \\ y_1 = y_0 = -(-1)^k n \cos \varphi, \end{cases}$$

relations qui vérifient la propriété énoncée.

2. Posons maintenant

$$\begin{cases} x + iy = \xi, & e^{2i\varphi} = t, \\ x - iy = \eta, & e^{2iV} = A, \end{cases} \qquad n = 2m + 1;$$

l'équation de la tangente T_0 devient

$$\xi + t\eta = t^{m+1} + \frac{1}{t^m};$$

d'où les coordonnées du point de contact de cette droite avec son enveloppe

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{m+1}{t^m} - mt^{m+1}, \\ \eta_0 = (m+1)t^m - \dfrac{m}{t^{m+1}}. \end{cases}$$

L'équation de la tangente T_V devient aussi

$$\xi + At\eta = \xi_0 + At\eta_0,$$

ou

$$\xi + At\eta = [(m+1)A - m]t^{m+1} + \frac{m+1-mA}{t^m},$$

équation qui, mise sous la forme

$$u\xi + v\eta + w = 0,$$

donne les relations

$$\frac{u}{1} = \frac{v}{At} = \frac{-wt^m}{[(m+1)A - m]t^n + m + 1 - mA}.$$

La première de ces égalités donne $t = \dfrac{v}{Au}$. L'élimination de t entre ces deux équations n'offre donc aucune difficulté et donne pour équation tangentielle de la courbe S_V :

$$(m+1-mA)A^m u^n + \frac{(m+1)A - m}{A^{m+1}} v^n + wu^m v^m = 0. \tag{1}$$

Nous obtiendrons l'enveloppe de cette courbe en éliminant A entre cette équation (1) et celle qu'on obtient en dérivant par rapport à A. Cette équation dérivée s'écrit, après un calcul facile,

$$A^n u^n + v^n = 0; \tag{2}$$

l'équation (1), mise sous la forme

$$(m+1-mA)A^n u^n + [(m+1)A - m]v^n + A^{m+1} wu^m v^m = 0,$$

devient alors, en tenant compte de l'équation (2),

$$n(A-1)v^{m+1} + A^{m+1} u^m w = 0. \tag{3}$$

C'est entre l'équation (2) et cette équation (3) que nous allons éliminer A.

Posons $u = e^{-i\psi}$, $v = e^{i\psi}$ (on peut supposer $uv = 1$), l'équation (2) donne

$$e^{2niV} + e^{2ni\psi} = 0,$$

ou

$$e^{ni(V-\psi)} + e^{-ni(V-\psi)} = 0,$$

ou

$$\cos n(\psi - V) = 0,$$

d'où

$$\psi - V = (2k+1)\frac{\pi}{2n}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots); \tag{4}$$

l'équation (3) devient, d'autre part,

$$n(e^{2iV} - 1)e^{(m+1)i\psi} + e^{(2m+2)iV} e^{-mi\psi} w = 0,$$

ou
$$n(e^{iV} - e^{-iV})e^{ni(\psi - V)} + w = 0, \tag{5}$$
mais l'équation (4) donne
$$e^{ni(\psi - V)} = e^{2k-1\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi i}{2}} e^{k\pi i} = i e^{\pi i} = i \cos k\pi = (-1)^k i,$$
l'équation (5) devient alors
$$ni(e^{iV} - e^{-iV}) \cos k\pi + w = 0.$$

Posons pour abréger
$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \tag{7}$$
d'où
$$V = \psi - \varphi;$$
il vient
$$e^{iV} = e^{i(\psi - \varphi)} = ve^{-i\varphi}, \qquad e^{-iV} = e^{i(\varphi - \psi)} = ue^{i\varphi},$$
d'où
$$w + ni(ve^{-i\varphi} - ue^{i\varphi}) \cos k\pi = 0; \tag{6}$$
le résultat de notre élimination est donc une équation linéaire entre u, v, w. A chacune des valeurs possibles de φ correspond une pareille équation, et chacune d'elles représente un point. Donc l'enveloppe cherchée est constituée par ces points.

Nous allons vérifier qu'ils coïncident avec les rebroussements de S_0. En tenant compte de l'équation (6), l'équation
$$u\xi + v\eta + w = 0$$
devient
$$u\xi + v\eta + ni(ue^{i\varphi} - ve^{-i\varphi}) \cos k\pi = 0;$$
le point correspondant a pour coordonnées
$$\xi = -nie^{i\varphi} \cos k\pi, \qquad \eta = nie^{-i\varphi} \cos k\pi,$$
ou
$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2} = n \cos k\pi \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = n \cos k\pi \sin \varphi, \\[2ex] y = \dfrac{\xi - \eta}{2i} = -n \cos k\pi \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = -n \cos k\pi \cos \varphi, \end{cases}$$
équations qui, en tenant compte de la relation (7), définissent précisément les rebroussements de S_0, ainsi qu'on l'a vu au § 1.

3. Posons
$$At = \theta,$$
l'équation de T_V devient
$$\xi + \theta\eta = (m + 1 - Am)\frac{A^m}{\theta^m} + [(m+1)A - m]\frac{\theta^{m+1}}{A^{m+1}}; \tag{Δ}$$
telle est l'équation générale des droites Δ qui coupent S_0 sous l'angle V.

Les coordonnées du point où Δ touche son enveloppe S_V s'obtiennent en dérivant l'équation Δ par rapport à θ. On trouve
$$\begin{cases} \xi = (m+1)(m+1-mA)\dfrac{A^m}{\theta^m} - m[(m+1)A - m]\dfrac{\theta^{m-1}}{A^{m-1}}, \\[2ex] \eta = (m+1)[(m+1)A - m]\dfrac{\theta^m}{A^{m+1}} - m(m+1-mA)\dfrac{A^m}{\theta^{m-1}}. \end{cases}$$

Ce point sera de rebroussement si la tangente Δ passe par l'origine, d'où l'équation
$$(m+1-mA)A^{2m-1} + [(m+1)A - m]\theta^{2m+1} = 0,$$
ou
$$(m+1)A\theta^{2m+1} - mA^{2m-2} = m\theta^{2m-1} - (m+1)A^{2m-1}.$$

Posons
$$\theta = A\lambda,$$
il vient
$$A = \frac{m\lambda^{2m+1} - (m+1)}{(m+1)\lambda^{2m-1} - m},$$

d'où
$$\begin{cases} \xi = (m+1)(m+1-mA)\dfrac{1}{\lambda^m} - m[(m+1)A - m]\lambda^{m+1}, \\ \eta = (m+1)\dfrac{(m+1)A - m}{A}\lambda^m - m\dfrac{m+1-mA}{A}\dfrac{1}{\lambda^{m+1}}, \end{cases}$$

d'où, toutes réductions faites, en tenant compte de la valeur de A,

$$\begin{cases} \xi = (2m+1)^2\dfrac{\lambda^{m+1}}{(m+1)\lambda^{2m+1} - m}, \\ \eta = (2m+1)^2\dfrac{\lambda^m}{(m+1) - m\lambda^{2m+1}}, \end{cases}$$

d'où, en nous rappelant que $2m+1 = n$,

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{\xi} = (m+1)\lambda^m - \dfrac{m}{\lambda^{m+1}}, \\ \dfrac{n^2}{\eta} = \dfrac{m+1}{\lambda^m} - m\lambda^{m+1}. \end{cases}$$

Considérons l'inverse (ξ_1, η_1) du point (ξ, η) par rapport à l'origine, le module d'inversion étant n^2. Les relations qui lient ξ, η et ξ_1, η_1 sont

$$\xi\eta_1 = \eta\xi_1 = n^2,$$

d'où
$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{m+1}{\lambda^m} - m\lambda^{m+1}, \\ \eta_1 = (m+1)\lambda^m - \dfrac{m}{\lambda^{m+1}}, \end{cases}$$

valeurs qui ne sont autres que celles de ξ_0, η_0 à la condition $\lambda = t$.

Mais les points de rebroussement de la courbe S_0 sont tous situés sur le cercle de rayon n qui a l'origine pour centre. Donc enfin :

Le lieu des points de rebroussement des courbes S_V est la transformée par vecteurs réciproques de la courbe donnée S_0 par rapport à l'origine ; le module d'inversion est égal au carré du rayon du cercle qui a pour centre l'origine et qui contient les points de rebroussement de S_0.

A chaque point φ de la courbe S_0 correspond donc un point de rebroussement d'une courbe S_V, c'est-à-dire un angle V. On peut trouver la relation qui existe entre φ et V. Dans l'expression trouvée pour A, faisons $\lambda = t$ et rétablissons pour A et t les valeurs

$$A = e^{2iV}, \qquad t = e^{2i\varphi},$$

il vient

$$A = e^{2iV} = \frac{mt^{2m+1} - (m+1)}{(m+1)t^{2m+1} - m} = \frac{me^{2ni\varphi} - (m+1)}{(m+1)e^{2ni\varphi} - m},$$

relation qui peut s'écrire

$$m[e^{i(n\varphi - V)} + e^{-i(n\varphi - V)}] = (m+1)[e^{i(n\varphi + V)} + e^{-i(n\varphi + V)}],$$

ou
$$m\cos(n\varphi - V) = (m+1)\cos(n\varphi + V),$$

ou
$$(n-1)\cos(n\varphi - V) = (n+1)\cos(n\varphi + V),$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{cotg} V \operatorname{cotg} n\varphi = n\,;$$

telle est cette relation : elle détermine une courbe S_V en fonction de l'angle φ, et elle détermine sur la courbe S_0, lorsqu'on donne l'angle V, autant de points que les courbes S_0 ou S_V ont de rebroussements. Ces points sont les points de contact avec S_0 d'autant de tangentes, et si par l'origine on mène

les parallèles à ces tangentes, on obtient un faisceau qu'une rotation peut amener en coïncidence avec le faisceau des tangentes de rebroussement de la courbe S_0.

Toutes les tangentes à la courbe S_0 aux points considérés sont tangentes à un même cercle ayant l'origine pour centre : en effet, soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \cos n\varphi$$

l'une d'elles.

La relation
$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{1}{n} \operatorname{cotg} V$$

peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg} n\varphi = \operatorname{tg} n\varphi_0,$$

φ_0 étant une solution particulière.

D'où $n\varphi = n\varphi_0 + k\pi$, k étant un entier,

d'où
$$\cos n\varphi = \pm \cos n\varphi_0 ;$$

or la distance de la droite considérée à l'origine est donnée par

$$\delta^2 = \cos^2 n\varphi,$$

d'où
$$\delta^2 = \cos^2 n\varphi_0 = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Tous les points considérés sont sur un cercle ayant pour centre l'origine. En effet, l'un de ces points est donné par les équations

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \cos n\varphi,$$
$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = -n \sin n\varphi,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = \cos^2 n\varphi + n^2 \sin^2 n\varphi = \frac{n^2}{\cos^2 V + n^2 \sin^2 V}.$$

Ce cercle coupe la courbe S_0 en un nombre pair de points à distance finie. Ce nombre est égal à $2n$ si n est entier et impair, et égal à $4n$ si n est entier et pair.

La moitié seulement de ces points correspond à l'angle V. L'autre moitié correspond à l'angle $(-V)$.

Du reste, puisque les rebroussements de la courbe S_V sont tous sur un cercle de centre O, il était évident à priori que les points correspondants étaient également sur un cercle de centre O.

L. BICKART.

1732. — *On considère un triangle* ABC, *dont les deux sommets* A *et* B *sont fixes, et tel que le pied de l'une des bissectrices de l'angle* A *sur le côté* BC *décrive une droite fixe* D.

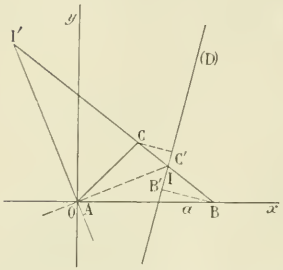
1° *Trouver le lieu du point* C. *Ce lieu est une conique* Γ *dont on étudiera le genre d'après la position de la droite* D *dans le plan.*

2° *Lieux des points* I *et* I′ *où les bissectrices de l'angle* A *rencontrent le côté* BC. *Ce lieu se compose, outre la droite* D, *d'une conique* Γ′ *qui passe par deux points fixes, quand* D *varie arbitrairement.*

3° *L'une des coniques* Γ *et* Γ′ *étant construite, en déduire la construction de l'autre. Montrer que si* D *se déplace parallèlement à une direction fixe* Δ, *les coniques* Γ′ *passent par un troisième point fixe, et donner le lieu de ce point quand la direction* Δ *varie.*

4° *Trouver les droites* D *pour lesquelles la conique* Γ *est une parabole. Ecrire l'équation de l'axe, de la tangente au sommet, de la directrice, les coordonnées du foyer, du sommet, et donner les enveloppes et lieux correspondants.*

1° Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y une perpendiculaire à AB au point A. Désignons par a l'abscisse du point B, par $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite (D) et par $y = tx$ l'équation de OI; l'équation de la droite OC est alors



$$y = \frac{2t}{1 - t^2}\, x,$$

et celle de CB,

$$y - tx + \lambda(ux + vy + w) = 0,$$

λ étant déterminé de façon que cette droite passe au point B. Ceci donne $\lambda = \dfrac{at}{au + w}$ et l'équation de la droite BC est

$$(au + w)(y - tx) + at(ux + vy + w) = 0.$$

Le lieu du point C s'obtient en éliminant t entre cette équation et celle de OC ; ce calcul donne successivement

$$t = \frac{(au + w)y}{wx - avy - aw},$$

puis

$$y = \frac{2xy(au + w)(wx - avy - aw)}{(wx - avy - aw)^2 - (au + w)^2 y^2}.$$

Telle est l'équation du lieu. Elle se décompose en deux : $y = 0$, qui représente l'axe des x, lieu exceptionnel impropre, qui correspond au cas où OI vient se placer sur Ox, ainsi que OC et BC ; et

$$(wx - avy - aw)^2 - (au + w)^2 y^2 = 2x(au + w)(wx - avy - aw),$$

qui représente le véritable lieu.

Ce lieu est une conique dont nous allons étudier la nature. Pour cela écrivons ainsi son équation,

$$[(au + w)x - aD]^2 - y^2(au + w)^2 = 2x(au + w)[(au + w)x - aD];$$

nous aurons

$$(1) \qquad (au + w)^2(x^2 + y^2) - a^2D^2 = 0,$$

équation dans laquelle D désigne la fonction linéaire $ux + vy + w$.

Cette équation représente une conique ayant l'origine pour foyer et pour directrice la droite $ux + vy + w = 0$. L'excentricité est donnée par $e^2 = \dfrac{a^2(u^2 + v^2)}{(au + w)^2}$, et suivant que $e^2 < 1$, > 1, ou $= 1$, nous avons une ellipse, une hyperbole ou une parabole. $e^2 = 1$ donne

$$a^2(u^2 + v^2) - (au + w)^2 = 0;$$

c'est l'équation tangentielle du cercle de centre B et de rayon BO ; elle exprime donc que la droite est tangente à ce cercle ; $e^2 < 1$ se traduit par

$$a^2(u^2 + v^2) - (au + w)^2 < 0;$$

cela veut dire que la droite (D) est extérieure au cercle, ne rencontre pas le cercle ; et $e^2 > 1$, que la droite (D) est une sécante, rencontre le cercle en deux points réels.

2° L'équation de la seconde bissectrice est $y = \dfrac{-x}{t}$. Le lieu du point I' où elle rencontre (D) s'obtient immédiatement, en remplaçant t par $-\dfrac{x}{y}$ dans l'équation de la droite BC. Ce lieu est la conique

$$(2) \qquad (au + w)(x^2 + y^2) - aDx = 0,$$

qui passe à l'origine et au point B.

3° Il suffit de regarder la figure pour voir comment on peut du point C déduire le point I' et inversement ; chacune des coniques étant construite, l'autre se construit donc immédiatement. La conique (2) ou I' se construit de suite : elle passe en O, en B, est tangente en O à Oy, en B à la droite BI_1, qui

joint le point B au point de rencontre de la droite (D) avec Oy ; on en aura en outre autant de points que l'on voudra.

Si la direction de D reste fixe, u et v sont fixes, w varie seul et les coniques Γ' forment un faisceau dont les coniques de base sont

$$u(x^2+y^2)-(ux+vy)x=0,$$

et

$$x^2+y^2-ax=0\,;$$

la première se décompose en $y=0$ et $uy-vx=0$; la seconde est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Indépendamment des deux points fixes A et B où elles se coupent, il y a le point

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{au}{u^2+v^2}.$$

Le lieu de ce point quand $\frac{u}{v}$ varie est évidemment le cercle $x^2+y^2-ax=0$.

4° Quand la conique Γ est une parabole, on a $e^2=1$,

$$a^2(u^2+v^2)-(au+w)^2=0,$$

la droite (D) enveloppe le cercle BA. Si l'on pose $u=\cos\varphi$, $v=\sin\varphi$, on a

$$(a\cos\varphi+w)^2=a^2,$$

c'est-à-dire

$$w=-a\cos\varphi\pm a,$$

et l'équation de la conique Γ devient

$$x^2+y^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi-a\cos\varphi\pm a)^2;$$

peu importe le signe que l'on choisit, on trouve toujours le même faisceau de coniques, car on passe d'une équation à l'autre en changeant φ en $\varphi+\pi$; nous adopterons l'équation

$$x^2+y^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi-a\cos\varphi-a)^2.$$

C'est l'équation d'une parabole dont le foyer est à l'origine et dont la directrice a pour équation

$$(x-a)\cos\varphi+y\sin\varphi+a=0.$$

Cette droite enveloppe le cercle BA.

La tangente au sommet a pour équation

$$(2x-a)\cos\varphi+2y\sin\varphi+a=0\,;$$

elle enveloppe le cercle

$$(2x-a)^2+4y^2=a^2.$$

L'axe est la droite

$$\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{\sin\varphi}.$$

et le sommet a pour coordonnées

$$\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{a\cos\varphi-a}{2}.$$

Le lieu du sommet a donc pour équation polaire

$$\rho=\frac{a\cos\omega-a}{2}.$$

C'est une cardioïde.

Bonnes solutions : MM. A. Duby, à Dijon ; G. Foucay, à Roanne ; J. Plane, lycée de Clermont ; R. Cherrier, à Reims ; Ch. Jean, à Nîmes ; J. Floripar.

Remarques géométriques. — Il suffit de jeter un coup d'œil sur la figure pour voir que les droites At, BC se correspondent homographiquement, ainsi que At, At'. Le lieu du point t' est donc une conique qui passe aux points A et B ; quand Bt' vient sur BA, la droite At' se place sur Oy, la tangente au point O ou A est donc l'axe des y. On apercevra tout aussi aisément la tangente en B. Si Ot est parallèle à (D), Bt aussi est parallèle à (D) et le point t' est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la parallèle à (D) menée par B. Ce point est un point de la conique Γ' ; il est fixe quand la direction de (D) reste fixe ; il décrit le cercle qui a pour diamètre AB, quand la direction de (D) varie.

Abaissons de C et de B des perpendiculaires CC′ et BB′ sur la droite (D), nous aurons évidemment

$$\frac{CI}{BI} = \frac{CC'}{BB'}; \qquad \text{d'autre part,} \qquad \frac{CI}{BI} = \frac{AC}{AB},$$

donc $\frac{AC}{AB} = \frac{CC'}{BB'}$, en valeur absolue, et nous en déduisons $\frac{AC}{CC'} = \frac{AB}{BB'} = \text{c}^{\text{te}} = e$.

Le lieu de C est donc une conique Γ qui a pour foyer le point A et pour directrice la droite (D); l'excentricité est $e = \frac{AB}{BB'}$. Tous les résultats déjà signalés sont évidents géométriquement.

Quant à la quatrième partie, elle est évidente aussi, puisque la droite (D) enveloppe le cercle ayant pour centre B et pour rayon BA.

Bonnes solutions géométriques de MM. Delens, à Rouen, R. Bouvaist.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1715. — *Représenter le solide commun à un tore et à un hyperboloïde.*

Le tore a son axe vertical. Le centre est sur le grand axe de la feuille. Ses projections sont à 100^{mm} *du centre de la feuille. La méridienne a son centre à* 60^{mm} *de l'axe ; elle a pour rayon* 45^{mm}. *L'hyperboloïde de révolution à une nappe est concentrique au tore.*

Son axe est horizontal à 45° *sur le plan vertical. Les génératrices font avec l'axe un angle de* 45°. *Le rayon du cercle de gorge vaut* 15^{mm}.

On calculera en degrés ou en grades les angles avec la ligne de terre des tangentes à la projection verticale de la courbe aux points situés sur l'axe du tore.

(Ecole normale supérieure, concours de 1908.)

On a immédiatement les deux contours apparents du tore.

L'hyperboloïde a pour contour apparent horizontal l'hyperbole méridienne définie par ses deux asymptotes, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la ligne de terre, et par ses sommets situés sur la bissectrice de l'angle des asymptotes à 15^{mm} de part et d'autre du centre.

Il n'a pas de contour apparent vertical proprement dit : le plan de profil passant par le centre de la surface sépare seulement sur le plan vertical deux régions sur l'une desquelles se projettent tous les points de la surface extérieure au solide vus par l'observateur placé à l'infini et en avant, tandis que tous les points de la surface intérieure vus par cet observateur, si le solide était creux, se projettent sur l'autre région.

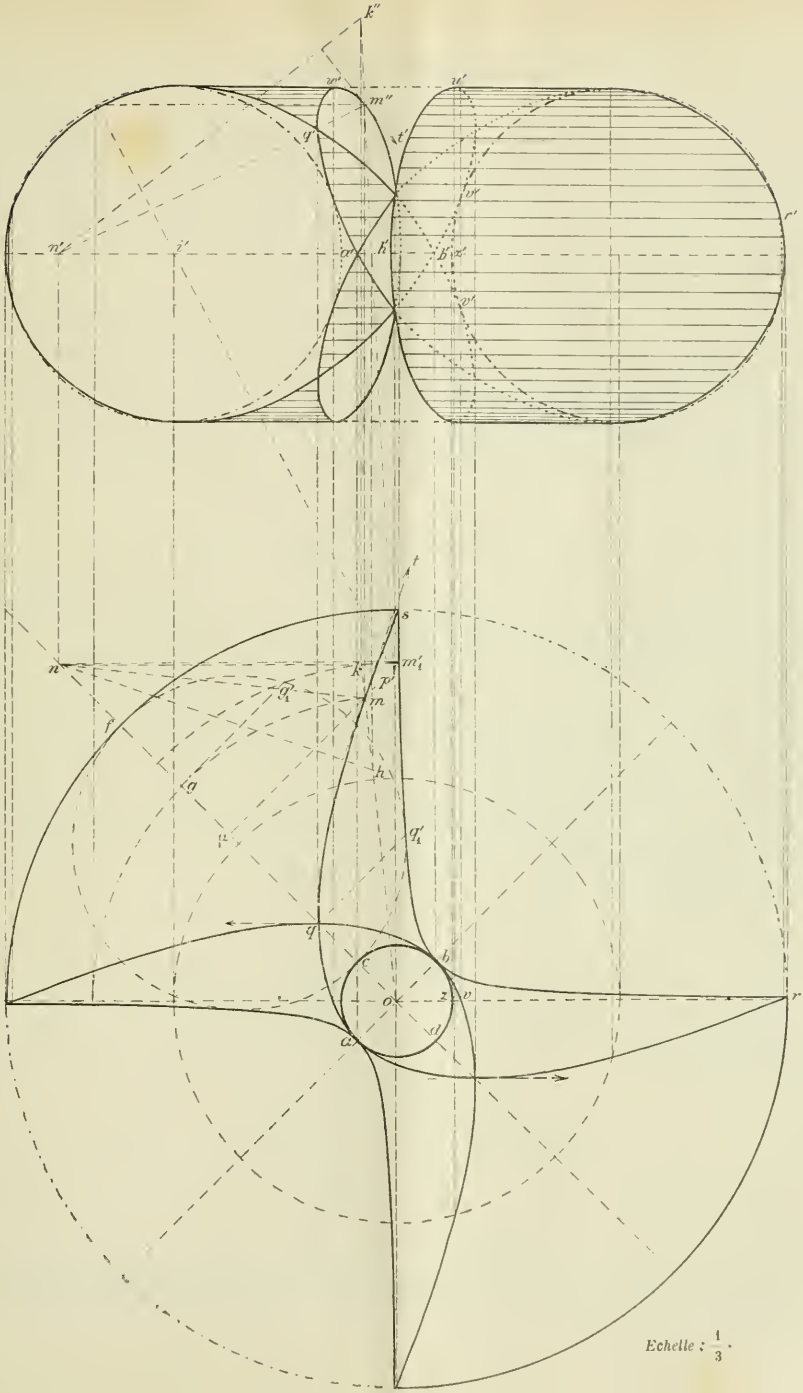
Pour trouver le solide commun, nous chercherons la ligne d'intersection des deux solides en suivant la méthode classique applicable aux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent et nous couperons chacune d'elles par des sphères ayant leur centre au point de rencontre des axes, ici centre commun des deux surfaces ; chaque sphère coupe le tore suivant un parallèle projeté horizontalement suivant un cercle, et l'hyperboloïde suivant un parallèle projeté horizontalement suivant une perpendiculaire à l'axe *cd* et dont les points d'intersection avec le premier cercle donnent deux points de l'intersection.

Nous remarquerons immédiatement que la courbe d'intersection est symétrique par rapport à chacun des axes de l'hyperbole méridienne en sorte qu'il suffirait de la déterminer dans un des quadrants formés par ces axes pour l'avoir en entier.

Pour obtenir les rayons des parallèles situés sur une sphère auxiliaire particulière, nous considérons les deux méridiennes situées dans le plan vertical de l'axe de révolution de l'hyperboloïde et nous rabattons ce plan sur le plan horizontal du centre.

Le grand cercle de la sphère auxiliaire coupe l'hyperbole méridienne en deux points tels que m'_1, qu'il suffit de joindre pour avoir la projection horizontale du parallèle, et la circonférence demi-méridienne du tore en deux autres points g'_1 dont la projection commune g sur of donne l'extrémité du rayon og des parallèles du tore. On a ainsi deux points de l'intersection tels que m, placés symétriquement par rapport à of. La tangente en l'un d'eux m, par exemple, s'obtiendra en menant par ce point la perpendiculaire mt au plan des normales menées par ce point à chaque surface, ce qui est très simple ici puisque l'on connaît les deux méridiennes.

Points remarquables. — Tout d'abord nous pouvons observer que sur le plan horizontal la courbe d'intersection qui est du huitième degré dans l'espace se projettera suivant une courbe du quatrième degré puisque le plan horizontal du centre commun des deux surfaces est un plan de symétrie. D'ailleurs la construction des deux méridiennes nous ayant montré qu'elles se touchent en q_1, nous en déduirons l'existence d'un point



Echelle : $\frac{1}{3}$.

double réel en q sur l'axe de l'hyperbole méridienne, et par suite d'un autre symétrique par rapport au centre. Cette quartique se décompose, comme l'indique un calcul ultérieur, en deux coniques qui sont deux paraboles ayant pour foyer commun le centre de la figure et leurs axes de symétrie sur l'axe transverse de l'hyperbole méridienne. Elles touchent le cercle de gorge aux sommets de cet axe transverse dont chacun est sommet d'une parabole et se coupent orthogonalement aux points doubles réels signalés plus haut, les tangentes en chacun de ces points doubles étant parallèles aux asymptotes de l'hyperbole méridienne.

Les points sur le contour apparent horizontal sont donc les sommets de l'axe transverse et les quatre points d'intersection de l'hyperbole méridienne avec le plus grand parallèle du tore.

Projection verticale. — On déduit la projection verticale de la projection horizontale en relevant chaque point de l'intersection au moyen d'une ligne de rappel sur le parallèle correspondant du tore. Nous obtiendrons ainsi une courbe ayant pour axe de symétrie l'horizontale du centre des deux surfaces d'après ce qui a été dit, et aussi la verticale du centre, puisque c'est un axe de symétrie pour les deux surfaces. Nous trouvons ainsi quatre points doubles réels, projections verticales des points doubles de la projection horizontale. La courbe touche les deux cercles de la méridienne du tore ainsi que les projections des deux parallèles limites en des points déterminés par l'intersection de la projection horizontale avec le plan méridien de front. On reconnaît sur la projection de l'axe du tore deux points quadruples, et sur celle de l'axe de l'hyperboloïde deux points doubles donnés par les projections des points de contact du petit parallèle du tore avec l'hyperbole méridienne.

Solide commun. — En projection horizontale, la ponctuation n'offre aucune difficulté ; on enlèvera seulement les deux arcs du grand parallèle qui sont intérieurs à chacune des paraboles.

En projection verticale, on devra enlever sur chacune des projections des parallèles limites du tore la portion qui correspond à l'arc de chaque parallèle qui se trouve sur la surface déjà enlevée en projection horizontale, et limitée par les points de contact, par exemple $w'u'$. Il faudra aussi enlever toute la portion de demi-circonférence méridienne du tore comprise entre les points de contact v' et v' ainsi que la portion symétrique par rapport à son diamètre horizontal. L'arc $v's'$ au contraire subsiste comme l'indique la projection horizontale.

On déduit de là maintenant sans difficulté la ponctuation de la courbe d'intersection, en appliquant toujours le principe invoqué en pareil cas, et qui consiste à imaginer un mobile parcourant cette courbe d'un mouvement continu et remarquer, quand on a ponctué les portions de contour apparent qui ont disparu, que ce mobile, partant d'une position vue, ne peut devenir caché que s'il traverse une ligne de contour apparent tracée en plein dans la direction des arcs croissants de la trajectoire ou bien s'il traverse une ligne d'intersection ailleurs qu'en un point double réel de l'espace [1].

Tangentes aux points multiples de la projection verticale. — Pour calculer les angles de ces tangentes avec la ligne de terre, nous prendrons les équations des deux surfaces rapportées au trièdre formé par la verticale du centre, l'axe de l'hyperboloïde et la perpendiculaire au plan de ces deux droites. Les méridiennes des surfaces, sont en désignant par a le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde.

cercle générateur $\begin{cases} y = 0, \\ (x-4a)^2 + z^2 = 9a^2 ; \end{cases}$ hyperbole $z^2 - x^2 = a^2, \quad y = 0 ;$

tore $(x^2+y^2+z^2+7a^2)^2 = 64a^2(x^2+y^2) ;$ hyperboloïde $y^2 + z^2 - x^2 = a^2.$

Projection sur Oxy :

$(x^2-4a^2)^2 - 16a^2y^2 = 0 ;$ 2 paraboles $x^2 = 4a(a \pm y).$

Tangente au point $\begin{cases} x = 2a, \\ y = 0, \end{cases} \quad y' = 1.$

Projection sur le plan $x + z = 0$. — Remplaçons le tore par le cylindre qui projette l'intersection sur le plan $y = 0$, soit

$$(2x^2+8a^2)^2 = 64a^2(2x^2 - z^2 + a^2),$$

ou

$$(x^2-4a^2)^2 = 16a^2(x^2 - z^2 + a^2),$$

d'où

$$\begin{cases} x^4 - 24a^2x^2 + 16a^2z^2 = 0, & \text{cylindre.} \\ y^2 + z^2 - x^2 - a^2 = 0, & \text{hyperboloïde.} \end{cases}$$

Pour projeter sur le plan $x + z = 0$, je prends ce plan pour plan des Xz et pour cela je transforme les coordonnées $\left(\alpha = -\frac{\pi}{2}\right)$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y), \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y),$$

[1] On a tracé des hachures horizontales sur la surface du tore conservé et visible en projection verticale pour mieux représenter l'aspect du solide commun — les parties non couvertes de hachures représentent la surface de l'hyperboloïde. La portion de gauche de la surface du tore est d'ailleurs intérieure à l'anneau et celle de droite en est la surface externe.

d'où
$$y + x = Y\sqrt{2}, \quad y - x = -X\sqrt{2}.$$
Les surfaces deviennent
$$\frac{(X+Y)^4}{4} - 24a^2\frac{(X+Y)^2}{2} + 16a^2z^2 = 0, \quad \text{cylindre},$$
$$z^2 - 2XY = a^2, \quad \text{hyperboloïde}.$$
Eliminant Y on a la projection demandée
$$Y = \frac{z^2 - a^2}{2X},$$
d'où
$$X + Y = \frac{2X^2 + z^2 - a^2}{2X}$$
et la courbe est
$$\frac{(2X^2 + z^2 - a^2)^4}{4.16X^4} - 12a^2\frac{(2X^2 + z^2 - a^2)^2}{4X^2} + 16a^2z^2 = 0$$
ou
$$(2X^2 + z^2 - a^2)^4 - 3.8^2a^2X^2(2X^2 + z^2 - a^2)^2 + 4.16^2a^2X^4z^2 = 0.$$
Les points sur l'axe des z sont donnés par $(z^2 - a^2)^4 = 0$, deux points quadruples $z = \pm a$.

Les points sur l'axe des x sont les points doubles $x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

les points simples
$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}), & x_2 = -\frac{a}{2}(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}), \\ x'_1 = -\frac{a}{2}(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}), & x'_2 = \frac{a}{2}(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}). \end{cases}$$
En remplaçant a par sa valeur 15^{mm}, on trouve environ
$$x_1 = 104^{mm},8, \quad x_2 = -0^{mm},97.$$
Pour avoir les tangentes aux points quadruples, nous mettrons l'équation de la courbe sous la forme
$$[(2x^2 + z^2)^2 - 2a^2(18x^2 + z^2) + a^4]^2 - 2.64a^2x^2[2x^2 - z^2 + a^2]^2 = 0$$
ou
$$(2x^2 + z^2 - a^2)^2 - 32a^2x^2]^2 - 2.64a^2x^2[2x^2 - z^2 + a^2]^2 = 0,$$
ce qui donne les deux quartiques
$$(2x^2 + z^2 - a^2)^2 - 32a^2x^2 - 16\sqrt{2}ax(2x^2 - z^2 + a^2) = 0$$
et
$$(2x^2 + z^2 - a^2)^2 - 32a^2x^2 + 16\sqrt{2}ax(2x^2 - z^2 + a^2) = 0$$
symétriques l'une de l'autre par rapport à Oz et ayant chacune pour points doubles $x = 0$, $z = \pm a$.

Chacune d'elles admet Ox pour axe de symétrie.

Transportons l'origine au point double $(x = 0, \ z = a)$; la première devient
$$(2x^2 + z^2 + 2az)^2 - 32a^2x^2 - 16\sqrt{2}ax(2x^2 - z^2 - 2az) = 0,$$
d'où les tangentes à l'origine
$$4z^2 - 32x^2 + 32\sqrt{2}zx = 0;$$
leurs coefficients angulaires sont donc racines de
$$m^2 + 8\sqrt{2}m - 8 = 0.$$
$$\begin{matrix} m' \\ m'' \end{matrix} \Big\} = -4\sqrt{2} \mp \sqrt{40} = -2\sqrt{2}[2 \pm \sqrt{5}].$$

On en peut déduire aisément une construction géométrique de ces tangentes.

On aurait encore pu obtenir séparément les deux quartiques de la projection verticale en formant l'équation de chacun des cylindres de bout qui projettent l'intersection de l'hyperboloïde avec chacun des cylindres paraboliques qui donnent la projection horizontale.

CONCOURS DE 1909 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

1799. — Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère l'hyperbole (H) ayant pour équation
$$x^2 - y^2 = r^2$$
et les coniques (T) représentées par l'équation
$$x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 = 0$$
où t est un paramètre variable.

1° Montrer qu'en leurs quatre points d'intersection A, B, C, D une courbe (T) et la conique (H) sont orthogonales.

2° Etudier les cercles passant par A, B, C, D. Lieu des foyers des coniques (T).

3° Trouver l'enveloppe des droites AB. Exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coefficients de l'équation générale d'une de ces droites (non parallèle à ox).

4° Lieu du point de contact d'une conique (T) et d'une conique ayant mêmes foyers que (H).

5° Un champ de forces, dont les forces sont parallèles au plan xoy, est tel que les traces des surfaces de niveau sur ce plan soient les coniques (T). Trouver les lignes de forces situées dans le plan xoy. Indiquer la forme et la disposition de ces lignes, les unes par rapport aux autres.

6° On considère un point E de coordonnées $x = 0$, $y = l$ et celles des lignes de force qui coupent ox en trois points réels M_1, M_2, M_3. Calculer la somme

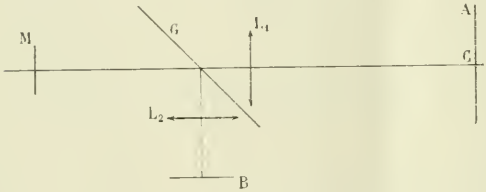
$$\frac{1}{\overline{EM_1}^2} + \frac{1}{\overline{EM_2}^2} + \frac{1}{\overline{EM_3}^2}.$$

Peut-on trouver une valeur réelle l, telle que cette somme reste constante lorsque la ligne de force varie ?

(*11 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Physique.

I. — **1800**. Un disque lumineux A est placé, perpendiculairement à l'axe, dans le plan focal d'une lentille convergente mince L_1 (distance focale = 1 mètre; diamètre = 3 centimètres). A un mètre au delà de cette lentille se trouve un miroir plan normal à l'axe, M (diamètre = 2 centimètres). La lumière est renvoyée par M sur une grande glace transparente G inclinée à 45° et qui la réfléchit à son tour sur une lentille convergente L_2 (distance focale = 1 mètre ; diamètre = 3 centimètres) symétrique de L_1 par rapport à G.



On demande où l'on doit placer une plaque photographique B pour y obtenir une image du disque A ; de combien se déplace l'image d'une très petite région entourant le centre C du disque A, si le miroir M tourne d'un angle de $\frac{1}{100}$ de radian autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure ; et de quel angle maximum X le miroir M peut tourner sans que l'on cesse d'obtenir une photographie de C (on pourra admettre $\operatorname{tg} X = \sin X = X$) ? Quel est le diamètre maximum du disque A qui pourra être photographié dans la première position de M ; quel est le diamètre correspondant de la photographie, et quel est, dans l'image B, le diamètre de la région de pleine lumière ?

Si l'on éloignait progressivement le miroir M, pour quelle distance le diamètre de la région de pleine lumière de B serait-il réduit à 1 millimètre ; l'impression photographique au centre de la plaque resterait-elle constante ou changerait-elle pendant le déplacement du miroir ?

Le miroir M étant supposé replacé à 1 mètre, on examinera ce qui se passerait si l'on ramenait le disque A jusque contre la lentille L_1. Dans cette nouvelle position, où se ferait l'image de la petite région C ; serait-elle plus grande que tout à l'heure, et impressionnerait-elle plus ou moins la plaque photographique ? Aurait-on, enfin, gagné quelque chose soit au point de vue du déplacement de l'image de C pour la rotation de $\frac{1}{100}$ de radian du miroir M, soit au point de vue de l'angle maximum X dont M peut tourner sans que l'image de C sorte tout à fait du champ ?

II. — Lois de la chute des corps. — [On rappellera *très brièvement* les expériences qui permettent de les énoncer ; et l'on montrera l'importance que présentent ces expériences et ces lois pour l'établissement des notions fondamentales de la dynamique.]

(*12 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Epreuve pratique : Epure de géométrie descriptive.

1801. — Solide de révolution engendré par un cube. — On considère un cube qui a deux diagonales situées dans un plan de front dont l'éloignement est 12cm. L'une de ces diagonales est verticale ; sur l'autre on s'élève de gauche à droite. La diagonale verticale se projette à 3cm à gauche du grand axe de la feuille ; son extrémité inférieure est sur le plan horizontal, sa longueur vaut 14cm.

Cela étant, on fait tourner le cube autour de sa diagonale de front *non verticale*. Les arêtes du cube engendrent des surfaces recouvrant un solide S.

1° Construire les deux projections du solide S.

2° On éclaire ce solide par la lumière à 45°. Construire l'ombre propre du solide et son ombre portée sur les plans de projection.

On déterminera les points remarquables des lignes qui limitent les surfaces recouvrant le solide S, des lignes de contour apparent et d'ombre, et les tangentes en ces points.

Nota. — Dessiner en *noir* les lignes de contour apparent, les lignes qui limitent les surfaces recouvrant le solide S, ainsi que les contours des ombres : en trait plein pour les parties visibles, en ponctué pour les parties cachées.

Faire en trait *rouge*, continu et fin, les lignes de construction et les lignes de rappel.

Mettre sur les ombres visibles des *hachures* fines, espacées d'environ 1 1/2 millimètre, bleues ou noires. Diriger ces hachures parallèlement à la ligne de terre pour l'ombre portée, et perpendiculairement aux projections du rayon lumineux pour l'ombre propre.

Expliquer très sommairement les constructions effectuées ; indiquer la nature et les éléments des courbes dessinées. On pourra utiliser la sphère tangente à toutes les arêtes du cube.

Renfermer l'épure dans un cadre de 28×44^{cm}, et placer la ligne de terre suivant le petit axe du cadre.

(*Jeudi 22 juillet, de 8 h. à midi.*)

Groupe II.

Physique.

I. — **1802.** Un condensateur A est chargé à 10 000 volts. On met ses armatures en communication avec celles d'un condensateur B de 1 microfarad, qui n'était pas chargé ; et la différence de potentiel tombe à 9 500 volts. On demande quelle est la capacité du condensateur A, et l'on demande d'évaluer l'énergie électrique qui était primitivement disponible dans le condensateur A, puis celle qui est actuellement disponible dans le condensateur A + B.

On réunit les armatures du condensateur double A + B par une colonne d'eau très légèrement salée, dont la résistance est de 1 mégohm (10^6 ohms). Quelle est, à l'instant initial, l'intensité du courant qui passe ; et peut-on considérer cette intensité comme constante (à 1 pour 100 près) pendant le premier vingtième de seconde de la décharge ?

La masse de la colonne d'eau étant de 1 gramme, et sa température initiale étant de 15 degrés centigrades, quelle serait sa température finale si l'on arrêtait la décharge au bout d'un vingtième de seconde ?

II. — Expliquer *sommairement* en quoi consiste le phénomène de la polarisation, et ce qu'est la polarisation rotatoire.

(*17 juin, de 8 h. à 2 h.*)

Chimie.

Cyanogène. Acide cyanhydrique.
Cyanures. — Ferro et ferri-cyanures. Bleu de Prusse.

(*19 juin, de 8 h. à midi.*)

Sciences naturelles.

De l'évolution dans le monde organique.

Notions sommaires sur les divers ordres de faits (morphologiques, paléontologiques et embryogéniques) sur lesquels est fondée l'idée d'évolution et qui permettent la recherche des origines des êtres vivants.

Indiquer avec quelque précision, d'après l'un ou l'autre de ces ordres de faits, comment s'est faite l'apparition des Vertébrés terrestres, pour le monde animal, et comment s'est constitué le type Phanérogame, pour le monde végétal.

(*18 juin, de 8 h. à midi.*)

Groupes I et II.

Mathématiques.

I. — **1803.** On laisse tomber, sans vitesse initiale, un point matériel pesant dont la masse est 1 gramme dans un milieu qui oppose à son mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse ; soit k le coefficient de proportionnalité ; on compte le temps à partir du moment où le mouvement commence.

1. Quels sont, au bout du temps t, la vitesse de ce mobile et le chemin z qu'il a parcouru ? Vérifier, sur les formules trouvées, que lorsque k est très petit, le mouvement est, pendant quelque temps, à peu près le même que si le mobile tombait dans le vide.

2. On laisse tomber au même instant plusieurs points matériels pesants, ayant chacun une masse égale à 1 gramme, dans des milieux divers qui opposent tous une résistance proportionnelle à la vitesse, mais avec des coefficients k différents ; on compare les mouvements de ces points au bout du temps t. Il est aisé de prévoir, d'après la nature même de la question, dans quel sens varient la vitesse et le chemin parcouru lorque k augmente. Vérifier analytiquement ces prévisions.

3. Calculer le coefficient k par la condition suivante : Le point matériel, pour tomber sans vitesse initiale d'une hauteur égale à $2g$, met un dixième de seconde de plus que s'il tombait dans le vide.

On prendra $g = 981$ centimètres et on se bornera à calculer le premier chiffre significatif de k.

H. — **1804**. On considère l'équation différentielle

(1) $$y' + Py + Q = 0,$$

où y est la fonction inconnue et où P, Q sont des fonctions de la variable x.

1. Montrer que toute solution de cette équation vérifie l'équation différentielle

(2) $$y'' + (P' - P^2)\,y + Q' - PQ = 0$$

(y' et y'' désignent les dérivées première et seconde de y, P' et Q' les dérivées de P et de Q).

2. Déterminer P et Q de façon que l'on ait, en désignant par α et β des constantes données,

$$P' - P^2 = \alpha^2, \qquad Q' - PQ = \beta.$$

3. En adoptant pour P, Q les fonctions ainsi trouvées, on intégrera les deux équations (1) et (2) et l'on calculera ce que devient le premier membre de l'équation (1) quand on y remplacera y par la solution générale de l'équation (2).

(14 juin, de 8 h. à midi.)

QUESTION PROPOSÉE

1805. — On considère la quadrique (H) définie par l'équation

(H) $$2x^2 - \alpha^2y^2 - \alpha^6z^2 + 2\alpha^4yz + 10\alpha^3zx + 2\alpha xy - 12\alpha^2x + 6\alpha^3y + 6\alpha^5z + 18\alpha^4 = 0,$$

où α désigne un paramètre variable.

1° L'enveloppe de cette quadrique se compose de quatre surfaces réglées du quatrième ordre, dont on cherchera les équations et les contours apparents sur le plan des coordonnées.

2° Chaque quadrique (H) touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche ABCD. Montrer que chaque côté de ce quadrilatère a un contact du second ordre avec les surfaces réglées engendrées par les deux côtés qui lui sont consécutifs.

3° Soient Aa la tangente au lieu de A et Aa' la droite suivant laquelle le plan DAB touche son enveloppe. Montrer que ces deux droites divisent harmoniquement l'angle BAD. On a les mêmes propriétés pour les trois autres sommets B, C, D.

4° Si l'on considère le tétraèdre ABCD, les lieux de ses sommets, les arêtes de rebroussement des enveloppes de ses faces, les intersections des six surfaces réglées engendrées par ses arêtes et combinées deux à deux de toutes les manières possibles, se composent uniquement de cubiques gauches, qui admettent toutes une même définition géométrique très simple.

J. Haag.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1736. — *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la partie réelle et le coefficient de* i *pour chacune des racines imaginaires de l'équation*

$$z^6 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 = 0.$$

L'équation proposée s'écrit

$$z^4(z^2 - 1) - z(z^2 - 1) + z^2 - 1 = 0,$$

ou

$$(z^2 - 1)(z^4 - z + 1) = 0;$$

elle admet les deux racines réelles $+1$ et -1, puis les racines de l'équation

(1) $$z^4 - z + 1 = 0.$$

Or, il est facile de voir que cette équation n'a aucune racine réelle. D'abord, elle n'a pas de racine négative ; ensuite, en mettant le premier membre sous la forme $z(z^3 - 1) + 1$, on voit que tout nombre positif supérieur à 1 ne peut être racine de l'équation, et en l'écrivant $z^4 + 1 - z$, on voit que tout nombre positif plus petit que 1 ne peut pas non plus être racine.

Il en résulte que l'équation (1) admet quatre racines imaginaires. Posons $z = x + yi$, x *et* y *étant réels*, l'équation devient

$$(x + yi)^4 - (x + yi) + 1 = 0$$

ou

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x + 1 + i(4x^3y - 4xy^3 - y) = 0.$$

On doit donc avoir

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x + 1 = 0,$$
$$y(4x^3 - 4xy^2 - 1) = 0$$

et il faut chercher les valeurs *réelles* de x et de y vérifiant ces équations.

La seconde donne d'abord $y = 0$, solution inacceptable, puisque l'équation (1) n'a pas de racine réelles. En écartant cette solution, on tire

(2) $$y^2 = \frac{4x^3 - 1}{4x},$$

et en remplaçant y^2 par cette valeur dans la première équation, on obtient, toutes réductions faites,

(3) $$f(x) = 64x^6 - 16x^2 - 1 = 0,$$

et nous sommes conduits à chercher les valeurs *réelles* de x et y vérifiant les équations (2) et (3).

Le théorème de Descartes montre que l'équation (3) admet une racine positive et une négative, qui sont d'ailleurs égales et de signes contraires ; soit a la positive, $-a$ la négative. Remplaçons x par ces valeurs dans l'équation (2), nous avons

$$y^2 = \frac{4a^3 - 1}{4a}, \qquad y^2 = \frac{4a^3 + 1}{4a}.$$

La seconde admet deux racines réelles $\pm\sqrt{\frac{4a^3 + 1}{4a}}$; la première également, car il est facile de vérifier que a est supérieur à $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. En effet

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{64}{16} - \frac{16}{\sqrt[3]{16}} - 1 = 3 - \sqrt[3]{16^2} = 3 - 4\sqrt[3]{4} < 0,$$

et comme $f(+\infty)$ est positif, a est supérieur à $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Posons $b = \sqrt{\frac{4a^3 - 1}{4a}}$, $c = \sqrt{\frac{4a^3 + 1}{4a}}$, nous aurons les quatre racines imaginaires de l'équation (1) $a \pm bi$ et $-a \pm ci$.

Tout revient à calculer a ; nous nous servirons des tables de logarithmes.

Si on considère x^2 comme l'inconnue, l'équation (3) a ses trois racines réelles, nous pourrons donc ramener sa résolution à celle de l'équation qui donne $\cos\frac{\varphi}{3}$ en fonction de $\cos\varphi$.

Posons $x^2 = \lambda t$, l'équation (3) devient

$$64\lambda^3 t^3 - 16\lambda_t - 1 = 0.$$

Or l'équation qui donne $\cos\frac{\varphi}{3} = t$ en fonction de $\cos\varphi$ est

(4) $$4t^3 - 3t - \cos\varphi = 0.$$

Identifions ces deux équations, nous avons

$$16\lambda^3 = \frac{16\lambda}{3} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

ou

$$\lambda^2 = \frac{1}{3}, \qquad \cos\varphi = \frac{3}{16\lambda}.$$

Prenons

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Il existe un angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ayant pour cosinus $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. Les trois racines de l'équation (4) seront $\cos\frac{\varphi}{3}$, $\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}$ et $\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$; la racine positive est $\cos\frac{\varphi}{3}$. Donc les racines réelles de l'équation (4) seront données par $x^2 = \lambda\cos\frac{\varphi}{3}$, ou $x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$; par suite

$$a = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Pour calculer b et c, nous pouvons écrire

$$b = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{1}{4a^3}\right)}, \qquad c = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{1}{4a^3}\right)}.$$

Calculons un angle aigu θ tel que $\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{4a^3}$; nous avons

$$b = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{tg}^2\theta)}, \qquad c = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta)},$$

ou

$$b = \frac{a\sqrt{\cos 2\theta}}{\cos\theta}, \qquad c = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Les calculs se feront dans l'ordre suivant:

$$\log\cos\varphi = \frac{3}{2}\log 3 - \log 16,$$

$$2\log a = \log\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{2}\log 3,$$

$$2\log\operatorname{tg}\theta = -3\log a - \log 4,$$

$$\log c = \log a - \log\cos\theta,$$

$$\log b = \log c + \frac{1}{2}\log\cos 2\theta.$$

On trouve successivement

$$\log\cos\varphi = \bar{1},51156 \qquad \text{et} \qquad \varphi = 78^g,9135;$$

on en déduit

$$\frac{\varphi}{3} = 26^g,3145, \qquad \log\cos\frac{\varphi}{3} = \bar{1},96180,$$

$$\log a = \bar{1},86162, \qquad \text{et} \qquad a = 0,72715.$$

Puis

$$\log\operatorname{tg}\theta = \bar{1},90654, \qquad \theta = 43^g,2021,$$

$$\log\cos\theta = \bar{1},89123, \qquad \log\cos 2\theta = \bar{1},32622,$$

$$\log c = \bar{1},97039, \qquad \log b = \bar{1},63350,$$

$$c = 0,9341, \qquad b = 0,43003.$$

Les racines imaginaires de l'équation proposée sont donc

$$0,72715 \pm i\,0,43003, \qquad -0,72715 \pm i\,0,9341.$$

Jean BING, élève à l'Ecole nationale supérieure des Mines.

Solution par M. G. Lach, à Denain.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1743. — *La courbe lieu du point du plan d'une parabole à égale distance de la parabole et de son sommet est une développée de parabole.*

Cette courbe est aussi le lieu du point dont les trois normales issues de ce point à la parabole et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique.

Tout point M équidistant d'une parabole et de son sommet est le centre d'un cercle tangent à la parabole et passant par le sommet.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole, et $y - mx - \frac{p}{2m} = 0$ l'équation d'une tangente en un point quelconque A. Le cercle tangent en A à la parabole et passant par le sommet O rencontre la parabole en un autre point B, et la droite OB fait avec Ox le même angle que la tangente en A, mais en sens contraire. Par suite, le coefficient angulaire de OB est égal à $-m$, et l'équation du cercle est de la forme

$$\lambda(y^2 - 2px) + \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y - mx) = 0.$$

Dans cette équation le coefficient de xy est nul ; écrivons que le coefficient de x^2 est égal à celui de y^2, nous avons $\lambda = -(m^2 + 1)$, et l'équation du cercle devient

$$m^2(x^2 + y^2) - \frac{(4m^2 + 3)px}{2} - \frac{p}{2m}y = 0.$$

Son centre a pour coordonnées

$$x = \frac{(4m^2+3)p}{4m^2}, \qquad y = -\frac{p}{4m^3};$$

pour avoir le lieu de ce point, il suffit d'éliminer m entre ces deux équations. Nous pouvons les écrire

$$m^2 = \frac{3p}{4(x-p)}, \qquad m^3 = -\frac{p}{4y};$$

élevons la première au cube, la deuxième au carré, et égalons les valeurs de m^6. Nous obtenons

$$(1) \qquad 4(x-p)^3 - 27py^2 = 0,$$

c'est l'équation du lieu.

Il est facile de voir que ce lieu est une développée de parabole. En effet, on sait que la parabole $y^2 - 2ax = 0$ a pour développée la courbe $8(x-a)^3 - 27ay^2 = 0$. Si on transporte l'origine au point $(a, 0)$, on voit que la courbe $x^3 - \frac{27a}{8}y^2 = 0$ est la développée de la parabole $y^2 - 2ax - 2a^2 = 0$.

Remplaçons a par $2p$, nous pouvons dire que la courbe $x^3 - \frac{27p}{4}y^2 = 0$ est la développée de la parabole $y^2 - 4px - 8p^2 = 0$, ou encore, en transportant l'origine au point $(-p, 0)$, que la courbe (1) est la développée de la parabole $y^2 - 4px - 4p^2 = 0$.

Cherchons maintenant le lieu du point dont les trois normales issues de ce point à la parabole et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique.

La condition pour que quatre droites concourantes ayant pour coefficients angulaires m_1, m_2, m_3, m_4 forment un faisceau harmonique est

$$2(m_1m_2 + m_3m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4).$$

Si l'une des droites est parallèle à Ox, on a par exemple $m_4 = 0$, et la relation devient

$$(2) \qquad 2m_1m_2 = m_3(m_1 + m_2).$$

Or, on sait que les coefficients angulaires des normales issues du point (x, y) à la parabole $y^2 - 2px = 0$ sont racines de l'équation

$$y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2},$$

ou

$$(3) \qquad pm^3 - 2m(x-p) + 2y = 0.$$

Il suffira d'écrire que les racines de cette équation satisfont à la relation (2).

Mais on a

$$m_1m_2 + m_3(m_1+m_2) = -\frac{2(x-p)}{p}, \qquad \text{ou} \qquad m_3(m_1+m_2) = -\frac{2(x-p)}{p} - m_1m_2;$$

et la relation (2) devient

$$m_1m_2 = -\frac{2(x-p)}{3p}.$$

D'autre part,

$$m_1m_2m_3 = -\frac{2y}{p},$$

ou, en divisant membre à membre,

$$m_3 = \frac{3y}{x-p}.$$

Donc, si on a la relation (2), la quantité $\frac{3y}{x-p}$ est racine de l'équation (3). Inversement, si $\frac{3y}{x-p}$ est racine de (3), et si l'on a $y \neq 0$, les racines de l'équation (3) vérifient la relation (2).

On aura donc l'équation du lieu en écrivant que $\frac{3y}{x-p}$ est racine de l'équation (3), ce qui donne, en supprimant le facteur y,

$$4(x-p)^3 - 27py^2 = 0;$$

c'est la même équation que précédemment.

A. DARMON, à Paris.

Bonnes solutions par MM. Ambrard, à Ruines (Cantal); R. Bouvaist; J. Coulange; Pierre Héliot; Joseph Vérots, école des Anglais, à Lyon; G. Lach, à Denain; E. Leroux, lycée de Douai; Camille Massing; Jacques Paraf; P. Salleron, à Albi; Louis Sire, à Lyon.

QUESTION PROPOSÉE

1806. — 1° Déterminer le polynome

$$f(x) = x^3 + px + q,$$

de façon que $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$. Trouver, sans faire l'opération, le reste de la division de ce polynome par le trinome $x^2 - 3x + 2$.

2° Trouver tous les couples de nombres différents α et β, tels que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$.

3° Trouver la série entière qui représente

$$\frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2},$$

et dire pour quelle valeur de x elle est convergente.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

19e Année. N° 12. Septembre 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES COMPOSANTES DE L'ACCÉLÉRATION

Par M. G. Fontené.

Les composantes de l'accélération suivant les axes étant $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, on en déduit les expressions de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale; le calcul peut être dirigé comme il suit.

On a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v\cos\alpha);$$

on a à prendre la dérivée d'un produit, dérivée qui est une somme de deux termes, et c'est ainsi que l'on arrive au résultat cherché. On a donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\times\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt};$$

on remplace une seconde fois, *mais à ce moment seulement*, l'opération $\frac{d}{dt}$ par l'opération $\frac{d}{ds}\times\frac{ds}{dt}$ ou $v\frac{d}{ds}$, et l'on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\times\cos\alpha + v^2\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{dv}{dt}\times\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\frac{d\cos\alpha}{d\tau} = \frac{dv}{dt}\times\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\times\cos\lambda,$$

l'angle τ étant fourni par le développement du cône directeur des tangentes.

La démonstration ainsi présentée, avec $\cos\alpha$ au début, a un caractère plus géométrique que si l'on écrit simplement avec $\frac{dx}{dt}$ jusqu'à la fin.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(v\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + v\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)$$
$$= \frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + v^2\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\lambda.$$

NOTE SUR LES FORMULES DE RÉCURRENCE

par M. J. Haag.

Il arrive souvent aux élèves de Mathématiques spéciales d'avoir à calculer une quantité u_n, dépendant du nombre entier et positif n, sachant que cette quantité est liée à u_{n-1} par une relation de la forme

$$u_n = f(u_{n-1}, n), \tag{1}$$

et connaissant en outre la valeur de u_0 par exemple. Une relation de la forme précédente s'appelle comme on sait, une *formule de récurrence*. Il est évident qu'elle permettrait de calculer de proche en proche *la valeur numérique de* u_n correspondant à une *valeur numérique donnée de* n aussi élevée qu'on le voudrait. C'est généralement tout ce que l'on peut tirer d'une telle relation, quand elle est de forme quelconque. Mais *il est des cas simples*, qui se présentent assez fréquemment dans les applications, *où l'on peut trouver la valeur de* u_n *sous forme d'une expression explicite en fonction de* n.

Ces cas ont été rencontrés par la plupart des élèves ; mais ils hésitent cependant quelquefois à les reconnaître et à retrouver la méthode permettant le calcul de u_n. C'est pourquoi j'ai cru bon de les rassembler ici en une courte note.

1er cas. — La relation est homogène en u_n *et* u_{n-1}. — *C'est le cas le plus simple.* On tire en effet de la relation de récurrence la valeur du rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ en fonction de n. Soit donc

$$u_n = f(n) \,.\, u_{n-1},$$

puis

$$u_{n-1} = f(n-1) \,.\, u_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = f(1) \,.\, u_0.$$

Multiplions membre à membre, il vient

$$u_n = u_0 \,.\, f(1) \,.\, f(2) \,.\,.\,.\,.\, f(n).$$

Cette méthode est fort connue.

2e cas. — La relation est linéaire, mais pas homogène. — Soit

$$a_n u_n + b_n u_{n-1} + c_n = 0, \tag{2}$$

a_n, b_n et c_n étant trois fonctions données de n.

Rappelons la méthode, également classique, employée dans ce cas.

On tire de (2) :

$$u_n = f(n) \,.\, u_{n-1} + g(n),$$

puis

$$u_{n-1} = f(n-1) u_{n-2} + g(n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = f(1) \,.\, u_0 + g(1).$$

On obtient ainsi un *système de n équations linéaires* à n inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Pour obtenir u_n, il suffit donc d'éliminer $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ entre ces n équations. Pour cela, on multiplie la seconde équation par $f(n)$, la troisième par $f(n) \,.\, f(n-1)$, la quatrième par $f(n) \,.\, f(n-1) \,.\, f(n-2)$, etc.; enfin la n^e par $f(n) \,.\, f(n-1) \ldots f(2)$. Puis l'on ajoute membre à membre les équations ainsi modifiées, et l'on obtient u_n en fonction de u_0 et de n.

On voit que les calculs et le résultat sont en général beaucoup plus compliqués dans ce cas que dans le premier.

On peut obtenir de grandes simplifications dans certaines circonstances et se ramener immédiatement au premier cas étudié. Supposons d'une façon générale qu'entre les coefficients de la relation (2) il existe une relation de la forme

$$A(a_n + b_n) + c_n = 0,$$

A désignant une constante.

Posons

$$u_n = v_n + A.$$

La relation (2) devient alors

$$a_n v_n + b_n v_{n-1} = 0.$$

Elle est homogène et donnera immédiatement v_n ; d'où u_n. Cette petite transformation sera applicable en particulier *toutes les fois que la relation* (2) *sera à coefficients constants*, ce qui est assez fréquent.

Nous venons de signaler *les deux cas fondamentaux* où l'on peut obtenir l'expression explicite de u_n en fonction de n. Il y en a d'autres qui s'y ramènent facilement. D'une façon générale, si la relation peut se mettre sous la forme

$$a_n f(u_n) + b_n f(u_{n-1}) + c_n = 0,$$

on posera $v_n = f(u_n)$, et l'on sera ramené au deuxième cas pour le calcul de v_n. Ayant v_n, on aura u_n par l'inversion de la fonction $v_n = f(u_n)$. Voici par exemple un cas simple qui se présente dans certains problèmes. Soit à calculer u_n en fonction de u_0 et de u_1 sachant que l'on a

$$(u_n)^{a_n} \cdot (u_{n-1})^{b_n} = c_n.$$

Prenons les logarithmes dans un système de base quelconque : notre relation devient

$$a_n v_n + b_n v_{n-1} = d_n,$$

en posant $$v_n = \log u_n, \quad d_n = \log c_n$$

Si en particulier a_n, b_n, c_n sont des constantes, le calcul de v_n sera, nous l'avons vu, très simple.

On arrive par exemple à une relation de la forme précédente dans la question suivante posée déjà plusieurs fois aux examens oraux de l'Ecole polytechnique. « Etant donnée une strophoïde S et un point M_0 sur cette courbe, on mène la tangente en M_0; elle coupe S en M_1; la tangente M_1 coupe S en M_2; et ainsi de suite. Calculer les coordonnées de M_n en fonction de n et des coordonnées de M_0 ». Si l'on rapporte la courbe à ses tangentes au point double, et si l'on pose $y = tx$, on obtient entre les t des points M_n et M_{n-1} la relation récurrente

$$t_n t_{n-1}^2 = k, \qquad (k = c^{te}).$$

Remarque. — Disons un mot d'une méthode qui réussit quelquefois et qui est aussi très connue. C'est celle que l'on pourrait appeler la *méthode des tâtonnements*. Elle consiste, comme on sait, à calculer directement les valeurs de u_n pour les premières valeurs de n. Puis on essaie de *deviner*, d'après les résultats obtenus, la forme générale de u_n.

Ayant trouvé cette forme, on vérifie que si elle est exacte pour n, elle l'est aussi pour $n+1$.

Cette méthode peut évidemment être plus simple dans certains cas que les méthodes régulières précédentes. On perçoit même qu'elle puisse convenir alors que celles-ci ne s'appliquent pas. Mais elle n'a évidemment aucune généralité et en outre elle exige souvent beaucoup de flair de la part du chercheur.

ALGÈBRE

1739. — 1° *Etudier les variations des fonctions*

$$\varphi_1(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\frac{x^2}{2!}}, \qquad \ldots \qquad \varphi_p(x) = \frac{e^x - 1 - x \cdots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}}{\frac{x^p}{p!}}.$$

2° *Trouver la somme de la série entière dont le terme général est* $\dfrac{f(n)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)} x^n$, p *étant un entier positif,* f *un polynome.*

1° La fonction $$\varphi_p(x) = \frac{e^x - 1 - x \cdots - \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}}{\frac{x^p}{p!}}$$

s'exprime aussi par la série entière

$$1 + \frac{x}{p+1} + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{x^n}{(p+1)\ldots(p+n)} + \cdots$$

dont le rayon de convergence est infini.

Sous l'une ou l'autre de ces formes, il est en évidence que la fonction $\varphi_p(x)$ tend vers zéro quand x croît indéfiniment par valeurs négatives, qu'elle tend vers 1 quand x tend vers zéro, qu'elle croît quand x positif croît et qu'elle croît indéfiniment quand x positif croît indéfiniment.

Il reste à étudier cette fonction quand x est négatif. Prenons sa dérivée qui s'écrit, tous calculs faits,

$$\frac{1}{p!}\varphi'_p(x) = \frac{e^x(x-p)+p+\frac{(p-1)x}{1}+\frac{(p-2)x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}}{x^{p-1}}.$$

Nous nous trouvons ramenés à étudier le signe de la fonction

$$\psi_p(x) = e^x(x-p)+p+\frac{(p-1)}{1}x+\frac{(p-2)}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}.$$

Pour cela, étudions ses variations

$$\psi'_p(x) = e^x(x-p+1)+(p-1)+\frac{p-2}{1}x+\cdots+\frac{1}{(p-2)!}x^{p-2}.$$

On peut donc écrire $\qquad \psi'_p(x) = \psi_{p-1}(x).$

Considérons les fonctions

$$\psi_0(x) = \psi'_1(x) = xe^x,$$

$$\psi_1(x) = \psi'_2(x) = e^x(x-1)+1,$$

$$\psi_2(x) = \psi'_3(x) = e^x(x-2)+2+x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{p-1}(x) = \psi'_p(x) = e^x(x-p+1)+(p-1)+\cdots+\frac{1}{(p-2)!}x^{p-2}.$$

Elles s'annulent pour $x = 0$.

La première $\psi_0(x)$ est du signe de x; la fonction $\psi_1(x)$ qui s'annule pour $x = 0$ est donc positive; par suite $\psi_2(x)$ qui s'annule pour $x = 0$ est du signe de x.

Ce résultat est général. La fonction $\psi_p(x)$ est négative pour x négatif si p est pair; elle est positive pour x négatif si p est impair.

Il en résulte, en se reportant à l'expression de $\varphi'_p(x)$ que cette fonction est toujours positive quand x est négatif.

Par suite, la fonction $\varphi_p(x)$ est une fonction croissante de 0 à $+\infty$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Soit la série entière, dont le rayon de convergence est infini,

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

avec

$$u_n = \frac{f(n)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}x^n,$$

$f(n)$ étant un polynome de degré k. On sait qu'un polynome $f(y)$ de degré k peut se mettre sous la forme

$$f(y) = A_0+A_1(y+p-1)+A_2(y+p-1)(y+p-2)+\cdots+A_k(y+p-1)\ldots(y+p-k).$$

On pourra donc écrire, en posant

$$S_n = u_1+\cdots+u_n,$$

$$S_n = A_0\left[\frac{x}{p}+\frac{x^2}{p(p+1)}+\cdots+\frac{x_n}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}\right]$$

$$+A_1\left[\frac{px}{p}+\frac{(p+1)x^2}{p(p+1)}+\cdots+\frac{(p+n-1)x^n}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+A_k\left[\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{p}x+\cdots+x^k+\frac{x^{k+1}}{p}+\frac{x^{k+2}}{p(p+1)}+\cdots+\frac{x^n}{p(p+1)\ldots(p+n-k-1)}\right].$$

Dans le coefficient de A_h, il y a au début h termes irréguliers formant un polynome de degré h,

puis dans les termes suivants, en mettant $\frac{x^{h+1}}{p}$ en facteur, on voit apparaître comme coefficient

$$1+\frac{x}{p+1}+\cdots+\frac{x^{n-h-1}}{(p+1)\ldots(p+n-h-1)},$$

qui tend vers $\varphi_p(x)$ lorsque n croît indéfiniment.

La série entière considérée est donc de la forme

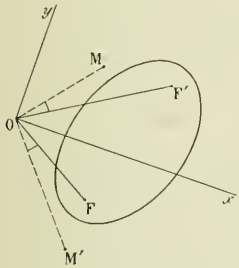
$$x[P(x)+Q(x)\varphi_p(x)],$$

$P(x)$ et $Q(x)$ étant des polynomes dont nous pourrions écrire l'expression.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1733. — *On considère une conique fixe* Γ *et une parabole* P *de foyer fixe* O, *et on désigne par* M *et* M′ *deux ombilics conjugués de* P *et de* Γ. *En supposant que* M *décrive une courbe donnée, trouver le lieu du point* M′.

Du point O on peut mener à Γ deux tangentes. Prenons pour axes les bissectrices de ces deux tangentes, et soient



$$\Gamma = Au^2+Cv^2+2Duw+2Evw+Fw^2=0,$$
$$P = u^2+v^2+puw+qvw=0$$

les équations tangentielles de Γ et de P.

Soient (x, y), (x', y') les coordonnées de M, M′. On devra pouvoir identifier l'équation de P avec

$$C+\lambda(ux+vy+w)(ux'+vy'+w)=0,$$

d'où

$$A+\lambda xx'=C+\lambda yy', \qquad F+\lambda=0, \qquad xy'+yx'=0.$$

De là on déduit

$$xx'-yy'=\frac{A-C}{F}, \quad xy'+yx'=0,$$

ou, en posant $\frac{x}{\cos\omega}=\frac{y}{\sin\omega}=\rho$, $\frac{x'}{\cos\omega'}=\frac{y'}{\sin\omega'}=\rho'$, $\rho\rho'=\frac{A-C}{F}$, $\omega+\omega'=0$.

Donc les droites OM, OM′ sont symétriques par rapport aux axes, et

$$OM\times OM'=c^{te}.$$

Le lieu de M′ se déduit donc de celui de M par une symétrie par rapport à Ox, suivie d'une inversion.

Soient F, F′ les foyers de Γ. Le module $\frac{A-C}{F}$ ne change pas si on remplace Γ par

$$\Gamma+\lambda(u^2+v^2),$$

c'est-à-dire par une conique homofocale quelconque, en particulier par l'ensemble des deux points F, F′. Mais alors on peut faire coïncider M avec F, M′ avec F′. Donc

$$OM\times OM'=OF\times OF'.$$

L. BICKART.

Autre solution. — Soit

$$\Gamma = au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2=0$$

une conique fixe et soit

$$\Gamma' = \alpha uv+\beta vw+\gamma uw=0$$

une conique variable inscrite dans le triangle ABC pris comme triangle de référence ; soient

$$\omega_0 = ux_0+vy_0+wz_0=0, \qquad \omega_1 = ux_1+vy_1+wz_1=0$$

deux ombilics opposés de Γ et Γ', nous avons

$$\lambda\Gamma + \Gamma' \equiv k(ux_0 + vy_0 + wz_0)(ux_1 + vy_1 + wz_1),$$

d'où $\lambda a = kx_0x_1, \qquad \lambda b = ky_0y_1, \qquad \lambda c = kz_0z_1,$

d'où $$\frac{x_0x_1}{a} = \frac{y_0y_1}{b} = \frac{z_0z_1}{c}.$$

ω_0 et ω_1 se correspondent dans une transformation du second ordre ayant A, B, C comme points singuliers. Ce théorème est d'ailleurs connu, M. Duporcq l'a démontré géométriquement dans le numéro de Mai 1901 de la Revue. Dans le cas particulier où Γ' est une parabole de foyer donné, la transformation du second ordre devient une inversion.

R. BOUVAIST.

Bonne solution de M. L. Sire, à Lyon.

1734. — *Soit la surface gauche* $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

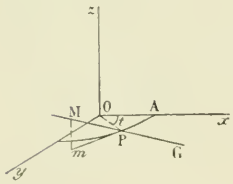
1° *On suppose qu'un point* M *se meuve d'un mouvement vibratoire simple sur une génératrice* G *de cette surface. Le centre de la vibration est le point de la génératrice qui est sur le cercle de gorge ; l'amplitude est* $\sqrt{2}$ *; la période est* 2π.

La génératrice G *tourne autour de* Oz *d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire* 1. *Trouver, au temps* t, *les coordonnées de* M.

2° *Lieu de la trace, sur le plan des* xy, *de la droite qui porte le vecteur accélération du point* M.

3° *Construire les projections de la trajectoire du point* M *sur un plan quelconque passant par* Oz *et sur le plan des* xy. *Définir géométriquement cette dernière.*

4° *Trouver et discuter l'intersection de la trajectoire du point* M *avec les génératrices de chaque système de la surface gauche.*



1° Supposons qu'au temps $t = 0$ la génératrice G coupe le cercle de gorge au point A situé sur Ox. Supposons encore qu'à ce temps initial, le point qui décrit la génératrice G d'un mouvement vibratoire défini dans le texte, soit en A. Au bout du temps t, la génératrice G coupe le cercle de gorge en P tel que $\widehat{AOP} = t$ et le point est venu sur cette génératrice en M tel que $PM = \sqrt{2}\sin t$. Projetons M en m sur le plan des xy, sur la tangente en P au cercle de gorge. On a $Pm = mM = \sqrt{2}\sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin t$ puisque la génératrice de la surface fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec le plan des xy.

De sorte que les coordonnées du point M sont

$$x = \cos t + \sin t \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y = \sin t + \sin t \cos t, \qquad z = \sin t;$$

x s'écrit encore $$x = \cos t - \sin^2 t.$$

2° La droite qui porte le vecteur accélération a pour équations

$$\frac{x - \cos t + \sin^2 t}{-\cos t - 2\cos 2t} = \frac{y - \sin t - \sin t \cos t}{-\sin t - 2\sin 2t} = \frac{z - \sin t}{-\sin t}.$$

La trace de cette droite sur le plan des xy a pour coordonnées

$$x = -2\cos 2t - \sin^2 t = -\frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}, \qquad y = \sin t \cos t - 2\sin 2t = -\frac{3}{2}\sin 2t.$$

Le lieu de ce point est le cercle de rayon $\frac{3}{2}$, dont le centre a pour coordonnées $-\frac{1}{2}$ et 0.

3° Occupons-nous d'abord de la projection de la trajectoire du point M sur le plan des xy. Cette

projection est définie par les deux relations

$$x = \cos t - \sin^2 t, \qquad y = \sin t + \sin t \cos t,$$

qui définissent une courbe symétrique par rapport à l'axe des x, comme on le voit en changeant t en $-t$.

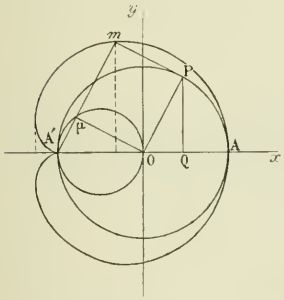
On peut écrire
$$\frac{dx}{dt} = -\sin t(1 + 2\cos t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 2t = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = (\cos t + 1)(2\cos t - 1).$$

Le tableau suivant nous permettra de construire aisément cette courbe :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$		0	$+$	0
x	1	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$		0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞						0

Le cercle qui est tangent en A à la courbe, dans cette figure, est le cercle de gorge de l'hyperboloïde.



Donnons une définition géométrique de la courbe ainsi trouvée. La première figure que nous avions tracée nous la fournit. Un point m est obtenu en partant d'un point P du cercle de gorge et en portant sur la tangente, dans le sens de Ox vers Oy, une longueur Pm égale à l'ordonnée QP.

Nous allons transformer cette définition. Pour cela décrivons sur OA′ comme diamètre un cercle, A′ étant le rebroussement de la courbe à définir et menons Oμ parallèle à Pm. La figure OP$m\mu$ est un rectangle. Donc A′, μ, m sont en ligne droite et $\mu m = \mathrm{OP} = 1$.

Donc le lieu de m est une conchoïde du cercle de diamètre OA′, le point fixe étant le point A′, la longueur constante étant le diamètre du cercle.

On reconnaît là la définition d'une cardioïde.

Nous avons aussi à construire la projection de la courbe sur un plan passant par Oz. Soit OX la trace de ce plan sur le plan des xy. Soit α l'angle de Ox avec OX. Prenons OX et Oz pour axes dans le plan zOX.

Les coordonnées d'un point qui est projection sur ce plan d'un point (x, y, z) de la trajectoire sont

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha = (\cos t - \sin^2 t)\cos\alpha + (\sin t + \sin t\cos t)\sin\alpha,$$
$$z = \sin t.$$

L'équation, en coordonnées cartésiennes, de la courbe ainsi obtenue peut s'écrire

$$X = z\sin\alpha - z^2\cos\alpha \pm (\cos\alpha + z\sin\alpha)\sqrt{1 - z^2}.$$

Il faudrait faire varier α de 0 à π. Supposons, pour fixer les idées, α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On peut construire cette courbe en construisant d'abord la parabole

$$X_1 = z \sin \alpha - z^2 \cos \alpha,$$

puis en ajoutant et retranchant à X_1 $(\cos \alpha + z \sin \alpha)\sqrt{1 - z^2}$. Ceci montre qu'il est nécessaire que $z^2 \leq 1$. Les deux cas à distinguer, α variant, sont les suivants :

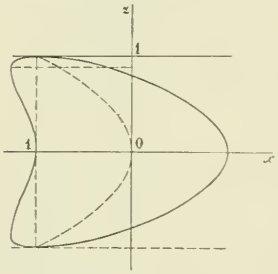
1° L'équation $\cos \alpha + z \sin \alpha = 0$ donne un nombre z compris entre $+1$ et -1 ; c'est-à-dire α est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, la courbe présente un point double sur la parabole diamétrale relative aux cordes parallèles à Ox.

2° α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La courbe est une sorte d'ovale.

Dans les deux cas, les courbes obtenues sont tangentes aux droites $z = \pm 1$ aux points situés sur la parabole diamétrale. Nous n'insisterons pas davantage sur le cas général et nous construirons la courbe dans les trois cas particuliers suivants :

$\alpha = 0$. La courbe devient $X = -z^2 \pm \sqrt{1 - z^2}$.

Elle admet Ox comme axe de symétrie, ce qu'on pouvait prévoir parce que la trajectoire elle-même du point M admet Ox comme axe de symétrie ; il suffit pour le voir de changer t en $-t$.



La dérivée de X par rapport à z est

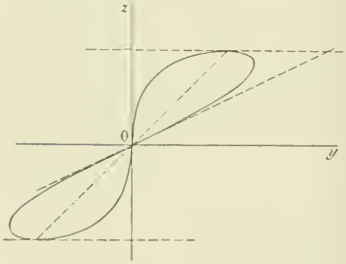
$$\frac{dX}{dz} = -2z \mp \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}},$$

ce qui montre que les tangentes aux points situés sur Ox sont parallèles à Oz, que la branche obtenue en prenant le signe $+$ devant le radical correspond à une valeur décroissante de X, z variant de 0 à α. Au contraire, pour l'autre branche, il y a un minimum pour x donné par $4(1 - z^2) = 1$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où on tire $x = -\frac{5}{4}$.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$. La courbe a alors pour équation

$$X = y = z \pm z\sqrt{1 - z^2}.$$

Cette courbe admet l'origine pour centre, ce qu'on pouvait prévoir en se servant encore de ce que la trajectoire du point M admet Ox pour axe de symétrie.



La courbe diamétrale relative aux cordes parallèles à Oy se réduit ici à une portion de la première bissectrice.

Pour $z = 0$, les deux valeurs de y sont nulles. De plus

$$\frac{y}{z} = 1 \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Pour l'une des branches, la tangente à l'origine est Oz, pour l'autre, c'est la droite $z = \frac{y}{2}$.

Pour abréger, ne nous occupons pas du maximum de l'une des valeurs de y quand z varie de 0 à 1.

Enfin, signalons le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{4}$. L'équation de la courbe est alors

$$\sqrt{2}X = z - z^2 \pm (1 + z)\sqrt{1 - z^2} \qquad \text{ou encore} \qquad (z^2 - z + X\sqrt{2})^2 = (1 + z)^3(1 - z).$$

Ce cas particulier est intéressant parce que le point double situé sur la parabole diamétrale dont nous avons parlé dans le cas général est ici le point $(z = -1,\ X = -\sqrt{2})$. En transportant l'origine

en ce point, le second membre de l'équation prise sous la dernière forme est au moins du troisième degré en z. Le point double considéré est donc de rebroussement, la tangente étant la tangente à la parabole. Grâce à cette remarque, il serait facile d'achever la construction de la courbe. Nous ne le ferons pas.

4° Les deux systèmes de génératrices de la surface gauche ont des équations de la forme

$$\begin{cases} x = z \sin \lambda + \cos \lambda, \\ y = -z \cos \lambda + \sin \lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z \sin \mu + \cos \mu, \\ y = z \cos \mu + \sin \mu. \end{cases}$$

C'est une génératrice du système μ que nous avons fait tourner autour de Oz d'un mouvement uniforme car le point M est le point de cote $\sin t$ sur la droite

$$x = -z \sin t + \cos t, \qquad y = z \cos t + \sin t.$$

Sur une génératrice du système μ, il y a un point et un seul, car le point M ne peut se trouver sur cette génératrice qu'aux temps $\mu + 2k\pi$ et chaque fois il reprend la même position.

Cherchons l'intersection de la trajectoire du point M avec une génératrice du système λ.

Un premier moyen consiste à considérer la projection de cette génératrice sur le plan des xy. Cette projection D est tangente au cercle de gorge.

Cherchons son intersection avec la cardioïde. Qu'obtiendrons-nous ? Les projections sur le plan des xy des points d'intersection de la trajectoire du point M avec le plan parallèle à l'axe Oz et passant par la droite D.

Ce dernier plan coupe la surface gauche suivant la génératrice λ et une autre du système μ. D'autre part, la droite D coupe la cardioïde en quatre points ; donc chaque génératrice λ coupe la courbe gauche tracée sur la surface gauche en trois points. On pourrait même obtenir ainsi la discussion de la réalité de ces trois points, mais un peu vague, en s'appuyant sur la figure qui représente le cercle de gorge et la cardioïde. Suivant qu'une tangente au cercle de gorge coupe la cardioïde en trois ou en quatre points réels, la génératrice λ coupe la courbe gauche en un ou trois points réels.

Nous allons maintenant opérer analytiquement d'une manière plus précise.

On est ramené à résoudre les cinq équations

$$\begin{aligned} x &= z \sin \lambda + \cos \lambda, & x &= -z \sin t + \cos t, \\ y &= -z \cos \lambda + \sin \lambda, & y &= z \cos t + \sin t, \\ & & z &= \sin t, \end{aligned}$$

qui se ramènent aux deux suivantes, en t, dont il faut chercher les solutions communes :

$$\sin t (\sin \lambda + \sin t) + \cos \lambda - \cos t = 0,$$
$$\sin t (\cos \lambda + \cos t) + \sin t - \sin \lambda = 0.$$

En transformant les sommes de lignes trigonométriques en produits et divisant la première par $2 \sin \frac{t+\lambda}{2}$, la seconde par $2 \cos \frac{t+\lambda}{2}$, on obtient deux équations équivalentes :

$$\sin t \cos \frac{t-\lambda}{2} + \sin \frac{t-\lambda}{2} = 0, \quad \text{ou encore} \quad -\sin t = \operatorname{tg} \frac{(t-\lambda)}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}}.$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$, $\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = a$, nous aurons $-\frac{2u}{1+u^2} = \frac{u-a}{1+au}$ ou finalement l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad u^3 + au^2 + 3u - a = 0.$$

A chaque valeur de u correspondent des valeurs de t définies à $2k\pi$ près, donc un point de la courbe. Nous retrouvons donc ce résultat qu'il y a trois points sur chaque génératrice λ.

Il reste à faire la discussion de leur réalité quand a varie. Pour ne pas allonger la solution déjà longue d'un problème facile, nous nous bornerons à indiquer la méthode : elle consiste à construire la

courbe (1) en y considérant u et a comme les coordonnées courantes. Cette construction est simple en résolvant par rapport à a et en remarquant que la courbe admet l'origine des coordonnées pour centre. Une fois cette construction opérée, on n'a plus qu'à couper la courbe par des parallèles variables à l'axe des u. C'est là un procédé familier aux lecteurs de la *Revue*.

Bonnes solutions : MM. J. Plane, lycée de Clermont; Ch. Jean, lycée de Nimes; G. Foucay, à Roanne; G. Dinay, lycée de Poitiers; J. Bing; A. Duby, lycée de Dijon.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1807. — *Un paraboloïde de révolution a pour axe la verticale d'éloignement* 12^{cm} *projetée suivant le grand axe de la feuille. Son sommet a pour cote* 15^{cm} *et son foyer a pour cote* $13^{cm},5$.

Un cône de révolution a pour sommet le point de la parabole principale de front du paraboloïde situé à gauche de l'axe du paraboloïde et dont la cote est 9^{cm}, *le demi-angle au sommet de ce cône est égal à* $60°$ *et son axe est une droite de bout.*

Représenter la partie solide du paraboloïde extérieure au cône illimité dans les deux sens ; on supposera que le paraboloïde est limité au plan horizontal de projection.

On éclaire le solide obtenu par des rayons parallèles à la ligne de terre et dirigés de gauche à droite, et l'on demande de tracer les lignes d'ombre relatives à ce solide.

(Agrégation des sciences mathématiques, concours de 1908.)

Le paraboloïde limité au plan horizontal de projection a pour contour apparent vertical la parabole méridienne limitée à la ligne de terre. On en connaît l'axe, le sommet et le foyer, et l'on peut par conséquent la construire immédiatement par points. Nous rappellerons une construction assez rapide fondée sur l'équation de la courbe. Cette équation étant ici $x^2 + 2pz = 0$, on donne à z les valeurs successives $-\frac{p}{2}n^2$ en prenant pour n les nombres entiers consécutifs de manière que $-2pz$ devienne un carré parfait $x^2 = p^2n^2$.

On utilise aussi deux points de la courbe pour construire un point intermédiaire en menant par le point t de rencontre des tangentes en ces points une parallèle à l'axe et prenant sur cette droite le milieu de la distance du point t au milieu de la corde. On obtient d'ailleurs la tangente en un point qui correspond à une valeur de n en calculant son abscisse à l'origine $\frac{pn}{2}$.

Le contour apparent horizontal du paraboloïde se réduit au parallèle section du solide par le plan horizontal.

Le cône ayant son axe de bout n'a pas de contour apparent vertical ; son contour apparent horizontal se compose des deux génératrices $\sigma\gamma_1$ et $\sigma\gamma_2$ qui constituent sa méridienne horizontale, et qui font chacune un angle de $60°$ avec l'axe. Ces deux surfaces étant du second degré se coupent suivant une quartique dont la projection verticale sera une conique puisque le plan méridien de front du paraboloïde est un plan de symétrie pour les deux surfaces. Commençons par déterminer cette conique, et pour cela rapportons les deux surfaces à trois axes rectangulaires ayant leur origine au sommet du paraboloïde, l'axe des z étant son axe dirigé vers le haut, ox la tangente au sommet de la méridienne de front.

L'équation du paraboloïde est, en désignant par p son paramètre,

$$x^2 + y^2 + 2pz = 0. \tag{1}$$

Le cône ayant son sommet au point $(x = -2p,\ y = 0,\ z = -2p)$ et pour demi-angle au sommet $60°$ a pour équation

$$(x + 2p)^2 + (z + 2p)^2 - 3y^2 = 0. \tag{2}$$

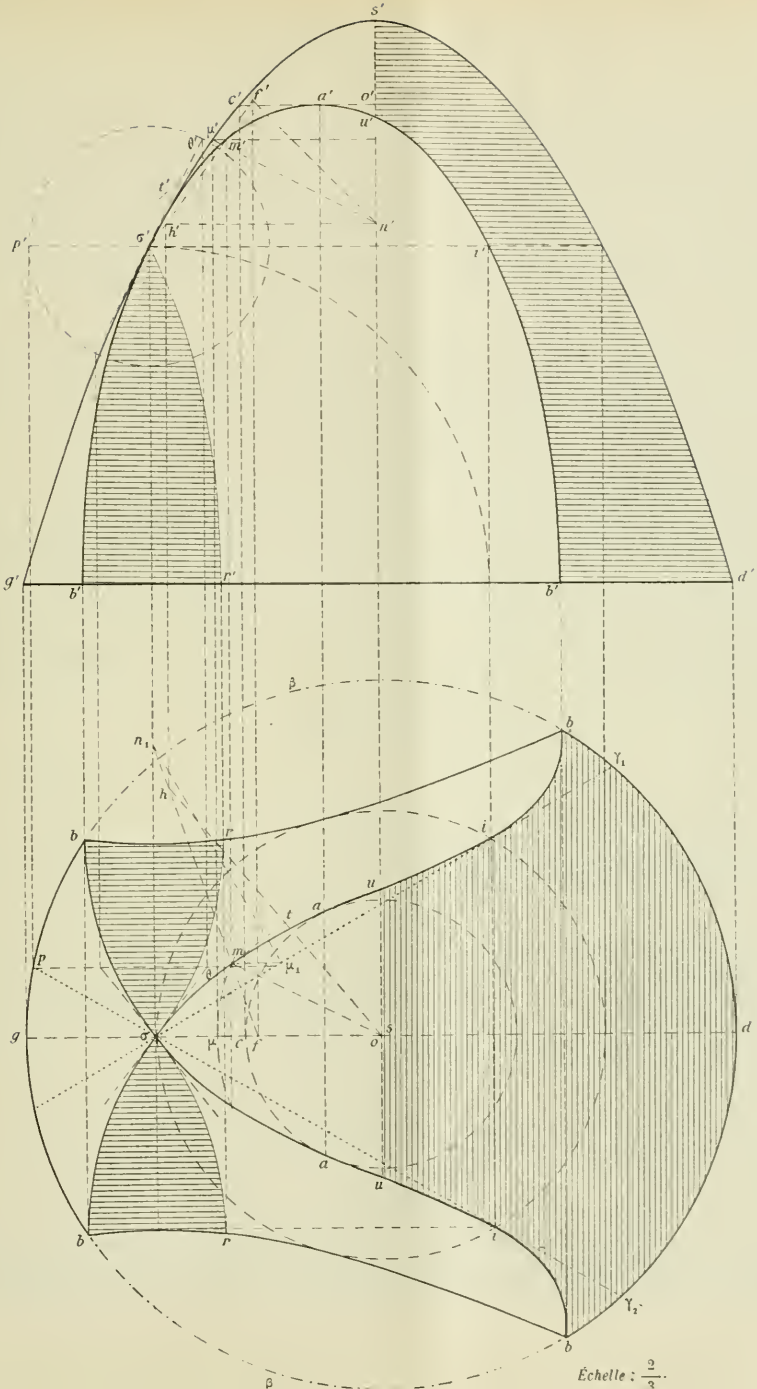
La projection verticale de l'intersection s'obtiendra en éliminant y entre ces équations, ce qui donne

$$(x + 2p)^2 + (y + 2p)^2 + 3(x^2 + 2pz) = 0$$

ou

$$\frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{9\,\frac{p^2}{2}} + \frac{(z + 5p)^2}{18p^2} - 1 = 0.$$

C'est une ellipse dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{p}{2}$, $z = -5p$, où $p = 3^{cm}$, et dont les demi-axes sont $\frac{3p\sqrt{2}}{2}$ et $3p\sqrt{2}$.



Échelle : $\frac{2}{3}$.

On reconnaît aisément que son petit axe est situé sur la ligne de terre ; cette ellipse est tangente à la parabole méridienne au sommet du cône comme on pouvait le prévoir.

Pour obtenir l'intersection des deux surfaces on peut employer des plans auxiliaires passant par l'axe du cône ; ils coupent sa surface suivant deux génératrices, et coupent celle du paraboloïde suivant des ellipses, qui se projettent horizontalement suivant des cercles puisque le plan horizontal est parallèle au plan tangent au sommet. On a d'ailleurs immédiatement les génératrices du cône en prenant les points d'intersection d'un parallèle de front choisi pour base du cône avec la trace, sur son plan, du plan auxiliaire de front mené par le sommet du cône. On a aussi chacun des cercles auxiliaires projection horizontale de la section plane du paraboloïde en remarquant que son centre est sur la ligne de front du sommet, au milieu de la projection horizontale de la corde déterminée dans la parabole méridienne par la trace du plan auxiliaire.

On peut aussi, et le tracé est un peu plus simple, couper le paraboloïde par une série de plans horizontaux, prendre les points où chaque parallèle coupe l'ellipse que nous venons de déterminer sur la projection verticale, et rappeler ces points sur la projection horizontale de chaque parallèle. Ces constructions pouvant être faites rigoureusement à la règle et au compas donnent très exactement la courbe demandée. Nous donnons la construction pour le point (m', m). On peut obtenir la tangente en un point soit en projetant horizontalement la tangente à l'ellipse au point correspondant, cette droite étant située dans le plan tangent à la surface du cône en ce point, soit en appliquant la méthode ordinaire du plan des normales en ce point à chaque surface. Nous avons indiqué cette dernière construction qui nous a donné mt, $m't'$.

Les points remarquables sont : d'abord le point double au sommet du cône ; les tangentes en ce point sont les génératrices du cône situées dans le plan tangent au paraboloïde en ce point et qu'on obtient facilement en donnant au cône une base parallèle au plan vertical et prenant sur ce plan la trace $\alpha'\beta'$ du plan tangent qui est ici de bout. Les points sur les génératrices de contour apparent du cône sont donnés par le parallèle du paraboloïde qui passe au sommet du cône et qui coupe l'ellipse aux points α' et ι', d'où les deux points ι. La courbe touche en a le parallèle mené par le sommet de l'ellipse projection verticale.

Enfin la quartique passe par les points b où le parallèle limite du paraboloïde coupe les lignes de rappel menées par les extrémités de l'axe de l'ellipse projection verticale, et en ces points la tangente est de bout en projection horizontale.

On peut d'ailleurs retrouver ces résultats analytiquement en prenant l'équation de la quartique, obtenue par l'élimination de z entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(x+2p)^2 - 3y^2 + \left(2p - \frac{x^2+y^2}{2p}\right)^2 = 0.$$

Portons l'origine au point double, on obtient

$$4p^2(x^2 - 3y^2) + (4px - y^2)^2 = 0.$$

Les tangentes à l'origine sont $\qquad y = \pm x\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Les points sur les génératrices de contour apparent $x^2 - 3y^2 = 0$ ont pour abscisses $x = 0$, $x = 12p$.

Les points sur le cercle de base du paraboloïde ont pour abscisses

$$x = \frac{3p}{2} \pm \frac{3p\sqrt{2}}{2}.$$

L'étude de cette courbe et de ses tangentes est très simple et peut servir de vérification.

Représentation du solide. — Pour obtenir ce qui reste du paraboloïde limité au plan horizontal quand on a enlevé la portion intérieure au cône, il faut prendre l'intersection du cône avec le plan horizontal.

C'est une hyperbole dont les asymptotes sont les génératrices de contour apparent horizontal, et dont les sommets réels sont les traces des génératrices situées dans le plan de profil du sommet. On a immédiatement ces points en projetant verticalement le cône sur ce plan de profil.

Il ne reste plus qu'à tracer une hyperbole dont on connaît les asymptotes et les sommets. Elle passe d'ailleurs par les points où la quartique coupe le parallèle base du paraboloïde.

On devra donc supprimer en projection horizontale les deux arcs de ce parallèle $b\beta b$ intérieurs à la surface conique et les portions de génératrices illimitées au delà des points ι où elles touchent la quartique. Tout ce qui reste est vu sauf les génératrices de contour apparent du cône, qui sont cachées par la surface du paraboloïde.

En projection verticale tout est vu, la parabole méridienne étant conservée.

Ombre propre. — L'ombre propre du solide se compose d'abord de la ligne d'ombre sur la surface du paraboloïde et qui n'est autre que la parabole méridienne de profil ; on ne doit en conserver que l'arc projeté en $s'u'$, su sur la droite de profil du sommet. Elle comprend ensuite l'ombre portée sur la surface conique

intérieure au paraboloïde par la partie solide de ce paraboloïde qu'on a conservée. Cette ombre n'est autre que le lieu des seconds points d'intersection de cette surface conique avec les parallèles à xy menées par les points de la courbe commune aux deux surfaces par où ces rayons pénétreraient à l'intérieur du solide. Or le cône admettant pour plan de symétrie le plan de profil de son sommet, auquel tous les rayons lumineux sont perpendiculaires, on voit immédiatement que la courbe d'ombre sera symétrique de la partie de la courbe d'intersection située à gauche de ce plan de profil, soit $\sigma'r'$, σr.

On peut donc immédiatement tracer cette courbe d'ombre sur les deux projections sans autre construction spéciale, les parties couvertes de hachures indiquant les régions dans l'ombre et visibles sur chacune des projections.

CONCOURS DE 1909 (*Suite*).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (¹).

On donne deux cercles, de centres O et O′, de rayons R et R′; ces deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et l'on mène les tangentes communes extérieures dont les points de contact sont A et A′, B et B′, ainsi que les tangentes communes intérieures dont les points de contact sont C et C′, D et D′, les points A et C étant de part et d'autre de la ligne des centres, tandis que le contraire a lieu pour les points A′ et C′, si l'on a, comme on le suppose, $R < R'$. Les tangentes AA′ et CC′ se coupent en E, les tangentes BB′ et DD′ se coupent en F, et la droite EF rencontre la droite OO′ au point G; les tangentes AA′ et DD′ se coupent en I, les tangentes BB′ et CC′ se coupent en J, et la droite IJ rencontre la droite OO′ au point K. On considère les droites AC, BD et A′C′, B′D′, qui se croisent au point K.

1° Pour que les droites AC et B′D′ se confondent en une même droite r, auquel cas les droites BD et A′C′ se confondent en une même droite s, il faut et il suffit que les cercles orthoptiques des deux cercles donnés soient orthogonaux, ce qui équivaut à la relation métrique

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

(On appelle cercle orthoptique d'un cercle le cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit le cercle donné sous un angle droit.)

Le point G est alors le milieu du segment OO′.

La condition précédente est supposée remplie dans tout ce qui suit.

2° Si R est un point de la droite r, les polaires de ce point par rapport aux deux cercles O et O′ se coupent en un point S situé sur la droite s.

3° L'enveloppe de la droite RS est une conique, que l'on déterminera par des éléments métriques, et dont on indiquera quelques tangentes remarquables. Le lieu de l'orthocentre P du triangle ORS est une conique, dont on indiquera quelques points remarquables; même question pour le triangle O′RS.

4° Soient RM, RN, et RM′, RN′ les tangentes menées d'un point R de la droite r aux deux cercles O et O′; le plan étant orienté dans le sens ABCD, soient α, β et γ, δ les angles que font avec un axe porté par la droite r des demi-droites portées par ces tangentes et situées d'un même côté de la droite r pour chacun des cercles O et O′ (ces angles se retrouvent en O et O′); on pose :

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = x, \qquad \frac{\beta-\alpha}{2} = u,$$

$$\frac{\gamma+\delta}{2} = y, \qquad \frac{\delta-\gamma}{2} = v.$$

Etablir les relations suivantes :

$$\cos^2 u = \left(1 + \frac{R^2}{R'^2}\right)\cos^2 x, \qquad \cos^2 v = \left(1 + \frac{R^2}{R'^2}\right)\cos^2 y,$$

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} y} = -\frac{R'^2}{R^2}.$$

Vérifier, au moyen de ces relations, que les tangentes RM, RN et RM′, RN′ forment un faisceau harmonique.

Le point R de la droite r peut d'ailleurs être remplacé par un point S de la droite s.

(¹) Des solutions étudiées de la question de mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Mathématiques spéciales.

1808. — On donne une parabole (P) et une droite (D) dont les équations, relatives à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, sont

$$(\mathrm{P})\ \begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ z = 0, \end{cases} \qquad (\mathrm{D})\ \begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases}$$

et l'on considère la surface (S) engendrée par une droite variable (Δ) assujettie à rencontrer (P) en un point A et (D) en un point B, de façon que la distance AB soit une constante l.

1° Construire la projection sur le plan xoy d'une section de la surface par un plan parallèle au plan xoy; construire la tangente en un point de cette projection et montrer que la courbe obtenue peut être regardée comme le lieu des milieux de cordes parallèles à ox et limitées, d'une part à une parabole de sommet o et d'axe ox, d'autre part à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ox et oy.

2° On peut distinguer deux sortes de droites Δ suivant que l'abscisse de A est supérieure ou inférieure à celle de B; séparer sur les sections précédentes les arcs qui correspondent aux génératrices de l'un ou de l'autre système et trouver le lieu des points qui limitent ces arcs.

3° On considère le solide limité par la surface (S) et par les plans $z + a = 0$, $z - 2a = 0$; trouver son volume et construire son contour apparent sur le plan zox.

4° Déterminer les trajectoires orthogonales des droites (Δ). Par un point A, on peut mener deux droites (Δ), qui rencontrent une trajectoire orthogonale en deux points C et C'; montrer que l'on peut choisir cette trajectoire de façon que la somme $\overline{AC} + \overline{AC'}$ soit proportionnelle à l'abscisse de A.

Peut-on choisir les constantes données de façon qu'une seule trajectoire orthogonale rencontre toutes les droites (Δ) entre leurs points situés sur la parabole (P) et sur la droite (D)?

Calcul différentiel et intégral.

Ox, Oy, Oz étant trois axes rectangulaires donnés, on considère une surface S, d'un seul tenant. Soit s une portion quelconque de S, sans point commun avec Oz et n'ayant pas de plan tangent parallèle à Oz.

I. — Soient A l'aire de la projection de s sur le plan des xy; B, le volume limité par l'aire s, sa projection A et le cylindre projetant; C, le volume limité par l'aire s et le cône ayant pour base cette aire et pour sommet l'origine; D, le volume limité par l'aire s et par le conoïde qui a le contour de s pour directrice, Oz pour axe et xOy pour plan directeur.

Les notations B, C, D représentant les volumes en question affectés de signes convenables, montrer qu'on a

$$(1) \qquad 3\mathrm{C} = \mathrm{B} - 2\mathrm{D}$$

tant que l'aire s n'est pas coupée par certaines lignes situées sur S. Montrer également que la formule subsiste même sans cette dernière restriction si l'on prend les éléments de B en grandeur et signe, de manière à avoir toujours

$$\mathrm{B} = \iint z\,dx\,dy$$

(l'intégrale double étant étendue à l'aire A), et qu'en même temps les éléments des volumes C, D soient aussi affectés de signes convenables, dépendant de x, y, z, p, q $\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. On énoncera, autant que possible, géométriquement les conventions de signes auxquelles on sera ainsi conduit.

II. — Le cône (supposé réduit à une seule de ses nappes) qui limite le volume C détermine, sur le cylindre de révolution de rayon 1 qui a Oz pour axe, une aire algébrique dont les éléments seront affectés des mêmes signes que les éléments correspondants de C, conformément aux conventions précédentes : soit E cette aire.

D'autre part, on fait tourner s autour de Oz et on désigne par F le volume de révolution ainsi engendré, par G, l'aire de la section méridienne de ce volume, un élément de F ou de G étant également affecté d'un signe (le même dans les deux cas) d'après une convention convenable.

Déterminer la surface S de manière que, pour toute portion s (sans point commun avec Oz ni plan tangent parallèle à Oz) prise sur cette surface, on ait la relation

$$(2) \qquad a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + 3c\mathrm{C} + e\mathrm{E} + \frac{f}{2\pi}\mathrm{F} + g\mathrm{G} = 0,$$

où a, b, c, e, f, g sont des constantes. Montrer que S doit vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, y, z, ρ, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (le radical étant pris positivement). Indiquer (en l'énonçant encore géométriquement) la détermination du signe commun à donner à un élément quelconque de F et à l'élément correspondant de G de manière que cette équation soit la même pour toute la surface considérée.

Trouver les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue, en employant les coordonnées semi-polaires ρ, ω (coordonnées polaires de la projection du point sur le plan xOy), z (cote du point).

Etudier les projections de ces caractéristiques sur le plan xOy. Faire voir qu'il peut exister des caractéristiques qui soient situées sur un cylindre de révolution d'axe Oz, et discuter leur forme.

III. — On suppose les constantes b, c liées par la relation

$$b + 3c = 0. \tag{3}$$

On considère l'intégrale curviligne

$$I = \int \left[\varepsilon \left(c + \frac{e}{\rho^3} \right) - \frac{a}{2} \right] (xdy - ydx) \pm \rho \left(\frac{\rho}{2} f + g \right) dz$$

prise d'un point M à un point M′ de la surface S, le long d'un chemin L situé tout entier sur cette surface. Montrer que si S satisfait à la condition qui lui a été imposée dans la IIe partie, et si, sous le signe $\int$, le signe du terme en dz a été convenablement choisi, l'intégrale I ne change pas de valeur lorsque M et M′ restant fixes, on déforme d'une manière continue, sur la surface, la ligne L tracée entre ces deux points.

Si, au lieu de la relation (3), les constantes b, c ont entre elles la relation

$$b + 6c = 0, \tag{4}$$

une propriété analogue à la précédente appartient à l'intégrale

$$J = \int \varepsilon \frac{(c\rho^3 + e)^2}{\rho^3} (xdy - ydx) - \varepsilon g z \frac{c\rho^3 + e}{\rho} (xdx + ydy) + P[\varepsilon f \rho^2 dz - a(xdy - ydx)]$$

où P est un polynome entier en ρ convenablement choisi et ε est l'une des deux quantités $+1$, -1.

IV. — On suppose en outre que la surface S contient une circonférence dont le plan passe par Oz et qui n'a aucun point commun avec Oz, ni avec le cylindre de révolution précédemment considéré (fin de la IIe partie). Sur chacune des caractéristiques issues des différents points de cette circonférence, on prend un arc limité, et cela de manière que la portion Σ de S ainsi délimitée ne contienne aucune singularité.

En supposant donnée la valeur de l'intégrale I [dans le cas de la relation (3)] ou J [dans le cas de la relation (4)] le long d'un certain chemin L joignant M et M′ et situé sur Σ, quelles sont les autres valeurs que peut acquérir cette intégrale lorsqu'on remplace L successivement par tous les autres chemins qu'on peut tracer entre les mêmes points sur Σ ?

Indiquer la relation qui doit exister entre le rayon de la circonférence, la distance de son centre à Oz et les coefficients de l'équation (2) pour que la valeur de l'intégrale considérée soit unique dans ces conditions.

Mécanique.

Un cerf-volant de poids P est soumis à l'action normale du vent, représentée par une force $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ P. Dans sa position d'équilibre, il est incliné à 30° sur l'horizon ; il admet un axe de symétrie sur lequel se trouvent son centre de gravité G et le centre O de poussée du vent ; O est au-dessus de G et OG égale 4 centimètres.

En un point A de l'axe, placé au-dessous de G, à 40 centimètres de G, est attaché un fil de longueur l ; deux autres fils, de longueur l', sont attachés en deux points B et C symétriques par rapport à l'axe ; la droite BC, égale à $2d$, est au-dessus de G à 29 centimètres de G. Dans la position d'équilibre, ces trois fils, flexibles, inextensibles et sans masse, sont tendus et réunis en un point M, auquel est attachée la ficelle qui retient le cerf-volant.

1° Trouver la relation qui lie l, l' et d ; supposant ces longueurs connues, calculer les tensions des trois fils.

2° Le point M étant à 30 mètres au-dessus du sol, quelle est la tension à l'autre extrémité E de la ficelle supposée fixée au sol, flexible, inextensible et de poids p par unité de longueur ; déterminer p de façon que la tangente en E soit horizontale. (On ne tiendra pas compte de l'action du vent sur la ficelle.)

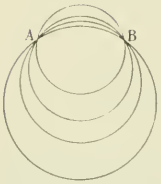
3° Dans ces conditions, on suppose que la ficelle, prolongée à partir de E, s'enroule immédiatement, avec frottement de coefficient f suivant une hélice tracée sur un cylindre de révolution fixe, dont l'axe est perpendiculaire au plan de la ficelle, le rayon du cylindre étant r et le pas de l'hélice h : quelle sera la force nécessaire pour maintenir l'équilibre, cette force étant appliquée à la nouvelle extrémité libre de la ficelle supposée enroulée suivant une spire complète. (On ne tiendra pas compte du poids de la partie enroulée.)

4° La ficelle qui retient le cerf-volant ayant la forme trouvée précédemment (2°) et étant supposée indéformable, on place à l'extrémité située sur le sol un postillon soumis à une force, résultante du poids du postillon et de l'action du vent ; cette force est constante et est dans le plan de la ficelle ; quelle condition doit-elle remplir pour que le postillon se mette en mouvement, en supposant qu'il y ait frottement de coefficient m ?

Étudier le mouvement du postillon dans le cas où la force est horizontale. (On assimilera ce postillon à un point matériel mobile avec frottement de coefficient m sur la courbe matérielle représentée par la ficelle supposée indéformable.)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours spéciaux.*)

Analyse (*).



1809. — Déterminer les trajectoires orthogonales d'une série de cercles qui passent par deux points fixes A et B dans un plan.

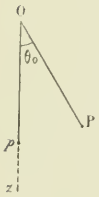
On donnera d'abord une solution analytique basée sur le calcul différentiel et intégral. On cherchera ensuite une solution purement géométrique.

(*Durée : 4 heures.*)

Mécanique.

I. — **1810.** Un plan P tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de la verticale ascendante Oz. Etudier le mouvement d'un point A pesant qui glisse sans frottement dans le plan P.

II. — **1811.** Deux petites sphères pesantes parfaitement élastiques, de poids P et p, sont suspendues chacune par leur centre à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, et de même longueur l pour les deux sphères. Les deux fils sont fixés à l'autre extrémité en un même point O.



La sphère p étant dans sa position d'équilibre (Op vertical), on abandonne sans vitesse la sphère P dans la position OP, où le fil est tendu et fait avec Op un angle θ_0 ; P venant choquer p, on demande de dire : 1° de quel angle va s'écarter Op ; 2° de donner des indications sur le mouvement de p et P après le choc.

On envisagera particulièrement le cas où θ_0 est assez petit, et où $\frac{P}{p}$ est voisin de l'unité.

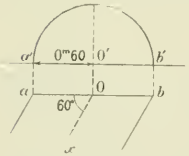
On réduira les sphères à de simples points matériels.

(*Durée : 4 heures.*)

Calcul numérique.

Même composition que pour les cours préparatoires.

Epure de Stéréotomie.



Descente biaise dans un mur droit. $\left(\text{Echelle de } \frac{1}{10}\right)$. — La courbe de tête est un plein cintre de $0^m,60$ de rayon.

L'axe de la voûte fait, en projection horizontale, un angle de 60° avec le plan de tête. Il est incliné à $\frac{1}{2}$ sur l'horizon.

On appareillera entièrement la tête de la voûte et on construira tous les panneaux nécessaires à la taille de l'un des voussoirs.

(*Durée : 4 heures.*)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1742. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{x}$$

et montrer que les fonctions

$$G = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\,dt}{1+t^2}, \qquad H = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,dt$$

satisfont à cette équation et sont les mêmes.

(*) Voir note de M. A. Durand, n° d'août 1909, p. 268.

Pour intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{x}, \tag{1}$$

nous emploierons la méthode dite de la variation des constantes. L'intégrale générale de l'équation sans second membre étant $A \cos x + B \sin x$, A et B désignant des constantes, nous supposerons que l'intégrale générale de l'équation (1) est mise sous la forme

$$y = A \cos x + B \sin x,$$

A *et* B *désignant des fonctions de* x, entre lesquelles nous pourrons nous donner une relation arbitraire.

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = -A \sin x + B \cos x + \frac{dA}{dx} \cos x + \frac{dB}{dx} \sin x.$$

Assujettissons A et B à la condition

$$\frac{dA}{dx} \cos x + \frac{dB}{dx} \sin x = 0\,; \tag{2}$$

il reste

$$\frac{dy}{dx} = -A \sin x + B \cos x,$$

puis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A \cos x - B \sin x - \frac{dA}{dx} \sin x + \frac{dB}{dx} \cos x.$$

Si nous écrivons maintenant que y vérifie l'équation différentielle (1), nous obtenons

$$-\frac{dA}{dx} \sin x + \frac{dB}{dx} \cos x = \frac{1}{x}, \tag{3}$$

et des équations (2) et (3) nous tirons

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{dB}{dx} = \frac{\cos x}{x},$$

ou

$$A = -\int \frac{\sin x}{x} dx + C, \qquad B = \int \frac{\cos x}{x} dx + D,$$

C et D désignant des constantes.

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$y = -\cos x \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{x} dx + C \cos x + D \sin x.$$

Je dis maintenant que la fonction

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

vérifie l'équation différentielle.

En différentiant sous le signe $\int$ on a

$$\frac{dG}{dx} = -\int_0^\infty \frac{te^{-tx}}{1+t^2} dt, \qquad \frac{d^2G}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} dt\,;$$

on en tire

$$\frac{d^2G}{dx^2} + G = \int_0^\infty \frac{(1+t^2)e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^\infty e^{-tx} dt = \left| \frac{e^{-tx}}{-x} \right|_0^\infty = \frac{1}{x}.$$

Considérons ensuite la fonction

$$H = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t} dt\,;$$

nous avons

$$\frac{dH}{dx} = \int_0^\infty \frac{-\sin t}{(x+t)^2} dt, \qquad \frac{d^2H}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{2\sin t}{(x+t)^3} dt.$$

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{2\sin t}{(x+t)^3} dt = \left| -\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\cos t\, dt}{(x+t)^2} = \int_0^\infty \frac{\cos t\, dt}{(x+t)^2}.$$

De même, en intégrant de nouveau par parties,

$$\int_0^\infty \frac{\cos t\, dt}{(x+t)^2} = \left| \frac{-\cos t}{x+t} \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\sin t\, dt}{x+t} = +\frac{1}{x} - H.$$

On a donc

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{1}{x} - H :$$

ce qui montre que la fonction H vérifie l'équation (1).

Je dis maintenant que les fonctions G et H sont les mêmes.

Posons $u = G - H$, nous avons alors $\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$, et par suite $u = a\cos x + b\sin x$, a et b étant des constantes ; donc

$$\int \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt - \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t} dt = a\cos x + b\sin x.$$

Donnons à x la valeur $2k\pi$, k désignant un nombre entier positif ; nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2tk\pi}}{1+t^2} dt - \int_0^\infty \frac{\sin t}{2k\pi + t} dt = a$$

Si k augmente indéfiniment, les quantités sous le signe $\int$ tendent vers zéro, et les intégrales également, donc $a = 0$.

De même si l'on donne à x la valeur $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, et si l'on fait augmenter k, on voit que $b = 0$. On en conclut $G - H = 0$.

René LAFOSSE, étudiant à Paris.

Bonnes solutions par MM. Amblard : Darmon : Louis Sire.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1738. — *Trouver l'enveloppe des plans qui coupent deux sphères données suivant deux cercles orthogonaux.*

Discussion.

Trouver aussi le lieu des centres des cercles sections de l'une des sphères.

Soient C et C' les centres des sphères données, R et R' leurs rayons. Nous prendrons pour origine le milieu O de CC', pour axe des x la droite CC' et pour plan des yz le plan mené par le point O perpendiculairement à CC'. Les équations des sphères sont alors

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad (x+a)^2 + y^2 + z^2 - R'^2 = 0.$$

Soit maintenant

$$(P) \qquad ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan coupant les sphères suivant deux cercles orthogonaux. Désignons par ω et ω' les centres de ces cercles, par ρ et ρ' leurs rayons, nous devons avoir

$$\rho^2 + \rho'^2 = \overline{\omega\omega'}^2.$$

Or, on a $\rho^2 = R^2 - \overline{C\omega}^2$, et $C\omega$ est la distance du point C au plan P. Par suite

$$\overline{C\omega}^2 = \frac{(ua+h)^2}{u^2+v^2+w^2},$$

et

$$\rho^2 = R^2 - \frac{(ua+h)^2}{u^2+v^2+w^2}.$$

De même

$$\rho'^2 = R'^2 - \frac{(-ua+h)^2}{u^2+v^2+w^2}.$$

D'autre part, le point ω est le point de rencontre du plan P et de la perpendiculaire à ce plan menée par le point C. Les coordonnées du point ω sont donc les solutions du système

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w};$$

on en tire aisément

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{u(x-a)+vy+wz}{u^2+v^2+w^2} = \frac{-(ua+h)}{u^2+v^2+w^2},$$

et par suite les coordonnées du point ω sont

$$x = a - \frac{u(ua+h)}{u^2+v^2+w^2}, \qquad y = -\frac{v(ua+h)}{u^2+v^2+w^2}, \qquad z = -\frac{w(ua+h)}{u^2+v^2+w^2}.$$

Celles du point ω' s'en déduisent en y remplaçant a par $-a$, et un calcul facile nous donne

$$\overline{\omega\omega'}^2 = \left(2a - \frac{2au^2}{u^2+v^2+w^2}\right)^2 + \frac{4a^2u^2v^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} + \frac{4a^2u^2w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

$$= 4a^2 - \frac{8a^2u^2}{u^2+v^2+w^2} + \frac{4a^2u^2(u^2+v^2+w^2)}{(u^2+v^2+w^2)^2},$$

ou enfin

$$\overline{\omega\omega'}^2 = 4a^2 - \frac{4a^2u^2}{u^2+v^2+w^2}.$$

Ecrivons maintenant que $\rho^2 + \rho'^2$ est égal à $\overline{\omega\omega'}^2$; nous obtenons

$$R^2 - \frac{(ua+h)^2}{u^2+v^2+w^2} + R'^2 - \frac{(-ua+h)^2}{u^2+v^2+w^2} = 4a^2 - \frac{4a^2u^2}{u^2+v^2+w^2},$$

ou

$$(R^2 + R'^2 - 2a^2)u^2 + (R^2 + R'^2 - 4a^2)(v^2+w^2) - 2h^2 = 0.$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan P ; elle représente une quadrique à centre unique rapportée à ses axes. Son équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{R^2+R'^2-2a^2} + \frac{y^2+z^2}{R^2+R'^2-4a^2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Cette quadrique est de révolution autour de l'axe Ox ; la méridienne du plan des xy a pour équation

$$\frac{x^2}{R^2+R'^2-2a^2} + \frac{y^2}{R^2+R'^2-4a^2} - \frac{1}{2} = 0,$$

elle a pour foyers les points C et C'.

La quadrique n'est réelle que si a^2 est inférieur à $\frac{R^2+R'^2}{2}$.

Si $a^2 < \frac{R^2+R'^2}{4}$, l'enveloppe est un ellipsoïde de révolution.

Si $a^2 > \frac{R^2+R'^2}{4}$, c'est un hyperboloïde de révolution à deux nappes.

Enfin si $a^2 = \frac{R^2 + R'^2}{4}$: l'équation tangentielle se réduit à $a^2u^2 - h^2 = 0$; elle exprime que le plan P passe par l'un des points C et C'. Donc dans ce cas l'enveloppe se réduit à ces deux points. Les deux sphères sont alors orthogonales.

Pour avoir le lieu du point ω, centre du cercle section de la sphère C par le plan P, il faut éliminer u, v, w, h entre les équations

$$ux + vy + wz + h = 0, \qquad \frac{x-a}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}$$

et

$$(R^2 + R'^2 - 2a^2)u^2 + (R^2 + R'^2 - 4a^2)(v^2 + w^2) - 2h^2 = 0.$$

Les deux premières nous donnent

$$\frac{u}{x-a} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \frac{-h}{x(x-a) + y^2 + z^2};$$

et nous n'avons plus qu'à remplacer dans la troisième u, v, w, h par des quantités proportionnelles. Nous obtenons ainsi

$$(R^2 + R'^2 - 2a^2)(x-a)^2 + (R^2 - R'^2 - 4a^2)(y^2 + z^2) - 2[x(x-a) + y^2 + z^2]^2 = 0$$

ou encore

$$(R^2 + R'^2 - 2a^2)[(x-a)^2 + y^2 + z^2] - 2a^2(y^2 + z^2) - 2[(x-a)^2 + y^2 + z^2 + a(x-a)]^2 = 0$$

ou, en divisant par $(x-a)^2 + y^2 + z^2$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2 + R'^2 - 2a^2}{2}.$$

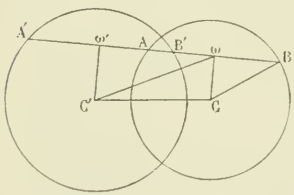
Cette équation représente une sphère qui est le lieu des points ω et ω'. Cette sphère n'est réelle que si a^2 est inférieur à $\frac{R^2 + R'^2}{2}$.

G. FOUCRY, à Reims.

Solution géométrique. — Prenons pour plan de la figure le plan perpendiculaire au plan P passant par la ligne des centres CC'. Ce plan coupe les sphères suivant deux grands cercles et le plan P suivant une droite AA'BB' sur laquelle se trouvent les centres ω, ω' des cercles de diamètres AB, A'B' déterminés par le plan P dans les sphères.

Les cercles ω et ω' étant orthogonaux, les segments AB et A'B' se divisent harmoniquement, et l'on est ramené à trouver l'enveloppe des droites coupant deux cercles donnés suivant une division harmonique. C'est un problème bien connu dont voici d'ailleurs une solution.

Cherchons d'abord le lieu des points ω et ω'. Nous avons



$$\overline{\omega B}^2 = R^2 - \overline{\omega C}^2 = \omega A' . \omega B' = \overline{\omega C'}^2 - R'^2,$$

ou

$$\overline{\omega C}^2 + \overline{\omega C'}^2 = R^2 + R'^2.$$

On en conclut que le lieu du point ω est un cercle (Γ) qui a pour centre le milieu O de CC', et dont le carré du rayon est $\frac{R^2 + R'^2 - 2a^2}{2}$ ($CC' = 2a$). Le point ω' décrit le même lieu.

L'enveloppe de la droite AB est alors la podaire négative du cercle (Γ) par rapport à C ou C', c'est une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers C et C', et le cercle (Γ) pour cercle principal.

Ce sera une ellipse si les points C et C' sont à l'intérieur du cercle, c'est-à-dire si l'on a $R^2 + R'^2 > 4a^2$; une hyperbole si C et C' sont extérieurs au cercle, c'est-à-dire si $R^2 + R'^2 < 4a^2$. Enfin l'enveloppe se réduit aux points C et C', si ces points sont sur le cercle, c'est-à-dire si $R^2 + R'^2 = 4a^2$.

En faisant tourner la figure autour de CC' on est conduit aux mêmes résultats que par la méthode analytique.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions par MM. Joseph PLANE, lycée de Clermont ; Joseph VÉROTS, école des Anglais, à Lyon ; André DARMON, à Paris ; A. ROUSSEAU, école supérieure de Landrecies.

1744. — *On considère deux sphères fixes,* S *et* S′, *de centres* O *et* O′, *et les sphères variables* Σ *passant par le centre de* S *et coupant les sphères* S *et* S′ *suivant deux cercles orthogonaux.*

1° *Trouver le lieu des centres des sphères* Σ.

2° *Trouver l'enveloppe des sphères* Σ *et construire la section de cette enveloppe par un plan passant par la droite* OO′.

Examiner le cas où S *et* S′ *sont orthogonales.*

Solution géométrique.

Ce problème se ramène évidemment au problème n° 1738, traité antérieurement. La solution géométrique que M. Sire nous a envoyée et que nous publions à la suite de celle-ci va nous le montrer. La solution analytique présente donc seule un intérêt nouveau.

1° Prenons pour origine le centre de S et pour axe des x la ligne des centres de S et S′ et soient

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + b = 0,$$

les équations des deux sphères S et S′. La sphère Σ, passant au centre de S, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0.$$

Pour exprimer qu'elle coupe les sphères S et S′ suivant deux cercles orthogonaux, il suffit d'exprimer que les plans de ces cercles, c'est-à-dire les plans radicaux de Σ et S, de Σ et S′, sont conjugués par rapport à la sphère Σ qui porte les deux cercles. Ces deux plans ont pour équations

$$2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z - R^2 = 0, \qquad 2(\alpha - a)x + 2\beta y + 2\gamma z + b = 0$$

et, pour qu'ils soient conjugués par rapport à Σ, il faut qu'ils vérifient l'équation

$$u'\Sigma'_u + v'\Sigma'_v + w'\Sigma'_w + r'\Sigma'_r = 0,$$

$\Sigma(u, v, w, r) = 0$ étant l'équation tangentielle de la sphère Σ.

Or
$$\Sigma(u, v, w, r) \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w + r)^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\Sigma'_u = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)u - \alpha P, \qquad \frac{1}{2}\Sigma'_v = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)v - \beta P,$$

$$\frac{1}{2}\Sigma'_w = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)w - \gamma P, \qquad \frac{1}{2}\Sigma'_r = -P, \qquad P = \alpha u + \beta v + \gamma w + r;$$

donc la condition est
$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(uu' + vv' + ww') - PP' = 0,$$
avec
$$P' \equiv \alpha u' + \beta v' + \gamma w' + r'.$$

D'autre part,

$$u = 2\alpha, \qquad v = 2\beta, \quad w = 2\gamma, \quad r = -R^2,$$
$$u' = 2(\alpha - a), \quad v' = 2\beta, \quad w' = 2\gamma, \quad r' = b;$$

par conséquent

$$uu' + vv' + ww' = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a\alpha),$$
$$P \equiv 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - R^2, \qquad P' \equiv 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2a\alpha + b.$$

La relation se simplifie considérablement et devient

$$(1) \qquad 2(R^2 - b)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2aR^2\alpha + bR^2 = 0.$$

Elle montre que le lieu du centre de la sphère Σ est une sphère qui a son centre sur Ox.

Si $R^2 = b$, c'est-à-dire si les sphères S et S′ sont orthogonales, ce lieu se réduit à un plan, le plan

$$\alpha = \frac{R^2}{2a},$$

qui est parallèle au plan des yz et à égale distance du centre de S et du plan radical de S et S′.

2° La sphère Σ passe par un point fixe O, son centre décrit la sphère (1), elle enveloppe donc une surface homothétique à la podaire de (1) par rapport au point O, et dans le rapport 2. Nous aurons directement cette enveloppe, en écrivant que les dérivées partielles de Σ et de (1) par rapport à α, β, γ, δ, sont proportionnelles, et ajoutant ces équations à l'équation $\Sigma = 0$. Ceci nous donne le système :

$$2\alpha - \frac{aR^2}{R^2 - b} = \lambda x, \qquad 2\beta = \lambda y, \qquad 2\gamma = \lambda z,$$

$$\frac{-aR^2}{R^2-b}\alpha+\frac{bR^2}{R^2-b}=-\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2+z^2),$$

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0.$$

Les trois premières donnent α, β, γ ; il n'y a qu'à les porter dans les deux dernières et éliminer λ entre ces deux équations ; on trouve ainsi, d'abord

$$\lambda\left(x^2+y^2+z^2-\frac{aR^2x}{R^2-b}\right)=\frac{a^2R^4}{(R^2-b)^2}-\frac{2bR^2}{R^2-b},$$

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+\frac{aR^2}{R^2-b}x=x^2+y^2+z^2;$$

puis

$$(2)\qquad \left(x^2+y^2+z^2-\frac{aR^2x}{R^2-b}\right)^2-\left(\frac{a^2R^4}{(R^2-b)^2}-\frac{2bR^2}{R^2-b}\right)(x^2+y^2+z^2)=0.$$

C'est une surface du quatrième degré, de révolution autour de Ox, et dont une méridienne s'obtient en faisant $y=0$ ou $z=0$.

Pour $z=0$, on trouve

$$\left(x^2+y^2-\frac{aR^2x}{R^2-b}\right)^2-k(x^2+y^2)=0,$$

$$k=\frac{a^2R^4}{(R^2-b)^2}-\frac{2bR^2}{R^2-b}.$$

En transformant cette équation en coordonnées polaires, on voit de suite qu'elle représente un limaçon de Pascal, ce qui était évident, d'après ce qui a été dit plus haut.

Pour que ce limaçon soit réel, il faut que la constante k soit positive, c'est-à-dire que a^2R^2 soit plus grand que $2b(R^2-b)$. Or, en appelant R'^2 le carré du rayon de la deuxième sphère, on a $a^2-b=R'^2$, $b=a^2-R'^2$, et l'inégalité devient

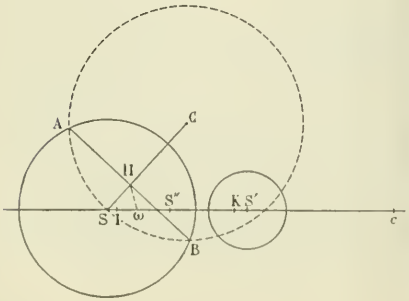
$$a^2R^2>2(a^2-R'^2)R^2-2(a^2-R'^2)^2,$$

$$a^2R^2>2R^2R'^2+2(a^2-R'^2)^2.$$

C'est évidemment celle que l'on trouve en exprimant que la sphère (I), lieu des centres des sphères Σ, est réelle.

Quand les deux sphères S et S′ sont orthogonales, quand $R^2=b$, les calculs précédents ne peuvent pas se faire. Le lieu des centres des sphères Σ est alors un plan et ces sphères passent par deux points fixes, le point O et le pied sur Ox du plan radical commun aux deux sphères S et S′.

Solution géométrique. — Prenons pour plan de figure le plan passant par S, S′ et le centre C d'une sphère Σ.



Effectuons ensuite une transformation par inversion de pôle S et de module R^2, R étant le rayon de la sphère S. Le cercle C se transforme en la droite AB, trace d'un plan P perpendiculaire au plan du tableau et coupant S et la transformée S″ de S′ suivant deux cercles orthogonaux.

Or, nous savons (problème n° 1738) que le centre H du cercle section de la sphère S par le plan P, décrit dans le plan du tableau un cercle de centre ω, milieu de SS″ ; que la droite AB enveloppe une conique de foyers S, S″ dont ω est le cercle principal ; cette conique se réduit aux deux points S, S″ lorsque les deux sphères S, S″ sont orthogonales.

Inversement, comme $SH.SC=\frac{R^2}{2}$,

on voit que le lieu de C est un cercle ayant son centre en c sur SS′ tel que

$$SI.\ Sc = \frac{R^2}{2},$$

I étant le pied de la polaire du point S par rapport au cercle ω.

D'autre part, l'enveloppe du cercle C est un limaçon de Pascal, de point double S et ayant pour axe de symétrie SS′. Ce limaçon peut être considéré soit comme inverse de la conique enveloppe de AB, par rapport à S; soit comme podaire par rapport à S du cercle c lieu de C.

En faisant tourner la figure autour de SS′, on voit que le lieu de C est une sphère de centre c.

L'enveloppe des sphères Σ est une surface de révolution du quatrième degré engendrée par la rotation d'un limaçon de Pascal autour de son axe de symétrie.

Enfin lorsque les sphères S, S′ sont orthogonales, il en est de même des sphères S, S″. Dans ce cas, l'enveloppe des plans P se compose de l'un des deux points S, S″.

Or, les plans qui passent par S se correspondent à eux-mêmes dans l'inversion; on peut les envisager comme des sphères de rayon infini.

Aux plans qui passent par S″ correspondent les sphères passant par S et le point K intersection du plan polaire de S par rapport à S′ et de SS′. Le lieu du centre de ces sphères se réduit donc au plan perpendiculaire au milieu de SK.

Louis SIRE.

CONCOURS DE 1909 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Algèbre et Analyse.

I. — **1812**. Soient les équations

$$\begin{cases} a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} + a_3\sqrt{x_3 - x} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0, \\ a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0, \\ a_1\sqrt{x_1 - x} - a_2\sqrt{x - x_2} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0, \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4 sont des constantes supérieures à 0, et $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$.

1° Démontrer que, parmi ces trois équations, il y en a toujours une et une seule ayant une racine réelle, d'ailleurs unique.

2° Indiquer la condition pour que cette racine appartienne à l'une de ces équations choisie *a priori*.

3° Calculer cette racine à un centimètre près quand $a_1 = a_3 = a_4 = \frac{a_2}{2}$, $x_1 = 10^m$, $x_2 = 9^m$, $x_3 = 7^m$, $x_4 = 6^m$.

P. S. — Si le temps le permet, on pourra essayer d'indiquer une généralisation de la question I.

II. — **1813**. On considère la partie de la cycloïde

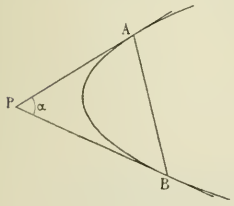
$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

pour laquelle $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Calculer l'aire et le volume de révolution engendrés par cette courbe tournant autour de Ox. Peut-on déduire de ce calcul le centre de gravité du périmètre et de l'aire de la courbe?

Même problème pour la partie de cette courbe comprise entre les parallèles à Oy menées par les points $= 0$, $t = t_1 \leqslant 2\pi$.

(*Durée : 4 heures.*)

Géométrie analytique.



1814. — 1° Lieu des points P d'un plan d'où l'on voit une parabole donnée dans ce plan sous un angle constant α.

2° Enveloppe des cordes AB de contact des tangentes issues de chacun de ces points P.

(*Durée : 4 heures.*)

Calcul numérique.

I. — On donne les côtés a, b, c, d d'un quadrilatère inscriptible. Calculer les angles, la surface et les diagonales.

Application numérique : $a = 31^m$, $b = 16^m$, $c = 24^m$, $d = 11^m$.

tl. — **1815**. Calculer approximativement, à un centième près, autant que possible la valeur de la série

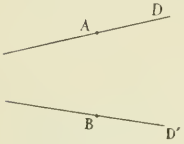
$$1 + \frac{\sin\varphi}{1} + \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n + \ldots,$$

où $\varphi = 29$ degrés.

(*Durée : 4 heures.*)

Mécanique.

1816. — Deux points mobiles m et m' se déplacent sur deux droites D et D′ données dans l'espace sous l'action de forces accélératrices constantes. Ils partent de deux points A et B donnés sur D et D′ où ils se trouvaient primitivement au repos ou animés de vitesses initiales connues dirigées suivant les droites D et D′.



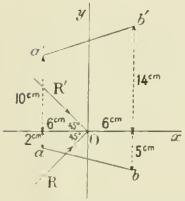
On demande à quelle époque la distance qui les sépare sera minimum et quelle sera la grandeur de cette plus courte distance.

Examiner le cas où les vitesses initiales différant de zéro, les forces accélératrices seraient supposées nulles et celui où les deux droites D et D′ étant dans un même plan, les deux points mobiles peuvent se rencontrer.

(*Durée : 4 heures.*)

Epure de Géométrie descriptive.

1817. — Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (qui n'auront pas à être passés à l'encre), les points (a, a') et (b, b') sont définis par le croquis ci-joint.



On considère :

1° le tétraèdre régulier dont $(ab, a'b')$ est une arête, dont l'arête $(ac, a'c')$ est horizontale, le point c étant en avant de ab, et dont le sommet (s, s') est au-dessous du plan $(abc, a'b'c')$;

2° le cône de sommet (s, s') qui passe par la hauteur abaissée de (s, s') sur le plan $(abc, a'b'c')$ et qui est coupé par ce plan suivant un cercle de centre (a, a').

On demande de représenter la partie du tétraèdre extérieure au cône supposé enlevé, en figurant, sur les parties vues, les ombres produites par des rayons lumineux parallèles à (R, R′) du croquis ci-joint.

Les arêtes du solide seront dessinées en noir (trait plein pour celles qui sont vues, interrompu pour celles qui sont cachées), les lignes de construction en rouge.

(*Durée : 4 heures.*)

BIBLIOGRAPHIE

J'ai reçu dans ces derniers temps divers livres intéressants que j'ai parcourus hâtivement, trop superficiellement pour en faire le compte rendu, mais que je veux cependant signaler à nos lecteurs.

Ces ouvrages ont tous été édités à Leipzig : *G. J. Goschensche Verlagshandlung*, Leipzig (*Sammlung Schubert*).

1° *Spezielle Ebene Curven*, von Dr. Heinrich Wieleitner ;

2° *Théorie des Potentiels und der Kugelfunktionen*, von Prof. Dr. A. Wangerin. 1 Band ;

3° *Allgemeine Formen und Invariantentheorie*. 1 Band. Binäre Formen, von W. Franz Meyer.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

QA
1
R486
année 19

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY